ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIA

ÍRTA

D[r] ROMSAUER LAJOS

MŰEGYETEMI NYILV. R. TANÁR

ELSŐ KÖTET

TÉRELEMEK ÉS SÍKLAPÚ ALAKZATOK ÁBRÁZOLÁSA AZ ORTHOGONÁLIS PARALLEL PROJEKCIÓBAN KÉT KÉPSÍKON, ORTHOGONÁLIS ÉS KLINOGONÁLIS AXONOMETRIÁBAN

254 SZÖVEG KÖZÖTTI ÁBRÁVAL

MÁSODIK KIADÁS

FRANKLIN-TÁRSULAT

ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIA

ÍRTA

D^r ROMSAUER LAJOS

MŰEGYETEMI NYILV. R. TANÁR

ELSŐ KÖTET

TÉRELEMEK ÉS SÍKLAPÚ ALAKZATOK ÁBRÁZOLÁSA
AZ ORTHOGONÁLIS PARALLEL PROJEKCIÓBAN KÉT KÉPSÍKON,
ORTHOGONÁLIS ÉS KLINOGONÁLIS AXONOMETRIÁBAN

254 SZÖVEG KÖZÖTTI ÁBRÁVAL

MÁSODIK KIADÁS

BUDAPEST, 1929
FRANKLIN-TÁRSULAT

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

ELŐSZÓ AZ ELSŐ KIADÁSHOZ.

Műegyetemi hallgatóknak tartott ábrázoló geometriai előadásaimat két kötetben kívánom megjelentetni. Az első kötet, mely az első félévi anyagot öleli föl, tartalmazza ama ábrázoló geometriai módszerek tárgyalását, melyekre műszaki tanulmányainak megalapozásánál az építész, a mérnök és gépészmérnök hallgatónak egyaránt szüksége van. A második kötet foglalkozik a kótás projekcióval, a centrális perspektívával és nyujtja főleg műszaki szempontból lényeges görbe vonalak s felületek geometriáját és ábrázolását.

Tudom, hogy semmiféle könyv az élő előadás érdeklődést keltő hatását nem pótolhatja. Könyvem közrebocsátásával egyrészt azokon a nehézségeken kívánok könnyíteni, melyek abból származnak, hogy egy aránylag nagy anyag igen rövid idő alatt vár elsajátításra, másrészt a könyvben szereplő ábrákkal útmutatást óhajtok adni ú. n. jó felvételek és tetszetős rajzok készítésére.

Meg kell még jegyeznem, hogy ezt a könyvet elsősorban vezérfonalnak szántam, s így csak lényeget nyujt, sok helyen tömör, összevont fogalmazásban. A könyv olvasásánál a kész ábrákat gondosan újból kell rajzolni, mert az ábrák puszta szemlélete az ábrázoló geometria tanulásának egyik főcélját, a térszemlélet helyes kifejlesztését nem biztosítja.

Felvételeim tisztánrajzolásáért hálával tartozom *Remsey Győző*, *Vigassy Lajos* és *Zigány Ferenc* tanár uraknak, kik megértő készséggel kívánságaimnak mindenkor eleget tettek. De hálával megemlékezem a kiadóról, a *Franklin-Társulatról* is, mivel áldozatkészségével lehetővé tette e könyv megjelenését.

Romsauer L.

TARTALOM.

ELSŐ FEJEZET.

Térelemek, alapalakzatok.

MÁSODIK FEJEZET.

Orthogonális parallel projekció két képsíkon.

Térelemek ábrázolása, összekötési feladatok.

Metszési feladatok.

Transzverzális feladatok.

Kollineár síkbeli rendszerek.

Síklapú alakzatok.

Árnyékszerkesztések.

Metrikus feladatok.

Térelemek forgatása képsíkra merőleges tengely körül.

Gula- és hasábmodellek készítése.

Szabályos poliederek.

Adott feltételeket kielégítő térelemek és alakzatok ábrázolása.

HARMADIK FEJEZET.

Orthogonális axonometria.

Az orthogonális axonometria mint önálló ábrázoló geometriai módszer.

Klinogonális axonometria.

FÜGGELÉK.

BEVEZETÉS.

A technikus feladata technikai objektumok alkotása. Ily technikai objektum tervezését egy ember is végezheti, de annak létesítéséhez segítőtársakra szorul. Felmerül tehát annak a szükségessége, hogy a tervező mérnök oly *eszköz* felett rendelkezzék, melynek segítségével tervét, annak minden részletét, pontos alakját és összes méreteit munkatársaival közölhesse.

Ezt az eszközt szolgáltatja az *ábrázoló geometria módszere szerint készített rajz.*

Minden technikai objektum bizonyos célra szolgál, különböző anyagokból készül és meghatározott alakkal bír. Az ábrázoló geometria szempontjából a technikai objektumnak sem célja, sem anyaga, hanem elsősorban és egyedül csak annak *alakja* és *nagysága* érdekel.

Ily technikai objektum alakjának tanulmányozásánál azt egyes részeire bontjuk szét. A részeire bontott objektum alakja igen egyszerű geometriai téralakzatokból, geometriai téridomokból állítható össze. Vizsgálatainkat ezen egyszerű geometriai téridomok tanulmányozásával kezdjük.

ELSŐ FEJEZET.

TÉRELEMEK, ALAPALAKZATOK.

1. §. Térelemek. A tér felépítésénél a legegyszerűbb geometriai alakzatokból, *a térelemekből* indulunk ki. Térelemek: a *pont,* a *sík* és az *egyenes* vagy *sugár.*

A pont jelölésére a dűlt latin nagy betűt, a sík jelölésére az álló telt latin nagy betűt és az egyenes jelölésére a dűlt latin kis betűt használjuk. Így *A, B, C,... L, M, N, O, P,...* pontokat, **A, B, C, H,... P, Q, R, S,...** síkokat és *a, b, c,...e, f, g, h,...l, m, n,...* egyeneseket jelentenek.

2. §. Térelemek viszonylagos helyzete. *Különnemű térelemek* viszonylagos helyzetének tárgyalásánál megvizsgálandó: *a)* pont és sugár, *b)* sík és sugár, *c)* pont és sík viszonylagos helyzete.

a) Pont és sugár kétféle viszonylagos helyzetben lehet: 1. a pont *nincs rajta* az egyenesen, 2. a pont *rajta van* az egyenesen. E geometriai tényeket úgy is fejezhetjük ki, hogy az egyenes *nem megy* a ponton *keresztül,* illetőleg az egyenes a ponton *keresztül megy.* Mindkét esetben ugyanazt a tényt kétféleképpen fogalmaztuk, kívánatos a két-két fogalmazás egységesítése. A következőkben az első esetben azt fogjuk mondani, hogy a pont *nem illeszkedik* a sugárra, vagy a sugár *nem illeszkedik* a pontra, vagy a pont és a sugár *nem illeszkedő* elemek, vagy a pont és a sugár nem *illeszkednek egymásra;* a második esetben azt fogjuk mondani, hogy a pont *illeszkedik* a sugárra, vagy a sugár *illeszkedik* a pontra, vagy a sugár és pont *illeszkedő* elemek, vagy a sugár és pont *illeszkednek egymásra.*

A nem illeszkedés jele: $\stackrel{\bullet}{-}$.

Az illeszkedés jele: $-\!\!\bullet\!\!-$.

A fenti eseteket a bevezetett jelek segítségével így írjuk: $P \stackrel{\bullet}{-} s$ vagy $s \stackrel{\bullet}{-} P$; $P -\!\!\bullet\!\!- s$ vagy $s -\!\!\bullet\!\!- P$.

b) Sík és sugár viszonylagos helyzete szintén kétféle lehet: 1. a sugár *nem fekszik* a síkban, vagyis a sík a sugáron *nem megy keresztül,* 2. a sugár *benne fekszik* a síkban, vagyis a sík a sugáron *keresztül megy.* Ezt a következőkben így fogjuk mondani, illetőleg jelölni:

1. a sugár nem illeszkedik a síkra, $s \stackrel{\bullet}{-}$ **S**,
2. a sugár és sík illeszkedők, $s -\!\!\bullet\!\!-$ **S**.

c) Pont és sík viszonylagos helyzete is kétféle lehet:

1. a pont *nem illeszkedik* a síkra, $P \mathrel{\overset{\bullet}{-}} \mathbf{S}$,
2. a pont és sík *illeszkedők,* $P \mathrel{-\!\bullet\!-} \mathbf{S}$.

Egynemű térelemek viszonylagos helyzetének tárgyalásánál megvizsgálandó: *d)* két pont, *e)* két sík, *f)* két sugár viszonylagos helyzete.

d) Két egymástól különböző pont, A és B, *nem azonos,* amit így jelzünk: $A \not\equiv B$. Ilyen pontokról azt mondjuk, hogy *nem illeszkednek egymásra,* amit így jelzünk: $A \mathrel{\overset{\bullet}{-}} B$.

Ha két pont *azonos,* $A \equiv B$, ezekről azt mondjuk, hogy *illeszkedők,* írásban: $A \mathrel{-\!\bullet\!-} B$.

e) Két egymástól különböző sík, **A** és **B**, *nem azonos,* amit így jelzünk: $\mathbf{A} \not\equiv \mathbf{B}$. Ilyen síkokról azt mondjuk, hogy *nem illeszkednek egymásra,* amit így jelzünk: $\mathbf{A} \mathrel{\overset{\bullet}{-}} \mathbf{B}$.

Ha két sík *azonos,* $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$, ezekről azt mondjuk, hogy *illeszkedők,* írásban: $\mathbf{A} \mathrel{-\!\bullet\!-} \mathbf{B}$.

f) Két sugár viszonylagos helyzete háromféle lehet: 1. a sugarak *kitérők,* vagyis *torzsugarak,* ezekről azt mondjuk, hogy *nem illeszkednek* egymásra, $a \mathrel{\overset{\bullet}{-}} b$. 2. A sugarak *metszik egymást,* ezekről azt mondjuk, hogy *illeszkedők,* $a \mathrel{-\!\bullet\!-} b$. 3. Végül a sugarak lehetnek *azonosak,* írásban: $a \equiv b$.

Már eddig láthattuk, hogy a sugár másképpen viselkedik, mint a pont és a sík. Így a pont mindig *rajta fekszik* egy másik térelemen, a síkon vagy a sugáron; a sík mindig csak *keresztül megy* egy másik térelemen, a ponton vagy a sugáron. Ellenben a sugár *rajta is fekhetik* egy térelemen, a síkon, és *keresztül is mehet* egy térelemen, a ponton. Két pontnál, illetőleg két síknál az illeszkedés és azonosság födő fogalmak, míg illeszkedő sugarak nem jelentenek azonos sugarakat. Hogy a sugár másképpen viselkedik, mint a pont és a sík, arra még számos példát találunk.

3. §. Összekötési és metszési feladatok. Az illeszkedési feladatok egy osztályára vezet ama követelmény, mely szerint: határoztassék meg egyértelműen egy térelem rajta lévő elemekből, vagy keresztül menő elemek által. Első esetben az illeszkedési feladat összekötés, a második esetben metszés. Minden összekötési és metszési feladat négy alapfeladatra vezethető vissza, e négy feladat közül kettő összekötési, kettő pedig metszési feladat. A négy alapfeladaton kívül azokat is fogjuk most elintézni, melyek leggyakrabban előfordulnak.

Összekötési feladatok: 1. Két nem illeszkedő pont egy és csak egy olyan egyenest határoz meg, mely mindkét ponton átmegy, melyen mindkét pont rajta van, illetőleg, mely mindkét pontra illeszkedik. Ez az egyenes a *két pont összekötő egyenese.* Ha az egyik pont A, a másik B, akkor a kettő összekötő egyenesét így jelezzük:

$$|AB| = g,$$

vagyis a pontokat jelentő betűket egymás mellé két függélyes vonal közé írjuk.

2. Nem illeszkedő két egyenesre sem pontot, sem síkot nem illeszthetünk úgy, hogy az mindkét egyenesre illeszkedjék. Csak két

illeszkedő egyenes határoz meg egy és csak egy olyan síkot, mely mindkét egyenesen átmegy, melyen mindkét egyenes rajta van. Ez a sík a *két illeszkedő egyenes összekötő síkja*. Ha az egyik egyenes a, a másik b, akkor a kettő összekötő síkját így jelezzük:

$$[ab] = \mathbf{S},$$

vagyis az egyeneseket jelentő betűket egymás mellé írjuk és szögletes zárójelbe tesszük.

3. Egy pont és e pontra nem illeszkedő egyenes egy és csak egy síkot határoz meg, *a pont és egyenes összekötő síkját*. Ez az illeszkedési feladat nem alapfeladat, mert az 1. feladat segítségével a 2. feladatra visszavezethető. T. i. az adott pontot az adott egyenes egy tetszőleges pontjával összekötjük, így nyerünk két illeszkedő egyenest, ezek meghatározzák a keresett síkot.

4. Egy egyenesre nem illeszkedő három pont egy és csak egy síkot határoz meg, *a három pont összekötő síkját*. Ez a feladat szintén az 1. feladat segítségével a 2. feladatra visszavezethető. T. i. az adott pontok egyikét összekötjük egy-egy egyenessel a fennmaradt pontokkal, nyerünk két illeszkedő egyenest, ezek meghatározzák a keresett síkot.

Metszési feladatok: 1. Két nem illeszkedő sík egy és csak egy olyan egyenest határoz meg, mely mindkét síkon rajta van, melyen mindkét sík keresztül megy, illetőleg, mely mindkét síkra illeszkedik. Ez az egyenes a *két sík metszésvonala*. Ha az egyik sík $\mathbf{A}$, a másik $\mathbf{B}$, akkor a kettő metszésvonalát így jelezzük:

$$|\mathbf{AB}| = g.$$

2. Két illeszkedő egyenes egy és csak egy olyan pontot határoz meg, mely mindkét egyenesen rajta van, melyen mindkét egyenes keresztül megy. Ez a pont a *két illeszkedő egyenes metszéspontja*. Ha az egyik egyenes a, a másik b, akkor a kettő metszéspontját így jelezzük:

$$(ab) = P,$$

vagyis az egyeneseket jelentő betűket egymás mellé írjuk és gömbölyű zárójelbe tesszük.

3. Egy sík és e síkra nem illeszkedő egyenes és csak egy pontot határoz meg, *a sík és egyenes metszéspontját*. Ez az illeszkedési feladat nem alapfeladat, mert az 1. metszési feladat segítségével a 2. metszési feladatra visszavezethető. T. i. messük az adott síkot az adott egyenesre illeszkedő tetszőleges síkkal, így nyerünk két illeszkedő egyenest, ezek metszéspontja a keresett pont.

4. Egy egyenesre nem illeszkedő három sík egy és csak egy pontot határoz meg, *a három sík metszéspontját*. Ez a feladat szintén az 1. metszési feladat segítségével a 2. metszési feladatra visszavezethető. T. i. az adott síkok egyikét messük a fennmaradó síkok mindegyikével, nyerünk az első síkban két illeszkedő egyenest, ezek metszéspontja a keresett pont.

4. §. Alapalakzatok. Az eddig tárgyalt összekötési és metszési feladatok, amennyiben új elem meghatározásához vezettek, azt *egyértelműen* határozták meg, ez az elem az adott elemekre illeszkedő vagy illesztett új elem volt. A következőkben szintén illeszkedési feladatokat tárgyalunk, olyanokat, melyekben az illesztett elemek száma nem véges.

Így két azonos egyenes esetében a metszés eredménye végtelen sok pont, mert az egyik egyenes minden pontja a másik egyenesre is illeszkedik, tehát a metszés eredménye az *egy egyenesre illeszthető pontok összessége.*

Ugyanúgy két azonos egyenes összekötése tulajdonképpen csak az *egy egyenesre illeszthető síkok összessége.*

Itt két elem metszéséről, illetőleg összekötéséről többé nem beszélünk; itt egynemű elemeknek egy másnemű elemre való illesztéséről van szó. *Az egy elemre illeszthető egynemű elemeknek illesztését sorozásnak nevezzük.* A sorozásnál azt az elemet, melyre az új elemeknek illesztése, vagyis sorozása történik, *sorozó* elemnek vagy sorozónak, azokat az elemeket, melyeket illesztünk, *sorozott* elemeknek nevezzük.

Egyenesre illesztett pontok összességét *pontsornak,* egyenesre illesztett síkok összességét *síksornak* nevezzük. A síksor síkjainak közös egyenesét a síksor tengelyének mondjuk.

A pontsor jele: $(g)=P_s$. A síksor jele: $[g]=S_s$.

Legyen a sorozó elem a sík, a sorozott elem a pont, illetőleg sugár, akkor a nyert alakzatot, a síkra illeszthető pontok összességét, *pontsíknak,* illetőleg a síkra illeszthető sugarak összességét *sugársíknak* nevezzük. A sorozó síkot a pontsík, illetőleg sugársík síkjának mondjuk. Jelekben:

$$(\mathrm{S})=P_{\mathrm{S}},\ |\mathrm{S}|=s_{\mathrm{S}}.$$

Legyen a sorozó elem a pont, a sorozott elem a sík, illetőleg sugár, akkor a nyert alakzatot, a pontra illeszthető síkok összességét, *síkpontnak,* illetőleg a pontra illeszthető sugarak összességét *sugárpontnak* nevezzük. A sorozó pont a síkpontnak, illetőleg a sugárpontnak középpontja, centruma. Jelekben:

$$[P]=\mathrm{S}_P,\ |P|=s_P.$$

Ha két elemre egyidejűleg számtalan, egymásközt egynemű elemet illeszthetünk, akkor a két elemre összesen illeszthető, egymásközt egynemű elemek illesztését szintén sorozásnak nevezzük. A *sorozást* ez esetben *elempáron végezzük.* Legyen egy pont és egy sík illeszkedő helyzetben, akkor e két elemre sugarat sorozhatunk; a pontra és síkra egyidejűleg illeszthető sugarak összességét *sugársornak* mondjuk. A sorozó pont a sugársor középpontja, centruma; a sorozó sík a sugársor síkja. Megjegyzendő, hogy a sugársort úgy is nyerhetjük, ha sugárból és síkból álló elempárra az összes illeszthető sugarakat illesztjük. Jelekben:

$$|P\mathrm{S}|=s_s,\ |g\mathrm{S}|=s_s.$$

Elemnek elemen vagy elempáron való sorozásából nyert alakzatot *alapalakzatnak* nevezzük.

A sorozás definícióját bővítjük avval, hogy *alapalakzatot veszünk sorozónak.* Alapalakzaton úgy sorozunk elemet, hogy az alapalakzat minden elemét külön-külön sorozónak vesszük. Alapalakzaton ily módon sorozott elemek összességét szintén alapalakzatnak nevezzük.

Legyen a sorozó a sugárpont, a sorozott elem a pont. A sorozás eredménye pontalakzat, mely a tér minden pontját tartalmazza, ezt az alakzatot *ponttérnek* nevezzük, jele: $P_{\mathbf{T}}$.

Legyen a sorozó a sugársík, a sorozott elem a sík, a sorozás eredménye a tér minden síkja, a *síktér*, jele: $\mathbf{S}_{\mathbf{T}}$.

Legyen a sorozó a pontsík, a sorozott elem a sugár, akkor a tér minden sugarát nyerjük, az alakzat a *sugártér*, jele: $s_{\mathbf{T}}$.

Az eddig nyert alapalakzatokat a következő táblázatban állítjuk össze:

	Pontalakzatok,	síkalakzatok;	sugáralakzatok.
I.	P_s,	$\mathbf{S}_s$;	s_s.
II.	$P_{\mathbf{S}}$,	$\mathbf{S}_P$;	s_P, $s_{\mathbf{S}}$.
III.	$P_{\mathbf{T}}$,	$\mathbf{S}_{\mathbf{T}}$.	
IV.			$s_{\mathbf{T}}$.

Megjegyzendő, hogy a felsorolt alapalakzatokon kívül még más alapalakzatok is vannak, de azoknak származtatásától és felsorolásától eltekintünk.

5. §. Alaprendszerek. Egy és ugyanazon síkon pontot sorozva, pontsíkot, sugarat sorozva, sugársíkot nyerünk közös sorozón. E két alapalakzat összefoglalását *síkbeli rendszernek* nevezzük, jelben:

$$\mathbf{S}_{\mathbf{R}} = P_{\mathbf{S}} + s_{\mathbf{S}}.$$

Egy és ugyanazon ponton síkot sorozva, síkpontot, sugarat sorozva, sugárpontot nyerünk közös sorozón. E két alapalakzat összefoglalását *pontbeli rendszernek* nevezzük, jelben:

$$P_{\mathbf{R}} = \mathbf{S}_P + s_P.$$

A tér összes pontjai, összes síkjai és összes sugarai egy rendszerbe összefoglalva a *térbeli rendszert* alkotják, jelben:

$$\mathbf{T}_{\mathbf{R}} = P_{\mathbf{T}} + \mathbf{S}_{\mathbf{T}} + s_{\mathbf{T}}.$$

A *síkbeli rendszer*, a *pontbeli rendszer* és *térbeli rendszer alaprendszerek.*

6. §. Alapalakzatok osztályozása és egymásra való vonatkoztatása. Az alapalakzatok belső szerkezetükre nézve nem mind egyenlők, amit az egyes alapalakzatok felépítése is mutat. Ez a körülmény az *alapalakzatok osztályozásához* vezet. Ugyanabba az osztályba sorozzuk azokat az alapalakzatokat, melyek egyenlő szerkezetűek. Két alapalakzat egyenlő szerkezetét az alakzatoknak egymásra való egyértelmű vonatkoztatásával mutatjuk ki. Az egymásra való vonatkoztatást a sorozás definíciójának újabb bővítésével állapítjuk meg. De egyenlő szerkezetűeknek kell tekintenünk oly alapalakzatokat is, amelyeket már egyenlő szerkezetűeknek felismert alapalakzatokból egyenlően építettünk fel.

A sorozás definíciójának újabb bővítése az, hogy egy alapalakzatot és egy elemet, amely nem illeszkedik az alapalakzat sorozójára, együttvéve tekintünk sorozónak. *Alapalakzaton és egy elemen úgy sorozunk, hogy az alapalakzaton kívül adott elemre és az alapalakzat egy-egy elemére illesztünk elemet.*

Legyen a sorozó alapalakzat egy *sugársor* és legyen az alapalakzaton kívül adott elem egy *pont,* mely nem illeszkedik a sugársor síkjára. A pontra és a sugársor egy-egy sugarára síkot illeszthetünk, a síkok összessége síksort szolgáltat. Evvel a sorozó *sugársort* és a nyert *síksort egymásra vonatkoztattuk.* A sugársor minden sugarához a síksornak egy és csak egy síkja tartozik, az a sík, mely az illető sugáron keresztül megy; továbbá a síksor minden síkjához a sugársor egy és csak egy sugara tartozik, az a sugár, mely az illető síkon rajta fekszik. A sugársornak és síksornak eme kölcsönösen egyértelmű egymásra való vonatkoztatása alapján azt mondhatjuk, hogy a *sugársor és a síksor egyenlő szerkezetű.*

Legyen a sorozó alapalakzat egy *pontsor* és legyen az alapalakzaton kívül adott elem egy *pont,* mely nem illeszkedik a pontsor sorozó egyenesére. A pontra és a pontsor egy-egy pontjára sugarat illeszthetünk, a sugarak összessége sugársort szolgáltat. Evvel a *pontsort* és a *sugársort egymásra vonatkoztattuk.* A pontsor minden pontjához a sugársor egy és csak egy sugara tartozik, az a sugár, mely az illető ponton keresztül megy; továbbá a sugársor minden sugarához — *egynek kivételével* — a pontsor egy és csak egy pontja tartozik, az a pont, mely az illető sugáron rajta fekszik. A kivételt alkotja a sugársornak az a sugara, mely a pontsor sorozójával parallel, ez a pontsor sorozóját nem metszi s így ehhez a sugárhoz megfelelő pont nincs.

Legyen a sorozó alapalakzat egy *pontsor* és legyen az alapalakzaton kívül adott elem egy *sugár,* mely nem illeszkedik a pontsor sorozójára. A sugárra és a pontsor egy-egy pontjára síkot illeszthetünk, a síkok összessége síksort szolgáltat. Evvel a sorozó *pontsort* és a nyert *síksort egymásra vonatkoztattuk.* A pontsor minden pontjához a síksor egy és csak egy síkja tartozik, az a sík, mely az illető ponton keresztül megy; továbbá a síksor minden síkjához — *egynek kivételével* — a pontsor egy és csak egy pontja tartozik, az a pont, mely az illető síkon rajta fekszik. A kivételt alkotja a síksornak ama síkja, mely a pontsor sorozójával parallel, ez a pontsor sorozóját nem metszi s így ehhez a síkhoz megfelelő pont nincs.

A sorozás e három példájából látjuk, hogy a pontsor, a síksor és a sugársor egyenlő szerkezetű, mert ez alakzatok között kölcsönös és egyértelmű vonatkozást létesíthetünk oly módon, hogy az egyik alakzat egy-egy elemének megfelelője a másik alakzat ama eleme, melyre az előbbi elem illeszkedik. Az alakzatok e vonatkozását *perspektív vonatkozásnak* nevezzük, ilyen viszonylagos helyzetű két alakzat pedig *perspektív helyzetű.* Mivel a *pontsor, síksor, sugársor* alapalakzatok közül bármelyik kettő perspektív vonatkozásba hozható, ezek az alapalakzatok egy osztályát alkotják, az *elsőfokú alapalakzatokat.*

Legyen a sorozó alapalakzat egy *pontsík* és legyen az alapalakzaton kívül adott elem egy *pont,* mely nem illeszkedik a pontsík síkjára. A pontra és a pontsík egy-egy pontjára sugarat illeszthetünk, a sugarak összessége sugárpontot szolgáltat. A sorozó *pontsík* és a származtatott *sugárpont perspektív helyzetű,* ha a pontsík egy pontjának megfeleltetjük a sugárpont ama sugarát, melyre a kérdéses pont illeszkedik. E perspektív vonatkozásban vannak kivételek. *A kivételt a sugárpont ama sugársorának sugarai alkotják, mely sugársornak síkja a pontsík síkjával parallel,* e sugársor sugarai a pontsík síkját nem metszik s így ezekhez a sugarakhoz megfelelő pontok nincsenek.

Legyen a sorozó alapalakzat egy *síkpont* és legyen az alapalakzaton kívül adott elem egy *sík,* mely nem illeszkedik a síkpont középpontjára. A síkra és a síkpont egy-egy síkjára sugarat illeszthetünk, a sugarak összessége sugársíkot szolgáltat. A sorozó *síkpont* és a származtatott *sugársík perspektív helyzetű,* ha a síkpont egy síkjának megfeleltetjük a sugársík ama sugarát, melyre a szóban lévő sík illeszkedik. E perspektív vonatkozásban van kivétel. *A kivételt alkotja a síkpont ama síkja, mely a sugársík síkjával parallel,* ez a sík a sugársík síkját nem metszi s így ehhez megfelelő sugár nincs.

A pontsíknak és sugárpontnak, illetőleg a síkpontnak és sugársíknak fenti perspektív vonatkoztatásával kimutattuk, hogy a két-két alapalakzat egyenlő szerkezetű. *A pontsík és síkpont egyenlő szerkezetét pedig kimutatjuk ez alakzatok felépítésével.* A pontsík felépíthető sugársorból oly módon, hogy annak minden sugarán pontot sorozunk; a síkpont szintén felépíthető sugársorból, ha annak minden sugarán síkot sorozunk. Tehát mindkét alakzatot felépítettük elsőfokú alapalakzatokból úgy, mint elsőfokú alapalakzatot elemekből. De evvel bebizonyítottuk, hogy *a pontsík, a síkpont, a sugárpont* és *a sugársík* egyenlő szerkezetű; ezek az alapalakzatok a *másodfokú alapalakzatok.*

A ponttért úgy állítottuk elő, hogy sugárpont sugarain pontot soroztunk; a síktért úgy állítottuk elő, hogy a sugársík sugarain síkokat soroztunk. Szóval másodfokú alapalakzat elemein elemeket soroztunk. Felépítésénél fogva e két alapalakzat egyenlő szerkezetű, de összetettebb szerkezetű, mint a másodfokú alapalakzatok, ezért a *ponttért és a síktért harmadfokú alapalakzatnak mondjuk.*

A sugártér sugarait úgy nyertük, hogy a pontsík pontjain sugarat soroztunk, tehát másodfokú alapalakzatokból — sugárpontokból — építettük fel úgy, mint másodfokú alapalakzatot — a pontsíkot — elemekből. Ez az alakzat tehát összetettebb szerkezetű, mint a harmadfokú alapalakzatok, azért *a sugártért negyedfokú alapalakzatnak mondjuk.*

Kimutattuk, hogy az *elsőfokú alapalakzatok,* melyek mindegyike végtelen sok elemmel bír, egyenlő szerkezetűek, ezekről a jövőben azt fogjuk mondani, hogy mindegyiknek *egyszerűen végtelen sok eleme* van. A felépítésnél fogva egy *másodfokú alapalakzatnak* egyszerűen végtelen sokszor egyszerűen végtelen sok, tehát összesen *kétszeresen végtelen sok eleme* van. Egy *harmadfokú alapalakzatnak* kétszeresen végtelen sokszor egyszerűen végtelen sok, tehát összesen *háromszorosan végtelen sok eleme* van. A *negyedfokú alapalakzatnak* kétszeresen végtelen sokszor kétszeresen végtelen sok, tehát összesen *négyszeresen végtelen sok eleme* van.

Az alapalakzatok elemeinek számát tekintve, az *elsőfokúakat egyméretűeknek, a másodfokúakat kétméretűeknek, a harmadfokúakat háromméretűeknek és a negyedfokút négyméretűnek mondjuk.*

7. §. A dualitás elve. Eddig tárgyalásainkban oly feladatokat intéztünk el, melyekben mindenkor térelemek illeszkedéséről volt szó. Oly feladatok, illetőleg geometriai tételek, melyekben kizárólag térelemek illeszkedési tényei szerepelnek, helyzetgeometriai feladatok. Az összes helyzetgeometriai feladatokat a már tárgyalt négy alapfeladattal oldjuk meg. A négy alapfeladatból, illetőleg a négy tételből alkothatjuk azoknak szembeállításával a következő tételpárokat:

Két pont A, B meghatározza az $\|AB\|$ egyenest, a két pont összekötő egyenesét.	*Két sík* **A**, **B** *meghatározza az* $\|\mathbf{AB}\|$ *egyenest, a két sík metsző egyenesét.*
Két illeszkedő egyenes a, b meghatározza az $[ab]$ síkot, a két egyenes összekötő síkját.	*Két illeszkedő egyenes a, b meghatározza az (ab) pontot, a két egyenes metszéspontját.*

Ha e tételpárokban az egyik tételben szereplő *pont, sík, egyenes, metszés, összekötés* stb. szavakat rendre helyettesítjük *sík, pont, egyenes, összekötés, metszés* stb. szavakkal, akkor mindenkor a szembenálló tételt nyerjük. Az alapoperációk e szembeállításával kifejezésre jutó elvet a *térbeli dualitás elvének* nevezzük. Minden tételhez, melyben csak a térelemek illeszkedésére vonatkozó tények jutnak kifejezésre, a dualitás elve szerint egy másik megfelelő tétel tartozik. Így az összekötési feladatok közül a harmadik, illetőleg negyedik feladat térbeli duálja, a harmadik, illetőleg negyedik metszési feladat.

Példaképpen álljon itt a következő geometriai tény: Ha egy egyenesre illeszkedő két sík egy pontra illeszkedő két sík, akkor az egyenesre illeszkedő minden sík a pontra illeszkedő sík. Térbeli duálja: *Ha egy egyenesre illeszkedő két pont egy síkra illeszkedő két pont, akkor az egyenesre illeszkedő minden pont a síkra illeszkedő pont.* Az utóbbi geometriai tényre igen sokszor fogunk hivatkozni.

Természetesen megtörténhetik, hogy egy tételből a dualitás segítségével levezetett másik tétel az elsővel azonos, legfeljebb a szavak sorrendje más. Pl. Két kitérő egyenes nem megy egy ponton keresztül és nincs oly sík, melyen a két egyenes rajta fekszik. Duál fogalmazásban: Két kitérő egyenes nincs rajt egy síkon és nincs oly pont, melyen a két egyenes keresztül megy. A legutóbbi tételt csak azért említettük, hogy lássuk a «rajta van» és «keresztül megy» szavaknak duál megfelelését. Általában, ha a jövőben a geometriában egy tételt nyerünk, akkor mielőtt e tétel duálját kimondanók, meg kell vizsgálnunk, nincs-e benne oly fogalom, mely nem épült fel az összekötés és metszés tényein. Ha ily fogalom szerepel, akkor előbb meg kell állapitani ennek duálját és csak azután szabad az eredeti tétel duálját tételként elfogadnunk.

A dualitás elvét bizonyítani nem lehet, ez egy az összekötés és metszés alapfeladatokban rejlő tulajdonság. Ebből következik, hogy a tárgyalt alapalakzatok mindegyikének van duálja. Duál alapalakzatok a pontsor és síksor, a sugársor és sugársor, a pontsík és síkpont, a sugársík és sugárpont stb., továbbá következik, hogy *a síkbeli rendszer és a pontbeli rendszer a térbeli rendszerben uralkodó dualitási elve szerint egymásnak megfelelő rendszerek.*

A térbeli rendszerben uralkodó dualitási elven kívül a síkbeli rendszerben és a pontbeli rendszerben külön-külön egy-egy dualitási elv mondható ki. A *síkbeli rendszerben* kétféle elemünk van, a pont és a sugár. Két pont összekötéséből sugarat, két sugár metszéséből pontot nyerünk. Az itt uralkodó *dualitás elve szerint pontnak sugár, sugárnak pont, összekötésnek metszés, metszésnek összekötés* stb. felel meg. A *pontbeli rendszerben* szintén kétféle elemünk van, a sík és a sugár. Két sík metszéséből sugarat, két sugár összekötéséből síkot nyerünk. Az itt uralkodó *dualitás elve szerint síknak sugár, sugárnak sík* stb. felel meg.

A síkbeli rendszer dualitása és a pontbeli rendszer dualitása a térbeli rendszer dualitási elve szerint megfelelők.

8. §. Végtelenben fekvő elemek. A pontsor és sugársor perspektív vonatkoztatásánál láttuk, hogy a sugársor minden sugarához, a pontsor sorozójával parallel egyenes kivételével, a pontsornak egy-egy megfelelő pontja tartozik. Ennek a parallel sugárnak a pontsoron megfelelő pontja nincs, a pontsornak tehát ezek szerint eggyel kevesebb pontja van, mint a sugársornak sugara. Ezt a hiányt megszüntetjük azáltal, hogy a pontsor pontjaihoz még egy pontot csatolunk. Azt fogjuk mondani, hogy *a sugársornak a pontsor sorozójával parallel sugara is messe a pontsor sorozóját egy és csak egy pontban.* Ha kizárólag a pontsor sorozó egyenesét és a sugársornak a sorozó egyenessel parallel egyenesét tartjuk szem előtt, akkor előbbi feltevésünkkel kijelentjük azt, hogy ezentúl *két parallel egyenes is metszi egymást egy és csak egy pontban.* Amennyiben az eddigi tárgyalásainkban szereplő pontokat végesben fekvő pontoknak mondjuk, úgy a pontsor sorozójára újonnan illesztett pont nem lehet végesben fekvő pont, mert a pontsornak minden végesben fekvő pontját a sugársor középpontjával összekötve, oly sugarat nyerünk, mely nem parallel a pontsor sorozójával. Ezt a pontsorhoz ily módon hozzácsatolt pontot, *a pontsor végtelenben fekvő pontjának* nevezzük. A pontsor és sugársor perspektív vonatkoztatásánál ez a végtelenben fekvő pont felel meg a sugársor ama sugarának, mely a pontsor sorozójával parallel.

Minden egyenesnek tehát egy, de csak egy végtelenben fekvő pontot tulajdonítunk. Ebből következik, hogy az egyenesnek bármely végesben fekvő pontjából kiindulva, akár az egyik értelemben, akár a vele ellenkező értelemben haladunk az egyenesen a végtelen felé, mindig egy és ugyanazon végtelenben fekvő ponthoz jutunk. Ennek további folyománya az, hogy az *egyenes pontsort a végtelenben fekvő pontjában összefüggőnek, tehát zárt alakzatnak kell tekintenünk.*

Valamely sík két tetszőleges parallel egyenesének közös végtelenben fekvő pontja van, és a sík bármely egyenese, mely az előbbiekkel parallel, ugyanarra a végtelenben fekvő pontra illeszkedik. Ezek szerint egy sík összes egyenesei, melyek az adott sík valamely egyenessel parallelek, *parallel sugársort* alkotnak, melynek középpontja a végtelenben van.

Bármely egyenes, mely valamely egyenessel parallel, azt annak végtelenben fekvő pontjában metszi. Tehát a tér összes egyenesei, melyek egy adott egyenessel parallelek, *parallel sugárpontot* alkotnak, melynek középpontja a parallal sugarak közös végtelenben fekvő pontja.

Parallel egyenesekről azt szoktuk mondani, hogy azoknak ugyanaz az irányuk, ennélfogva *az egyenes végtelenben fekvő pontját és az egyenes irányát azonos fogalmaknak tekintjük.*

Végtelenben fekvő pontot megadunk valamely egyenessel, amelyen rajta fekszik és amelyen ez a pont az egyenes végtelenben fekvő pontja.

Sokszor kívánatos lesz az egyenes végesben fekvő pontjainak és az egyenes egyetlen végtelenben fekvő pontjának egymástól való megkülönböztetése. A végesben fekvő pontokat valódi pontoknak, a végtelenben fekvő pontokat ideális pontoknak mondjuk.

A bevezetett ideális pontok alapján kijelenthetjük, hogy egy síkra illeszkedő két egyenesnek mindig van közös pontja, e pont parallel egyenesek esetében végtelenben fekvő pont. Továbbá egy pontra illeszkedő két egyenesnek mindig van összekötő síkja, akár valódi, akár ideális pont a két egyenes illeszkedési pontja. A most említett két példából látjuk, hogy az általunk említett alapfeladatokat egyes kivételektől mentesítettük. Amikor az egyenes pontjaihoz egy végtelenben fekvő pontot csatolunk, ugyanakkor ezen ideális pontról ugyanazon tulajdonságokat tételezzük fel, mint bármely más végesben fekvő pontról; e körülmény ránk nézve azt jelenti, hogy az összekötési és metszési feladatokat akkor is kell megoldani, ha az azokban szereplő valódi pontokat ideális pontokkal helyettesítjük. De az eddig bevezetett térelemekkel már az első összekötési feladatot sem tudjuk elvégezni, ha mindkét pont ideális pont.

Így a régebben és az újonnan felmerült kivételeknek megszüntetése végett az ideális ponton kívül be fogunk vezetni újabb ideális térelemeket. Ezeket az elemeket azonban bizonyos irányelvek alapján fogjuk bevezetni, melyeknek az új elemek eleget tartoznak tenni, különben nagyon könnyen megtörténhetnék, hogy az új elemekre vonatkozó tételek ellenmondásban állanak a valódi elemekre vonatkozó tételekkel.

Irányító elveink a következők lesznek: a) *A valódi pontokon és az egyenes iránya által jellemzett ideális pontokon kívül másfajta pontot nem vezetünk be.* b) *A még bevezetendő ideális elemek által ama tételek, melyek az összekötési és metszési feladatok következményei, mind kivételnélküliek legyenek.* Eme irányító elveken kívül figyelembe vesszük azt a geometriai tényt, mely szerint, «ha két pontja egy egyenesnek rajta van egy síkon, akkor az egyenesnek minden pontja rajta van a síkon, vagyis az egész egyenes».

Újabb ideális elemhez az első összekötési alapfeladat révén jutunk. Láttuk, hogy *két valódi pont* egy és csakis egy *valódi egyenest határoz meg,* a két pont összekötő egyenesét. Két valódi pont ideális egyenest nem határozhat meg, mert különben két pont két egyenest határozna meg, ami irányító elveinkkel ellenkezik. *Egy valódi pont és egy ideális pont* csak egy *valódi egyenest határoz meg.* T. i. a feladat átfogalmazásban annyit jelent, hogy az adott valódi pontra illesszünk egy adott irányú egyenessel parallel egyenest. E feladat megoldása ideális egyenes nem lehet, mert akkor megint két pont két egyenest határozna meg.

Két ideális pont összekötő egyenese valódi egyenes nem lehet, mert akkor a valódi egyenesnek két ideális pontja volna. Tehát két ideális pont összekötő egyenese csak ideális egyenes lehet. Az ideális egyenes nem lehet végesben fekvő egyenes, mert minden végesben fekvő egyenes egyúttal valódi egyenes, azért az ideális egyenest végtelenben fekvő egyenesnek is mondjuk. Az ideális egyenesnek nem lehet valódi pontja, mert az egyenesre illeszkedő valódi pont az ideális egyenest meghatározó ideális pontok bármelyikével valódi egyenest határoz meg. Ebből következik, hogy *két végtelenben fekvő pont összekötő egyenesének minden pontja végtelenben fekvő pont.*

Az ideális egyenesre vonatkozó eddigi eredményeink csak akkor nyernek igazolást, ha kimutatjuk, hogy *vannak különböző végtelenben fekvő pontok.* Két kitérő valódi egyenes egy-egy végtelenben fekvő pontot definiál, állítjuk, hogy e végtelenben fekvő pontok különbözők. Vegyünk fel a tér tetszőleges valódi pontjára illeszkedő és az adott kitérő egyenesekkel parallel egyeneseket. Utóbbi egyenesek mindegyike egy-egy végtelenben fekvő pontot definiál, e pontok a kitérő egyenesek által definiált pontokkal azonos pontok. Az illeszkedő egyenesekkel adott pontok a végtelenben egymástól különböző pontok, mert ha e pontok azonosak volnának, úgy ez az egy végtelenben fekvő pont és a két egyenes végesben fekvő illeszkedési pontja csak egyetlen valódi egyenest határozhatna meg, nem pedig kettőt. Tehát *végesben fekvő pontra illeszkedő különböző egyenesek végtelenben fekvő pontjai különböző pontok.*

Az összes végtelenben fekvő pontokat nyerjük, ha egy véges középpontú sugárpont összes sugarainak végtelenben fekvő pontjait vesszük.

Egy sík összes végtelenben fekvő pontjait nyerjük, ha egy a síkra illeszkedő véges középpontú sugársor sugarainak végtelenben fekvő pontjait vesszük.

Vegyük fel egy sík két különböző végtelenben fekvő pontját, e végtelenben fekvő pontok egy végtelenben fekvő egyenest határoznak meg, melynek minden pontja végtelenben fekvő pont. A végtelenben fekvő egyenes a síkra illeszkedő egyenes, hiszen a végtelenben fekvő egyenes két pontja a síkra illeszkedő két pont. A végtelenben fekvő egyenes tehát a sík egy végtelenben fekvő egyenese.

A sík egy végtelenben fekvő egyenese a sík minden valódi egyenesét egy-egy pontban metszi, mert egy síkra illeszkedő egyenesek; a metszéspont mindenkor a valódi egyenes egyetlen végtelenben fekvő pontja.

Legyen V_1, V_2, V_3 egy síknak három, egymástól különböző végtelenben fekvő pontja. Tegyük fel, hogy ezek nem illeszkednek ugyanazon végtelenben fekvő egyenesre, akkor $|V_1 V_2| = v_3$, $|V_2 V_3| = v_1$, $|V_3 V_1| = v_2$ a síkra illeszkedő három, egymástól különböző végtelenben fekvő egyenes. A sík egy tetszőleges végesben fekvő egyenese e három egyenest egy-egy végtelenben fekvő pontban metszi, e három pont általában egymástól különböző, legalább addig, míg a végesben fekvő egyenes nem parallel a végtelenben fekvő pontokat jellemző egyenesek egyikével sem. Feltevéseink szerint tehát a sík egy véges egyenesének három végtelenben fekvő pontja volna, ez lehetetlen, mert minden végesben fekvő egyenesnek csak egy végtelenben fekvő pontja van. Evvel kimutattuk, hogy *minden valódi síknak egy végtelenben fekvő egyenese lehet.* Vagyis *egy valódi sík összes végtelenben fekvő pontjai egy egyenesre illeszkedő, a sík egyetlen végtelenben fekvő egyenesére illeszkedő pontok.*

Két parallel sík végtelenben fekvő egyenese azonos, mert az egyik síkban felvett tetszőleges irányú egyenessel a másik síkban parallel egyenes vonható, ezeknek közös végtelenben fekvő pontjuk mindkét síkban fekszik, tehát *parallel síkok összes végtelenben fekvő pontjai közösek.* A tér összes síkjai, melyek egy adott síkkal parallelek, *parallel síksort* alkotnak, melynek tengelye a parallel síkok közös végtelenben fekvő egyenese.

Parallel síkokról azt szoktuk mondani, hogy azoknak ugyanaz az állásuk, ennélfogva *a sík végtelenben fekvő egyenesét és a sík állását azonos fogalmaknak tekintjük.*

Végtelenben fekvő egyenest megadunk egy sík által, amelyen rajta fekszik, amelyen tehát ez az egyenes a sík végtelenben fekvő egyenese.

A bevezetett végtelenben fekvő egyenes eddig megállapított tulajdonságai alapján tárgyalhatjuk végesben fekvő és végtelenben fekvő, illetőleg végtelenben fekvő egyenesek viszonylagos helyzetét. Végesben fekvő egyenes és végtelenben fekvő egyenes nem lehet két azonos egyenes, mert végesben fekvő egyenesnek csak egy végtelenben fekvő pontja van, míg a végtelenben fekvő egyenesnek minden pontja végtelenben fekvő pont. Végesben fekvő egyenes és végtelenben fekvő egyenes illeszkedő, amint azt láttuk, ha a végesben fekvő egyenes illeszkedik a végtelenben fekvő egyenest jellemző síkra, de illeszkedők akkor is, ha a végesben fekvő egyenes a végtelenben fekvő egyenest jellemző síkkal parallel. Ha a végesben fekvő egyenes a végtelenben fekvő egyenest jellemző síkot véges pontban metszi, akkor a két egyenes kitérő.

Két egymással *nem parallel sík két különböző végtelenben fekvő egyenest határoz meg.* A két végtelenben fekvő egyenes nem lehet azonos, mert ha azonos volna, akkor ez az egy egyenes és a két sík közös végesben fekvő egyenese, mint két metsző egyenes, csak egy végesben fekvő síkot határozna meg, holott két különböző síkból indultunk ki. Az összes végtelenben fekvő egyeneseket nyerjük, ha egy véges középpontú síkpont összes síkjainak végtelenben fekvő egyeneseit vesszük.

Két végtelenben fekvő egyenes azonos, ha a végtelenben fekvő egyeneseket jellemző síkok azonosak vagy parallelek. *Két végtelenben fekvő egyenes sohasem lehet kitérő.* T. i. az egyeneseket jellemző síkok végesben fekvő közös egyenese a végtelenben fekvő egyenesek mindegyikére illeszkedő egyenes, mivel a végtelenben fekvő egyenesek mindegyikével egy-egy síkra illeszkedik. A két sík közös egyenesének a végtelenben fekvő egyenesekkel való két metszéspontja nem lehet egymástól különböző, mert akkor a végesben fekvő egyenesnek két végtelenben fekvő pontja volna, ez pedig feltevésünkkel ellenkezik. Tehát *bármely két végtelenben fekvő egyenes metszi egymást.*

Ha végtelen sok egyenes közül bármely kettő metszi egymást, akkor ez egyenesek vagy mind egy ponton mennek keresztül, vagy mind egy síkra illeszkedő egyenesek. A tér összes végtelenben fekvő egyenesei is tehát vagy mind egy pontra, vagy mind egy síkra illeszkedő egyenesek. Amennyiben sikerül kimutatni három különböző végtelenben fekvő egyenesre vonatkozólag, hogy azok nem egy pontra illeszkedő egyenesek, akkor bebizonyítottuk, hogy az összes végtelenben fekvő egyenesek egy és ugyanabban a síkban, a tér végtelenben fekvő síkjában feküsznek.

Egy egyenesre nem illeszkedő három sík általános viszonylagos helyzetű, ha bármely kettőnek metszésvonala nem parallel a harmadikkal. Ez esetben a három síknak egy és csak egy közös pontja van és ez végesben fekvő pont.

Három általános viszonylagos helyzetű sík három, nem egy pontra illeszkedő végtelenben fekvő egyenest határoz meg, mert ha a három egyenesnek közös pontja volna, úgy ez a három síknak végtelenben fekvő közös pontja volna, ami feltevésünkkel ellenkezik.

Evvel bebizonyítottuk, hogy *a térnek valamennyi végtelenben fekvő egyenese — és* ezekkel együtt *a térnek valamennyi végtelenben fekvő pontja is — egy és ugyanabban a végtelenben fekvő síkban fekszik.* A térnek különben sem lehet két egymástól különböző végtelenben fekvő síkja, mert akkor minden egyenes, mely nem illeszkedik a két végtelenben fekvő sík metszésvonalára, evvel a két síkkal két egymástól különböző, természetesen végtelenben fekvő pontot határozna meg, ami ama feltevésünkkel, hogy az egyenesnek egy és csak egy végtelenben fekvő pontja legyen, ellenkezik.

Az e fejezetben *a térnek végtelenben fekvő elemeiről kifejtett feltevéseink* az alapalakzatok perspektív vonatkoztatásánál az elemek kölcsönösen egyértelmű megfelelését az ott fellépő kivételektől mentesitik, valamint megszüntetik az alapfeladatoknál a térelemek parallel helyzeteiből következő kivételeket. E feltevéseink *összefoglalását perspektív vagy projektív térszemléletnek nevezzük.*

Feladatok: Megoldandók a tárgyalt összekötési és metszési feladatok, ha a térelemek részben vagy egészben végtelenben fekvő térelemek.

*

Az I. fejezet némi kiegészítése annak az anyagnak, melyet középiskoláinkban sztereometria címen tárgyalunk. A most és az elemekből ismeretes sztereometria alapján fogjuk az ábrázoló geometriát felépíteni.

MÁSODIK FEJEZET.

ORTHOGONÁLIS PARALLEL PROJEKCIÓ KÉT KÉPSÍKON.

9. §. Az ábrázoló geometria. *Az ábrázoló geometria módszereket nyujt térbeli alakzatoknak térbeli vagy síkbeli alakzatokkal való helyettesítésére.* A tényleg megadott, esetleg csak elgondolt térbeli alakzatot, *eredeti alakzatnak,* a helyettesítő alakzatot, az eredeti *képének* fogjuk mondani.

Egy ábrázoló geometriai módszerrel szemben követelményeket támasztunk. A követelményeknek egy-egy csoportja kiválasztja a gyakorlatban leginkább használatos módszerek közül azt, melyet adott esetben alkalmazni fogunk. Mindenekelőtt felsoroljuk ama követelményeket, melyeket minden módszerrel szemben felállítunk, hogy a módszer célhoz vezessen. *E követelmények:* a) *a módszer adjon utasítást az eredeti alakzat képének szerkesztésére,* b) *az utasítás tegye lehetővé a képből az eredeti alakzat előállítását,* c) *a módszer legyen olyan, hogy az eredeti alakzat egyes tulajdonságaiból következtethessünk a kép egyes tulajdonságaira és a kép egyes tulajdonságaiból következtethessünk az eredeti alakzat egyes tulajdonságaira.*

Egy alakzatnak különböző módszerek szerint készített képei különbözők. A nyert képek között vannak olyanok, melyeknek szemlélete kisebb-nagyobb hűséggel az eredeti alakzatra emlékeztetnek. Oly kép, mely nagy hűséggel emlékeztet az eredetire, *képies;* minél nagyobb a hűség, annál képiesebb.

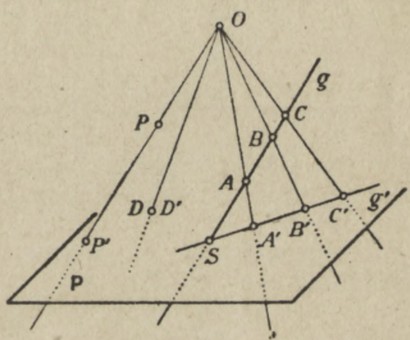
Az ábrázoló geometria valamilyen módszere szerint készített képnek képiessége nem szükséges, de kívánatos követelmény. A képiesség követelményének legjobban tesz eleget egy téralakzat ama képe, mely a téralakzat megtekintésénél szemünk ideghártyáján, a retinán keletkezik. Amennyiben tehát képies képet akarunk nyerni, a *látás processzus törvényeit* kell alkalmazni, de ezeket bonyolultságuknál fogva közvetlenül nem alkalmazhatjuk. Hogy e törvények geometriai szerkesztéseknél felhasználhatók legyenek, e törvényeket egyszerűsítjük, az egyszerűsített törvények alapján felépített ábrázoló geometriai módszer lesz alapja az ábrázoló geometriai módszerek egy csoportjának, *az elemi ábrázoló geometriai módszereknek.*

Ábrázolási módszerek.

10. §. Centrális projekció. A látás processzusának egyszerűsítése abban áll, hogy *a)* a szem lencséjét helyettesítjük a tér egy tetszőleges pontjával, ez a pont lesz a *vetítés középpontja,* röviden a *centrum,* jele: O, *b)* a retinát helyettesíti egy a vetítés középpontjára nem illeszkedő sík, ez a sík lesz a *képsík,* jele: **P**, *c)* a látósugarakat helyettesítjük a centrumra illeszkedő egyenesekkel, ezeket *vetítő sugaraknak* vagy *projiciáló sugaraknak* mondjuk. (1. ábra.)

A legegyszerűbb téralakzatnak, *a pontnak képe a képsík ama pontja, mely pontban az adott pontra illeszkedő vetítő sugár a képsíkot metszi.* A tér minden pontjához ilyen módon a képsík egy-egy meghatározott pontját rendeljük. A P pont képét P'-vel jelöljük. A képsík minden pontjának képe önmaga, a centrum képe határozatlan, azért a centrumot a tér pontjainak vetítésénél kikapcsoljuk.

Egyenes centrális projekciója az egyenesre illeszkedő pontok képeinek összessége. Az eredeti egyenes pontjaira illeszkedő vetítő sugarak sugársort alkotnak, a sugársor síkja az eredeti egyenes és centrum összekötő síkja, röviden *az eredeti egyenes vetítő síkja, a* sugársor sorozó pontja a vetítési centrum. E sugársor minden sugara az eredeti egyenes vetítő síkjára illeszkedő egyenes, mert minden vetítő sugár két pontja illeszkedik az egyenes vetítő síkjára, az egyik pont a centrum, a másik pont a vetítő sugár és eredeti egyenes metszéspontja. Ebből következik, hogy egy egyenes pontjainak képei egy egyenes pontsor pontjai, a pontsor sorozó egyenese az eredeti egyenes vetítő síkjának és képsíknak metszésvonala, ez az egyenes az eredeti egyenes képe. Mindezek alapján a centrális projekció egy fontos tételét nyerjük, nevezetesen: *egyenes képe egyenes, egyenesre illeszkedő pont képe az egyenes képére illeszkedő pont.*



1. ábra.

Az eredeti egyenes és képsík metszéspontját az egyenes *nyompontjának* nevezzük és rendesen S betűvel jelöljük. Egy egyenes képe mindig az egyenes nyompontjára illeszkedő egyenes, mert a nyompont képe önmaga. *Képsíkkal parallel egyenes képe* az eredeti egyenessel parallel egyenes, mert az egyenes képe az eredeti egyenes vetítő síkjában van és keresztül megy az eredeti egyenes végtelenben fekvő pontján, az egyenes nyompontján, tehát *az eredeti egyenessel parallel egyenes.*

Vetítő sugár bármely pontjára illeszkedő vetítő sugár önmaga, tehát ha a vetítési középpont képétől eltekintünk, minden *vetítő sugár képe egy pont,* a vetítő sugár és képsík metszéspontja.

11. §. Klinogonális parallel projekció. A szűkebb értelemben vett centrális projekció egy változatát nyerjük, ha a vetítési középpontot nem a végesben, hanem a végtelenben választjuk. A centrumot ez esetben mint a képsíkkal szemben általános helyzetű egyenes végtelenben fekvő pontját adjuk meg. A vetítő sugarak egy parallel sugárpont sugarai. Pont képét, egyenes képét ugyanúgy szerkesztjük meg, mint a kezdetben tárgyalt centrális projekcióban; ekkor a pontot, egyenest ferdén vetítjük a képsíkra.

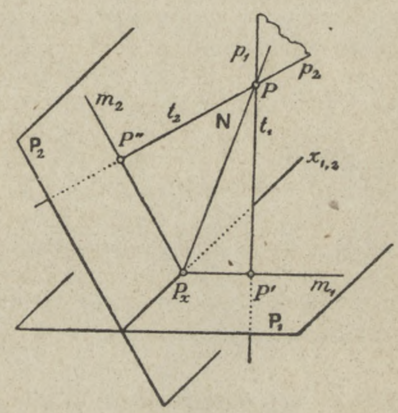
12. §. Orthogonális parallel projekció. A parallel projekció egy válfaját nyerjük, ha a végtelenben fekvő vetítési középpontot úgy választjuk, hogy az egy a képsíkra merőleges egyenes egyetlen végtelenben gondolt pontja. E szerint egy pont képét úgy nyerjük, hogy meghatározzuk a pontra illeszkedő és a képsíkra merőleges egyenes és képsík metszéspontját, e metszéspont az eredeti pont orthogonális projekciója.

Az eddig tárgyalt ábrázoló geometriai módszerek szerint nyert pont vagy egyenes képéből nem következtethetünk az eredeti pont vagy eredeti egyenes helyzetére. A pont képe csak a projiciáló sugarat határozza meg, e sugár minden pontjának képe a projiciáló sugár és képsík metszésponja. Az egyenes képe csak a projiciáló síkot határozza meg, e sík minden egyenesének képe a projiciáló sík és képsík metszésvonala. Röviden: e módszerek egyike sem alkalmas a térbeli alakzat rekonstrukciójára. A felsorolt módszerek mindegyikét alkalmas módon kiegészíthetjük, hogy egy-egy alakzat képéből rekonstruálható legyen. Egyelőre csak az orthogonális parallel projekció módszerével fogunk foglalkozni, mert ez bizonyos szempontból a legegyszerűbb, nevezetesen a felvett képsík ez esetben a vetítési középpontot már egyértelműen meghatározza.

13. §. Kótás projekció. A kótás projekcióban egy pont képét úgy szerkesztjük meg, mint az orthogonális parallel projekcióban, de a pont képéhez egy számot írunk, a pont kótáját. E szám jelenti egy előre megválasztott hosszegység mellett, hogy az eredeti pont a képsíktól hány egységnyi távolságban van. A kótázott képből két eredeti pont rekonstruálható, e kétértelműséget megszüntetjük, ha a kótát előjellel látjuk el. A rendesen vízszintes helyzetben gondolt képsík fölött fekvő pontok képeit pozitív kótával, a képsík alatt fekvő pontok képeit negatív kótával látjuk el. A kótás projekcióval részletesebben egy későbbi fejezetben fogunk foglalkozni.

14. §. Orthogonális parallel projekció két képsíkon. E módszer neve is mutatja, hogy az orthogonális parallel projekciót oly módon egészítjük ki, hogy *egy* képsík helyett *két* képsíkot vezetünk be, evvel természetesen két vetítési középpontot is vezetünk be, egy-egy vetítési középpont egy-egy képsíkra merőleges egyenes végtelenben fekvő pontja.

A két képsík közül az egyiket első képsíknak mondjuk, jele: $\mathbf{P}_1$, a másikat második képsíknak mondjuk, jele: $\mathbf{P}_2$. A két képsík metszésvonala a két képsíkból álló képsíkrendszer tengelye, a projekció tengelye, jele: $x_{1,2}$. Az első képsíkra merőleges egyeneseket *első vetítő sugaraknak,* a második képsíkra merőleges egyeneseket *második vetítő sugaraknak mondjuk. A tér minden pontjához két kép tartozik,* egy P pontra illeszkedő első vetítő sugár az első képsíkot a pont első képében, a P pontra illeszkedő második vetítő sugár a második képsíkot a pont második képében metszi. A P pont első képének jele P', a második képnek jele P''. A két képsík adott viszonylagos helyzete mellett egy pont megszerkesztett két képéből az eredeti megszerkeszthető, az első képre illeszkedő első vetítő sugár és a második képre illeszkedő második vetítő sugár metszéspontja a keresett pont. (2. ábra.) Egy pont első képét az első képsíkban, második képét a második képsíkban nem vehetjük fel tetszőlegesen, mert a választott első képre illeszkedő első vetítő sugár, és a választott második képre illeszkedő második vetítő sugár általában kitérő egyenesek, tehát egy eredeti pontot nem határoznak meg. *Egy pont első és második képe helyzeti feltételhez van kötve,* ezt fogjuk megállapítani. Vezessük be a következő jelöléseket: a P pontra illeszkedő első vetítő sugár legyen p_1, a második vetítő sugár legyen p_2, e kettő összekötő síkja legyen **N**. Az első képsík, a második képsík és az **N** sík párosával egy-egy egyenesben metszik egymást. Legyen **N** és $\mathbf{P}_1$ metszésvonala m_1, **N** és $\mathbf{P}_2$ metszésvonala m_2, $x_{1,2}$ pedig a két képsík metszésvonala. A három metszésvonal a tengely egy pontjára illeszkedik, legyen ez P_x. A p_1 vetítő sugár az első képsík minden egyenesére merőleges, tehát az m_1 és az $x_{1,2}$ egyenessel derékszöget alkot. A p_2 vetítő sugár a második képsík minden egyenesére merőleges, tehát az m_2 és $x_{1,2}$ egyenessel derékszöget alkot. E szerint az $x_{1,2}$ egyenes az **N** síkra merőleges, mert az **N** síkra illeszkedő két egyenessel, a két vetítő sugárral derékszöget alkot, de akkor a tengely az **N** sík minden egyenesével derékszöget alkot, tehát az m_1 és az m_2 egyenesekkel is, a tengely még merőleges a P és P_x pontok összekötő egyenesére is, ez az egyenes is az **N** sík egy egyenese. Szóval a P pontból a tengelyre merőleges és a tengelyre illeszkedő egyenes metszéspontja a P_x pont, ezért ezt a pontot a P pont tengelyprojekciójának mondjuk. Az adott pont tengelyprojekciójára illeszkedő m_1 egyenes merőleges a tengelyre és egy pontja az eredeti pont első képe; az adott pont tengelyprojekciójára illeszkedő m_2 egyenes merőleges a tengelyre és egy pontja az eredeti pont második képe. A tér egy pontjának két képe nem független egymástól, *az első és második képből a tengelyre állított merőlegesek* az első, illetőleg második képsíkban *a tengelyt egy* és ugyanazon *pontban metszik,* a pont tengelyprojekciójában.



2. ábra.

Térelemek ábrázolása. Összekötési feladatok.

A pont.

15. §. A pont. Az előző fejezetben az orthogonális parallel projekciót két képsíkon tárgyaltuk, a két képsík viszonylagos helyzete tetszőleges volt. Megállapodunk abban, hogy ezentúl *a két képsíkot egymásra merőleges helyzetben választjuk,* legyen továbbá az első képsík mindig vízszintes sík, akkor megállapodásunk szerint a második képsík a tér egy függélyes síkja.

Az eredeti pont, a pont első képe, a pont második képe és a pont tengelyprojekciója egy derékszögű parallelogramma négy csúcspontja, e parallelogramma a pont projiciáló parallelogrammája. A parallelogramma $PP' = t_1$ oldala a pontnak az első képsíktól való távolsága, röviden a pont első távolsága. $PP'' = t_2$ oldala a pontnak a második képsíktól való távolsága, röviden a pont második távolsága. $P'P_x = y_{1,2}$ a pont első rendezője, $P''P_x = y_{2,1}$ a pont második rendezője. A rendezőknél alkalmazott két index közül az első jelzi, hogy az melyik képsíkban van, a második mutatja, hogy az melyik távolsággal egyenlő, így $y_{2,1} = t_1$, $y_{1,2} = t_2$.

A pont első képe és első távolsága az eredeti pontot kétértelműen határozza meg, további megállapodásokkal ezt a kétértelműséget megszüntetjük. A két képsík közös egyenese az első képsíkot, ha azt végtelenben fekvő egyenesével határoltnak gondoljuk, két félképsíkra bontja, az első képsík egyik fele legyen az első képsík pozitív fele, az első képsík másik fele legyen az első képsík negatív fele. Ugyanúgy az $x_{1,2}$ tengely a második képsíkot szintén két félképsíkra bontja, legyen az első képsík fölötti a második képsík pozitív fele, az első képsík alatti a második képsík negatív fele. Egy-egy képsík fele és a tér végtelenben fekvő síkja egy térrészt határol, így az egész terünket a két képsík és a végtelenben fekvő sík négy térrészre bontja. A végtelenben fekvő sík, továbbá

az első képsík pozitív fele, $+\mathrm{P}_1$ és a második képsík pozitív fele, $+\mathrm{P}_2$, határolja az I.,

az első képsík negatív fele, $-\mathrm{P}_1$ és a második képsík pozitív fele, $+\mathrm{P}_2$, határolja a II.,

az első képsík negatív fele, $-\mathrm{P}_1$ és a második képsík negatív fele, $-\mathrm{P}_2$, határolja a III.,

az első képsík pozitív fele, $+\mathrm{P}_1$ és a második képsík negatív fele, $-\mathrm{P}_2$, határolja a IV.,

térrészt. A tér minden pontja, amennyiben a képsíkokra illeszkedő pontokat egyelőre nem vesszük figyelembe, egy-egy térrészben fekszik, ilyen módon beszélhetünk egy első, második, harmadik vagy negyedik térrészben fekvő pontról. Egy ponthoz tartozó két rendezőt előjellel látjuk el; oly rendező, mely egy képsík pozitív felén van, a pont pozitív rendezője, ha a rendező valamely képsík negatív felére esik, akkor ez a rendező negatív. Megállapodunk továbbá abban, hogy amilyen előjelű a rendező, ugyanolyan előjelű legyen a rendezővel egyenlő első, illetőleg második távolság. E szerint egy pont első rendezője nemcsak nagyságra, hanem előjelre nézve is megegyezik a pont második távolságával stb. A következő táblázat mutatja a különböző térrészekben fekvő pontok rendezőinek és távolságainak előjeleit:

A pont fekszik	y_{12}	y_{21}	t_1	t_2
az I. térrészben	+	+	+	+
a II. «	−	+	+	−
a III. «	−	−	−	−
a IV. «	+	−	−	+

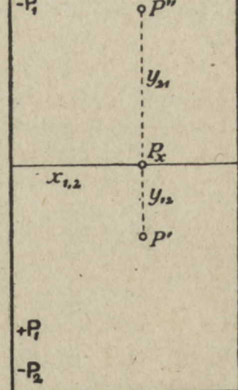
Ezek szerint minden első képsík fölött fekvő pont első távolsága pozitív, az első képsík alatt fekvő pont első távolsága negatív stb.

Képsíkra illeszkedő pont egyik rendezője eltűnik; az első képsíkra illeszkedő pont második rendezője és a második képsíkra illeszkedő pont első rendezője nulla. Képsíkra illeszkedő pont két térrész egy határpontja. A tengelyre illeszkedő pont mindkét rendezője, mindkét távolsága nulla; tengelyre illeszkedő pont a négy térrész egy közös határpontja.

A két képsíkból álló képsíkrendszert az ú. n. felezősíkokkal kiegészítjük. Az első felezősík, W_1, az első és harmadik térrészt felezi; a második felezősík, W_2, a második és negyedik térrészt felezi. Az első felezősíkban fekvő pont két rendezője előjelre és nagyságra nézve egyenlő, a második felezősíkban fekvő pont két rendezője előjelre nézve különböző, de nagyságra nézve egyenlő.

Egy képsíkon való ábrázolásnál a rendelkezésünkre álló rajzlapsíkot, hacsak az ellenkezőjét nem jelentjük ki, az adott képsíkkal azonosítjuk. Két képsíkon való ábrázolásnál csak az egyik képsíkot azonosíthatjuk a rajzlapsíkkal. E szerint azt mondhatjuk, hogy az első képsík a rajzlapsík és a második képsík rája merőleges; vagy azt mondhatjuk, hogy a második képsík a rajzlapsík és az első képsík rája merőleges. Minden esetben a rajzlapsíkra merőleges képsíkot szintén egyesíteni kell a rajzlapsíkkal, mert csak egy rajzlapsíkot tételezünk fel. Az egyesítésnél ügyelni fogunk arra, hogy a rendezők megismert törvénye, mely szerint egy pont két rendezőjének közös végpontja, a pont tengelyprojekciója és a rendezők egyenesei a tengelyre merőlegesek, ne változzék. A tengelyprojekciók változatlansága megköveteli, hogy a két képsík egyesítése a tengely körüli forgatással történjék. A forgatással történt egyesítésnél vagy az egyező előjelű félképsíkok vagy a különböző előjelű félképsíkok kerülnek födésbe. Megállapodunk abban, hogy az egyesítést mindig úgy gondoljuk végrehajtva, hogy *az ellenkező előjelű félképsíkok kerüljenek födésbe.* Akár az első képsík a rajz síkja és abba forgatjuk a második képsíkot, akár a második képsík a rajz síkja és abba forgatjuk az első képsíkot, az eredmény ugyanaz; egy eredeti pont két rendezője az egyesítés után egy a tengelyre merőleges egyenesre esik, a két rendező közös végpontja a tengely és rendezők közös egyenesének metszéspontja. Eredmény: *A képsíkok fent vázolt egyesítése után egy pont első és második képének összekötő egyenese merőleges a tengelyre,* a rendezők ez egyenese a tengelyt a pont tengelyprojekciójában metszi.

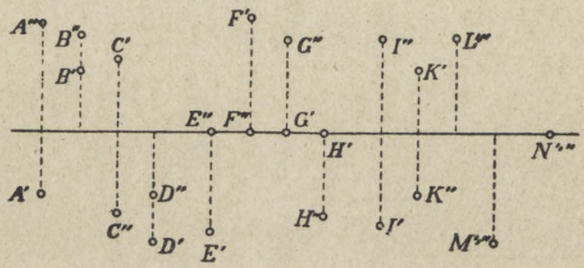
A történt megállapodások bármely térrészben, bármely képsíkban, bármely felező síkban fekvő pont ábrázolására képesítenek. Így ha az első térrészben fekvő pontot kívánunk ábrázolni, felvesszük az $x_{1,2}$ tengelyt (rendesen vízszintes egyenes) és erre merőlegesen a rendezők egyenesét, ezen az első képsík pozitív részében a pont első képét és ugyancsak ezen a második képsík pozitív részében a pont második képét. (3. ábra.) A két képével adott pontot természetesen rekonstruálni kell. Ha a rajz síkja függélyes, akkor az $x_{1,2}$ tengelyre illeszkedő víz-



3. ábra.

szintes sík a rekonstruált első képsík, e síkba visszaforgatjuk a pont felvett első projekcióját, az így nyert pont lesz az eredeti első kép, az eredeti második kép azonos a rajz síkjában felvett második képpel. A rekonstruált első képre illeszkedő első vetítő sugár és a második képre illeszkedő második vetítő sugár közös pontja a keresett eredeti pont. Ha a rajz síkja vízszintes, akkor ez maga az első képsík, az $x_{1,2}$ tengelyre illeszkedő függélyes sík az eredeti második képsík stb.

A 4. ábrában 13 pont két képét látjuk és pedig:



4. ábra.

A', A''	az I.	térrészben fekvő	A pont,
B', B''	a II.	« «	B «
C', C''	a III.	« «	C «
D', D''	a IV.	« «	D «
E', E''	az I.	képsík pozitív részében fekvő	E pont,
F', F''	az I.	« negatív « «	F «
G', G''	a II.	« pozitív « «	G «
H', H''	a II.	« negatív « «	H «
I', I''	az I.	térrészben, az első felező síkban fekvő	I pont,
K', K''	a III.	« « « « « «	K «
L', L''	a II.	« a második « « «	L «,
M', M''	a IV.	« a « « « «	M «
N', N''	az $x_{1,2}$	tengelyre illeszkedő	N pont két képe.

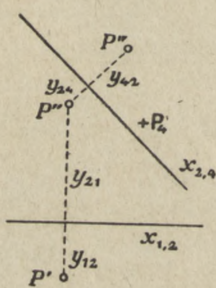
16. §. A pont transzformációja. Az I., II., III. vagy IV. térrészben fekvő pontról azt fogjuk mondani, hogy egy-egy ilyen pont a két képsíkból álló képsíkrendszerrel szemben általános helyzetű pont; képsíkra avagy felezősíkra illeszkedő pontról azt fogjuk mondani, hogy az különleges helyzetű pont. Nemcsak a pont, hanem más térelem, sőt téralakzat is lehet a két képsíkból álló képsíkrendszerrel szemben általános és speciális helyzetű. Mint majd később látni fogjuk, térelemekre, téralakzatokra vonatkozó feladatok konstruktív kivitele lényegesen egyszerűbb, ha a feladatban szereplő egyes térelem valamelyik képsíkkal szemben speciális helyzetű. Így felmerül annak szükségessége, hogy egy alakzat megadott két képéből az alakzat új képét egy új képsíkon előállítsuk. Egy tetszőleges sík az általunk felvett két képsíkkal szemben általános helyzetű, nevezetesen egyikre sem merőleges, tehát egyikkel sem alkothat két képsíkból álló képsíkrendszert. Az új képsík csak akkor alkot a meglévő két képsík valamelyikével képsíkrendszert, ha az az első vagy második képsíkra merőleges. Legközelebbi feladatunk két képével adott pont új képének szerkesztése valamely képsíkra merőleges új képsíkon.

Tegyük fel, hogy az új képsík, a negyedik képsík, a második képsíkra merőleges; ekkor az első és második képsík együttesen a régi képsíkrendszer, a második és negyedik képsík együttesen az új képsíkrendszer. A két képsíkrendszerben a második képsík közös képsík, ezt a felvett esetben megmaradó képsíknak, míg az első képsíkot elhagyandó képsíknak fogjuk mondani. Ennek megfelelően egy adott pontnak az első képsíkra illeszkedő első rendezőjét elhagyandó, a második képsíkra illeszkedő második rendezőjét megmaradó régi második rendezőnek mondjuk. A pont első képe az elmaradó kép, második képe a megmaradó kép, negyedik képe az új képsíkon az új kép. A negyedik képsík helyzetére nézve adott, ha megadjuk azt az egyenest, melyben az új képsík a második képsíkot metszi, ez az egyenes az új tengely, jele $x_{2,4}$ míg az $x_{1,2}$ tengely az elhagyandó tengely.

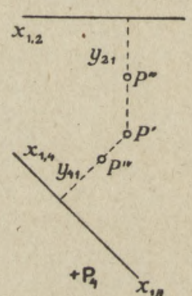
A tér P pontjának új képe a P pontból a negyedik képsíkra bocsátott merőleges egyenesnek, a pont negyedik vetítő sugarának, metszéspontja a negyedik képsíkkal. Jele P^{IV}. P pontnak távolsága a negyedik képsíktól a pont negyedik távolsága, jele: t_4. A negyedik képsíkon a pont negyedik képéből az új tengelyre bocsátott merőleges az új tengelyt a pont új tengelyprojekciójában metszi, e pont azonos a pont második képéből a második képsíkban az új tengelyre bocsátott merőleges és új tengely metszéspontjával. Az új tengelyprojekció és a pont negyedik képével határolt távolság a pont negyedik rendezője, az új negyedik rendező, $y_{4,2}$; az új tengelyprojekció és a pont második képével határolt távolság a pont új második rendezője, $y_{2,4}$. Az új második rendező nagysága az új tengely választásától függ, míg az új negyedik rendező nagysága állandó, egyenlő a pont második távolságával, vagy a pont első rendezőjével. Az új negyedik rendezőt előjellel látjuk el, megállapodunk abban, hogy előjele a pont második távolságának előjelével, vagy a pont első rendezőjének előjelével legyen egyenlő. Az új és az elhagyandó képsíkot a megmaradó képsík két-két félképsíkra bontja, továbbá a megmaradó képsík és a végtelenben fekvő sík terünket két féltérre osztja. A negyedik rendező előjelére vonatkozó megállapodás következménye, hogy az új képsík és elhagyandó képsík ama két félsíkja egyező előjelű, mely félsíkok a megmaradó képsík által keletkezett féltérrészek egyikében vannak. A tárgyalt esetben a negyedik képsík pozitív fele a második képsík előtt van, ha az első képsík pozitív fele szintén a második képsík előtt van. A megmaradó képsík egyik felének sincs még előjele, ama előjelek érvényessége megszűnik, melyekkel a régi tengely alapján a második képsík egy-egy félsíkját elláttuk.

Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a megmaradó képsík egyúttal a rajz síkja, akkor most is az új képsíkot a rajz síkjával kell egyesíteni, az egyesítést ugyanúgy végezzük, mint első és második képsík esetében, az új képsíkot az új tengely körül forgatjuk addig, míg a két képsík födésbe kerül. Ezt a forgatást mindig kétfélekép végezhetjük, mert az új képsík a megmaradó képsíkkal két szögrészt alkot és a forgatást hol az egyik, hol a másik szögrészben végezhetjük. Az új képsík forgatásának két lehetősége miatt az egyesítés után jelezni kell azt, hogy az új képsík pozitív fele az új tengely melyik oldalán van, ezt megállapodás szerint úgy jelezzük, hogy az új tengely mellé azon az oldalon, mely oldalra az egyesítés után a negyedik képsík pozitív fele esik, $+P_4$-et írunk. Az egyesítés mikéntje dönti el, hogy a megmaradó képsík melyik fele pozitív, illetőleg negatív. Első és második képsík esetében az ellenkező előjelű félképsíkokat egyesítettük, ezt most is követjük, tehát az egyesítés után a negyedik képsík pozitív fele azonos a megmaradó képsík negatív felével és ugyanakkor a negyedik képsík negatív fele azonos a megmaradó képsík pozitív felével.

Az elmondottak alapján a rajz síkjában két képével adott pont új képét meg tudjuk szerkeszteni azon feltétellel, hogy az új tengellyel adott új képsíkot a rajz síkjával egyesítettük (l. 5. ábrát). A pont megmaradó képéből merőlegest bocsátunk az új tengelyre, ez az egyenes a második kép és negyedik kép összekötő egyenese, erre az egyenesre az új tengelytől számítva felrakjuk az elhagyandó rendezőt nagyságra és értelemre nézve, vagyis ha az elhagyandó rendező az első képsík pozitív, illetőleg negatív oldalán volt, akkor



5. ábra.



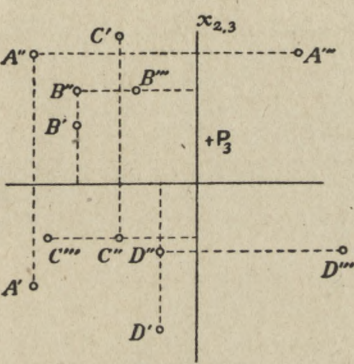
6. ábra.

a vele nagyságra és értelemre nézve mindig egyenlő negyedik rendezőt a negyedik képsík pozitív, illetőleg negatív oldalán helyezzük el.

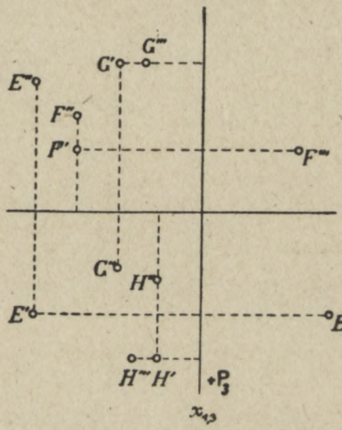
A pont tárgyalt transzformációjánál azt az esetet tartottuk szem előtt, hogy az új képsík a második képsíkra merőleges. Az új képsík az első képsíkra is lehet merőleges, ekkor az új képsík az első képsíkkal alkot két képsíkból álló képsíkrendszert. A megmaradó képsík az első képsík, az elhagyandó képsík a második képsík. Az új negyedik rendező nagyságra és értelemre nézve egyezik a második rendezővel (lásd 6. ábrát).

17. §. A harmadik képsík. Egy az $x_{1,2}$ tengelyre merőleges sík, röviden profil sík is lehet új képsík, megállapodunk abban, hogy ha az új képsík profil sík, ezt harmadik képsíknak mondjuk. A harmadik képsík mindkét képsíkra merőleges, tehát úgy az első, mint a második képsíkkal alkothat két képsíkból álló új képsíkrendszert. Amennyiben a harmadik képsík és az első képsík alkot új, két képsíkból álló képsíkrendszert, a harmadik képsíkot a harmadik és első képsík közös egyenese, $x_{1,3}$ új tengely körül forgatjuk addig, míg az első képsíkkal összeesik, a megmaradó képsík az első, az elhagyandó képsík a második képsík. Amennyiben a harmadik képsík és a második képsík alkot új, két képsíkból álló képsíkrendszert, a harmadik képsíkot a harmadik és második képsík közös egyenese, $x_{2,3}$ új tengely körül forgatjuk addig, míg a második képsíkkal összeesik, ekkor a megmaradó képsík a második képsík, az elhagyandó képsík az első képsík.

A 7. ábrában látjuk az A, B, C, D pontok harmadik képeit megszerkesztve azon feltétel mellett, hogy a harmadik képsík a második



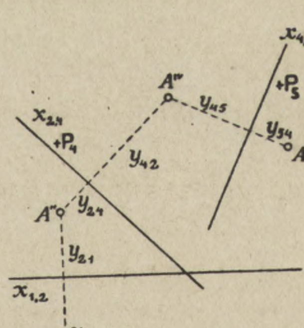
7. ábra.



8. ábra.

képsíkkal van egyesítve. A 8. ábrában az E, F, G, H pontok harmadik képei azon feltétel mellett vannak megszerkesztve, hogy a harmadik képsík az első képsíkkal van egyesítve.

Adott két képsík esetében az első vagy második képsíkra merőleges új képsíkot vezettünk be, az eredeti két képsíkból álló képsíkrendszerből áttértünk egy úgy képsíkrendszerre, a megmaradó és új képsíkból álló képsíkrendszerre. Az új képsíkrendszerből egy további új képsíkrendszerre térhetünk át, ha a negyedik képsíkra merőleges új képsíkot vezetünk be, egy ötödik képsíkot. Ekkor az előbbi megmaradó képsík lesz az elhagyandó képsík, a megmaradó képsík a negyedik képsík, az új képsík az ötödik képsík. A pont új ötödik rendezője nagyságra és értelemre nézve egyezik a pont negyedik távolságával. Ha a negyedik képsík a második képsíkra merőleges volt, akkor $y_{54} = y_{24}$, vagyis az ötödik rendező egyenlő a pont második képének és az $x_{2,4}$ tengely közti távolsággal. A 9. ábra mutatja két képével adott pont negyedik és ötödik képének szerkesztését. Megemlítésre méltó fontos eredmény, hogy az ötödik képsík az eredetileg felvett első és második képsíkkal szemben általános helyzetű.



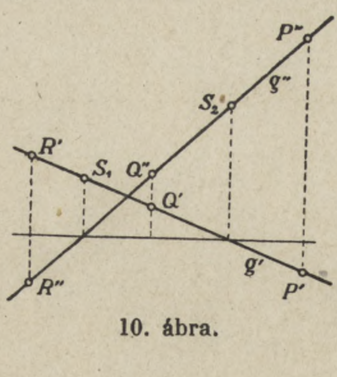
9. ábra.

Az egyenes.

18. §. Az egyenes. A tér egy tetszőleges g egyenesének első, illetőleg második képe az egyenesre illeszkedő pontok első, illetőleg második képeinek összessége. Az egyenes pontjaira illeszkedő első, illetőleg második vetítő sugarak az egyenesre illeszkedő első képsíkra merőleges, illetve második képsíkra merőleges síkban vannak, e síkokat az egyenes első, illetőleg második vetítő síkjának mondjuk. *Az egyenes első vetítő síkjának és az első képsíknak metszésvonala az egyenes első képe, az egyenes második vetítő síkjának és a második képsíknak metszésvonala az egyenes második képe,* mert az egyenesre illeszkedő tetszőleges vetítő sugár az egyenes vetítő síkjára illeszkedő egyenes, s így a vetítő sugár a képsíkot csak oly pontban metszheti, mely pont a vetítő sík és képsík metszésvonalán van. Eredmény: *Egyenesre illeszkedő pont képe az egyenes képére illeszkedő pont.* Képeivel adott egyenesen pontot úgy veszünk fel, hogy a pont első képét az egyenes első képén, a pont második képét az egyenes második képén vesszük fel és természetesen tekintettel vagyunk arra, hogy a két kép összekötő egyenese merőleges legyen a tengelyre.

19. §. Az egyenes rekonstrukciója. Egyesített két képsík mellett vegyük fel az egyenes első és második képét egészen tetszőlegesen, ekkor a két projekció az egyenest egyértelműen határozza meg a térben. Az eredeti egyenest úgy nyerjük, hogy a két képsík egyesített helyzetét megbontjuk, az egyik képsíkot a benne levő egyenes projekcióval együtt a tengely körül kilencven fokkal elforgatjuk, az egyenes első képe meghatározza az egyenes első vetítő síkját, az egyenes második projekciója meghatározza az egyenes második vetítő síkját, a két vetítő sík közös egyenese a keresett eredeti egyenes. Az egyenest rekonstruálhatjuk rajta fekvő két pontjával. Felveszünk az egyenesen két pontot, a pontok rekonstruáltjainak összekötő egyenese a keresett eredeti egyenes. Eredmény: *Egy egyenes két képe a képsíkok egyesítése után két egymástól független egyenes.*

20. §. Az egyenes nyompontjai. (10. ábra.) Két képével adott egyenesen különböző térrészekben fekvő pontokat vehetünk fel. Így a 10. ábrában felvett egyenesen az első térrészben, a második térrészben és a harmadik térrészben vehetünk fel pontot. Az egyenesnek negyedik térrészben fekvő pontja nincs. Általában a két képsíkkal szemben általános helyzetű egyenesen csak oly pontokat vehetünk fel, melyek csak három térrészben vannak; nincs oly egyenes, melyre illeszthető pontok közül a négy térrész mindegyikében volnának pontok. Az egyenesen pontrégiókat különböztetünk meg, egy-egy régió pontjai más más térrész-

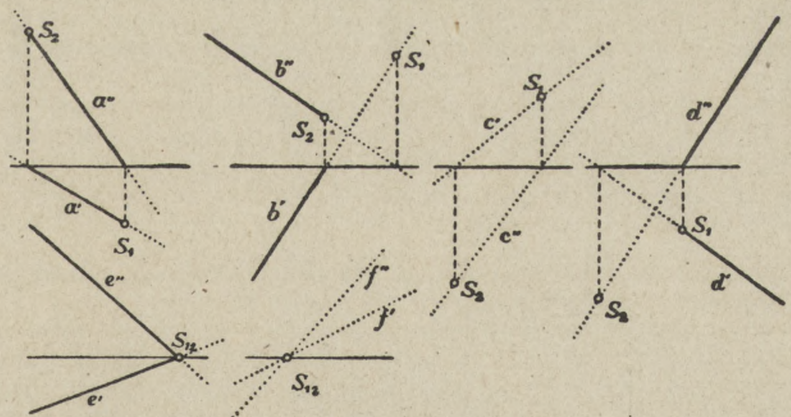


10. ábra.

ben vannak, a régiókat elválasztó pontokat, az egyenes és képsíkok metszéspontjait, az egyenes nyompontjainak nevezzük. Az egyenes első nyompontja az egyenes és első képsík metszéspontja. Az első képsíkra illeszkedő minden pont második képe a tengelyben van, tehát az első nyompont második képe az egyenes második képére és a tengelyre illeszkedő pont, e pontra illeszkedő rendező kimetszi az egyenes első képéből az első nyompont első képét, jele: S_1. Hasonló okoskodással nyerjük az egyenes második nyompontját. Az egyenes nyompontjai a képeivel adott egyenes eredetijének megállapításánál előnyösen felhasználhatók. T. i. képsíkokra illeszkedő pontok könnyen szemléltethetők, ha tehát egy egyenes első és második nyompontját rekonstruáljuk, akkor ezek összekötő egyenese az eredeti egyenes.

21. §. Különböző térrészekben fekvő egyenesek. Az egyenes első és második nyompontja az egyenes egy véges szegmentumát állapítja meg. A két nyompont által határolt véges szegmentum egy-egy térrészben van; ha ez az első térrészben van, akkor az egyenesről azt fogjuk mondani, hogy az egyenes egy az első térrészben fekvő egyenes. Hasonlóan beszélhetünk második, harmadik és negyedik térrészben fekvő egyenesről. A felsorolt egyenes helyzetek között vannak átmeneti esetek, a tengelyre illeszkedő egyenesek. A tengelyre illeszkedő egyenes illeszkedési pontja az egyenes első és második nyompontja, a két nyompont összeesik, a két összeeső nyompont nem határozza meg az egyenest, mert ez az egyenesnek csak egy pontja. A tengelyre illeszkedő egyenesen csak két pontrégió van, ilyen egyenesre csak első és harmadik térrészben fekvő pont, vagy csak második és negyedik térrészben fekvő pont illeszkedik.

22. §. További megállapodások. Pont és egyenes ábrázolásának képiességét fokozzuk a következő grafikus úton eszközlendő



11. ábra.

megállapodásokkal. A pont két képét nullkörrel rajzoljuk, a nullkör középpontja a pont képe. A pont két képének összekötő egyenesét vékony vonalkázott vonallal rajzoljuk, e vonalnak a tengellyel való metszéspontját mindig feltüntetjük, de betűvel, mint a pont tengelyprojekcióját, nem jelöljük. Az egyenes első nyompontjának csak az első képét és második nyompontjának csak a második képét jelöljük S_1, illetőleg S_2 betűkkel, ha az eredeti egyenes g, akkor az egyenes nyompontjait S_1^g, illetőleg S_2^g jelekkel látjuk el. Az egyenes első térrészben fekvő részének képeit teljes és erősebb vonallal rajzoljuk, egy-egy kép többi részét pontozva a teljes vonalnál alkalmazott vastagságban rajzoljuk. E grafikus megállapodások szerint a 11. ábrában

$a(a'a'')$ I. térrészben fekvő egyenest,
$b(b'b'')$ II. « « «
$c(c'c'')$ III. « « «
$d(d'd'')$ IV. « « «

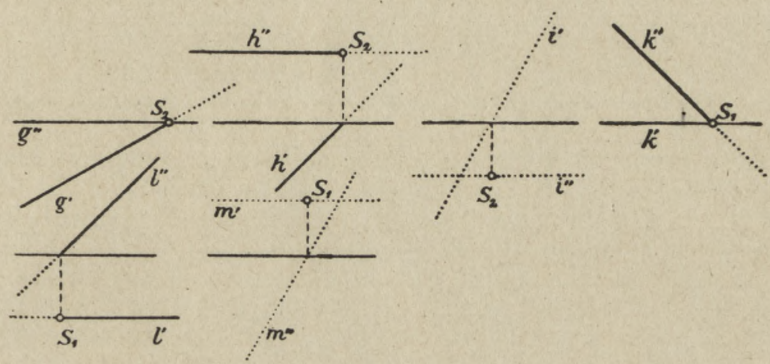
$e(e'e'')$, $f(f'f'')$ egy egy tengelyre illeszkedő egyenest jelent.

23. §. Parallel egyenesek. Parallel egyenesekre illeszkedő első vetítő síkok párhuzamosak, mert ezek közül az egyik meg van határozva a parallel egyenesek egyikével és erre illeszkedő első vetítő sugárral, a másik egyenesre illeszkedő első vetítő sík tartalmaz az előbbi vetítő síkkal parallel két különböző irányú egyenest, az egyik egyenes a két parallel egyenes közül az adott második egyenes, a másik egyenes utóbbira illeszkedő első vetítő sugár. Ebből következik, hogy parallel egyenesek első képei parallel egyenesek, mert a parallel egyenesek képei a parallel egyenesekre illeszkedő parallel vetítő síkok metszésvonalai az első képsíkkal. Hasonló okoskodás alapján kimondhatjuk, hogy *parallel egyenesek orthogonális projekciói bármely képsíkon parallel egyenesek.* Itt megjegyezzük, hogy általában, ha az egyenesek első képei és ugyanakkor ezek második képei parallel egyenesek, akkor az eredeti egyenesek is parallel egyenesek, de nem mindig, a kivételt később tárgyaljuk.

24. §. Képsíkra illeszkedő és képsíkkal parallel egyenesek. *Első képsíkra illeszkedő egyenes* minden pontja első képsíkra illeszkedő pont, tehát *első képe az eredeti egyenes, második képe a tengely.* (Első képsíkra illeszkedő egyenes első képének ama részét, mely rész az első képsík pozitív oldalára esik, teljes vonallal rajzoljuk, a többit pontozva. Ilyen egyenes második képét, a tengelyt az egyenes második képének megbetűzésével látjuk el, de mindig teljes vékony vonalnak hagyjuk.) Ugyanúgy *második képsíkra illeszkedő egyenes második képe a tengellyel szemben általános helyzetű egyenes, első képe a tengely.* Első képsíkra illeszkedő egyenes első nyompontja az egyenes bármely pontja, második nyompontja az egyenes és tengely metszéspontja.

Képsíkkal parallel egyenes a képsíkra illeszkedő egyenessel parallel, parallel egyenesek egynevű képei parallelek, tehát *első képsíkkal parallel egyenes első képe általános helyzetű, második képe a tengellyel parallel egyenes. Második képsíkkal parallel egyenes második képe általános helyzetű, első képe a tengellyel parallel egyenes.* Első képsíkkal parallel egyenes első nyompontja az első kép végtelenben fekvő pontja, második nyompontja végesben fekvő pont. A második nyompont az első képsíkkal parallel egyenest két félsugárra bontja, az egyik félsugár, ha az egyenes az első képsík fölött van, az első térnegyedben, a másik félsugár a második térrészben van; ha az egyenes az első képsík alatt van, akkor az egyik félsugár a negyedik, a másik félsugár a harmadik térrészben van. Ezek szerint képsíkkal parallel egyenesen a pontoknak csak két régiója van. Hasonló eredményeket állapíthatunk meg második képsíkkal parallel egyenesre vonatkozólag.

A 12. ábrában $g(g'g'')$ az első képsíkban fekvő,



12. ábra.

$h(h'h'')$ az első képsík fölött az első képsíkkal parallel,
$i(i'i'')$ az első képsík alatt az első képsíkkal parallel,
$k(k'k'')$ a második képsíkban fekvő,
$l(l'l'')$ a második képsík előtt a második képsíkkal parallel,
$m(m'm'')$ a második képsík mögött a második képsíkkal parallel egyenes.

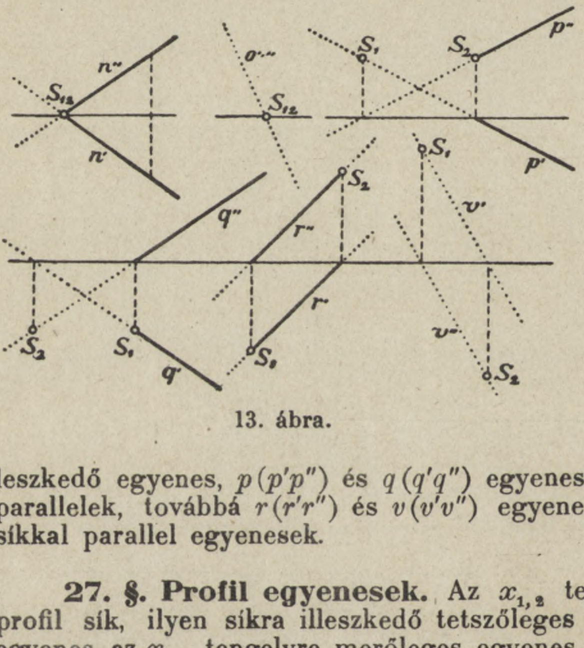
25. §. Tengellyel parallel egyenesek. Tengellyel parallel egyenes mindkét képsíkkal parallel egyenes. Első képsíkkal parallel egyenes második képe, második képsíkkal parallel egyenes első képe parallel a tengellyel, tehát tengellyel parallel egyenes mindkét képe a projekciótengellyel parallel. A felezősíkokkal kiegészített két képsíkból álló képsíkrendszer esetében a pontnak 13 helyzetét különböztethettük meg, e helyzeteknek megfelelően a tengellyel parallel egyeneseknek szintén 13 helyzetét lehet tárgyalni.

26. §. Felezősíkra illeszkedő és felezősíkkal parallel egyenesek. Síkra illeszkedő egyenes a síkra illeszkedő két pont összekötő egyenese. Egy síkra illeszkedő két egyenesnek mindig van metszéspontja, tehát első felezősíkra illeszkedő egyenes a tengelyt egy pontban metszi. Vegyük fel az első felezősíkra illeszkedő egyenes két pontját, az egyik pont legyen az $x_{1,2}$ tengely egy pontja, a másik az első felezősíkra illeszkedő tetszőleges pont, e pontok egynevű képeinek összekötő egyenesei az első felezősíkra illeszkedő egyenes képei. E szerkesztésből kitűnik, hogy egy az első felezősíkra illeszkedő egyenes két képe a képsíkok egyesítése után a tengelyre nézve orthogonális szimmetriában lévő két egyenes. Hasonlóan eljárva, egy a második felezősíkra illeszkedő egyenes szerkesztésénél azt nyerjük, hogy a második felezősíkra illeszkedő egyenes két képe a képsíkok egyesítése után összeesik.

Az első felezősíkkal parallel egyenes parallel egy az első felezősíkra illeszkedő egyenessel, tehát az első felezősíkkal parallel egyenes első képe parallel egy gondolatban felvett első felezősíkra illeszkedő egyenes első képével; második képe parallel az elgondolt egyenes második képével. E szerkesztésből kitűnik, hogy az első felezősíkkal parallel egyenes két képe a képsíkok egyesítése után egy az $x_{1,2}$ tengellyel parallel egyenesre nézve orthogonális szimmetriában van. Hasonlóan eljárva, egy a második felezősíkkal parallel egyenes szerkesztésénél azt nyerjük, hogy egy a második felezősíkkal parallel egyenes két képe a képsíkok egyesítése után két párhuzamos egyenes.

Az első felezősíkkal parallel egyenes első nyompontjának első rendezője nagyságra nézve egyezik második nyompontjának második rendezőjével, a két rendező előjele azonban különböző. Az előbb említett két rendező egyenlő volta planimetriailag is igazolható, ha a két képsíkot egyesítve gondoljuk. A két nyompont és azok képei az $x_{1,2}$ tengelyen egy derékszögű parallelogramma csúcspontjai stb.

A második felezősíkkal parallel egyenes első nyompontjának első rendezője és második nyompontjának második rendezője nagyságra és értelemre nézve egyezik, ez különben a képsíkok egyesítése után planimetriai meggondolások alapján közvetlenül igazolható.



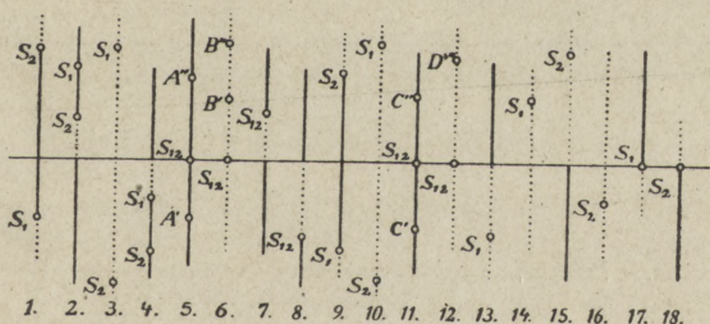
13. ábra.

A 13. ábrában n $(n'n'')$, illetőleg $o\,(o'o'')$ az első, illetőleg a második felezősíkra illeszkedő egyenes, $p\,(p'p'')$ és $q\,(q'q'')$ egyenesek az első felezősíkkal parallelek, továbbá $r\,(r'r'')$ és $v\,(v'v'')$ egyenesek a második felezősíkkal parallel egyenesek.

27. §. Profil egyenesek. Az $x_{1,2}$ tengelyre merőleges sík profil sík, ilyen síkra illeszkedő tetszőleges egyenes, röviden profil egyenes, az $x_{1,2}$ tengelyre merőleges egyenes. Profil egyenes első és második vetítő síkja két azonos sík, profil egyenes első és második képe a képsíkok egyesítése után egy az $x_{1,2}$ tengelyre merőleges egyenes. Egy profil egyenes közös első és második vetítő síkjában felvett bármely egyenes két képe az eredetileg felvett profil egyenes két képével összeesik, tehát pusztán képeivel adott profil egyenes két képéből nem rekonstruálható, ilyen egyenes két képével nincs meghatározva. A profil egyenes két képét kiegészítjük rajta fekvő két pontjának képeivel és amennyire ez lehetséges, az egyenes két képét nyompontjaival egészítjük ki. A két ponttal adott profil egyenes mindig rekonstruálható. A két képsíkkal általános helyzetű profil egyenes két nyompontja végesben fekvő pont. E pontok által határolt véges rész lehet az I., II., III. vagy IV. térnegyedben. A két nyompont összeesik, ha a profil egyenes a tengelyt metszi, ekkor a profil egyenes meghatározásához még egy pont szükséges; egy első vagy harmadik térnegyedben fekvő pont, ha az egyenes az első térnegyedből a harmadik térnegyedbe megy; egy második vagy negyedik térnegyedben fekvő pont, ha az egyenes a második térnegyedből a negyedik térnegyedbe megy.

Felezősíkra illeszkedő profil egyenes képét kiegészítjük szintén két ponttal, az egyik pont rendesen az egyenes és tengely metszéspontja, a másik pont egy az első, illetőleg a második felezősíkra illeszkedő pont. Az első felezősíkkal parallel profil egyenes két nyompontja a képsíkok egyesitése után összeesik, a második felezősíkkal parallel profil egyenes két nyompontja a képsíkok egyesítése után orthogonális szimmetriában van a tengelyre nézve. Mindkét állítás igazolható sztereometriai meggondolásokkal, de igazolásul felhasználhatjuk azokat az eredményeket is, melyeket felezősíkkal parallel egyenes első nyompontjának első és második nyompontjának második rendezőjére vonatkozólag nyertünk.

28. §. Képsíkra merőleges egyenes. Képsíkra merőleges egyenes szintén profil egyenes, de ennek tulajdonságai eltérnek az eddig tárgyalt profil egyenesek tulajdonságaitól. Vegyünk az első képsíkra merőleges egyenest. Ez egyenes második vetítő síkja egy meghatározott sík, első vetítő síkja határozatlan, mert az egyenesre illeszkedő minden sík az egyenes első vetítő síkja. Tehát az egyenes második képe a tengelyre merőleges egyenes, míg első képe egy sugársor bármely egyenese; a sugársor síkja az első képsík és sorozó



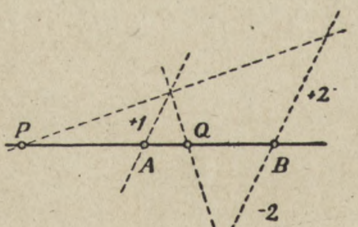
14. ábra.

pontja az egyenes első nyompontja, mondhatjuk azt is, hogy az egyenes első képe az egész első képsík. Az egyenes első képét akkor is nyerjük, ha az egyenesre illeszkedő pontok első képeinek összességét szerkesztjük. Az egyenesre illeszkedő tetszőleges, de végesben fekvő pontjának első képe az adott egyenes első nyompontja, egyetlen végtelenben fekvő pontjának első képe az első képsík bármely pontja, mert az első képsík bármely pontjára illeszkedő első vetítő sugár illeszkedik az adott egyenes végtelenben fekvő pontjára. Ha a képsíkra merőleges egyenes ábrázolandó pontjai közül kikapcsoljuk annak egyetlen végtelenben fekvő pontját, akkor, és csakis akkor mondhatjuk, hogy az első képsíkra merőleges egyenes első képe pont. Megállapodunk abban, hogy képsikra merőleges egyenes ábrázolásánál a végtelenben fekvő pontját kikapcsoljuk, tehát első, illetőleg második képsíkra merőleges egyenes első, illetőleg második képe pont, míg a hiányzó kép a képsíkok egyesítése után a pontképre illeszkedő, tengelyre merőleges egyenes.

A 14. ábrában feltüntetett profil egyenesek közül az 1., 2., 3., 4. rendre I., II., III., IV. térrészben van, az 5. és 6. tengelyre illeszkedő, 7. és 8. az első felezősíkkal parallel, 9. és 10. a második felezősíkkal parallel, 11. az első felezősíkra illeszkedő, 12. a második felezősíkra illeszkedő, 13. és 14. az első képsíkra merőleges, 15. és 16. a második képsíkra merőleges, 17. a második képsíkra illeszkedő, végül a 18. az első képsíkra illeszkedő. Minden esetben az egyenesnek az I. térnegyedben fekvő részének vetületét teljes vonallal tüntettük fel.

29. §. Parallel profil egyenesek. Profil egyenesek első képei és második képei parallel egyenesek, ha ezeket a projekciókat kellőképpen az egyenesekre illeszkedő pontok képeivel kiegészítjük, ekkor a képekből rekonstruált eredeti egyenesek általában nem lesznek parallel egyenesek. Ez az eset az, melyre a 23. §. végén hivatkozás történt. Ebből kitűnik, hogy eddigi ismereteink alapján parallel profil egyeneseket szerkeszteni nem tudunk. E feladatra még visszatérünk.

30. §. Az osztóviszony. Egy egyenesre illeszkedő két pont A és B két egyenlő, de ellenkező irányú távolságot határoz meg, ezek megkülönböztetésére az egyiket AB-vel, a másikat BA-val jelöljük. Ismeretes, hogy miként lehet minden távolságot egy egységnek előzetes felvételével, egy mérőszámmal ellátni. Egy egyenesen felvett irányított távolságok mérőszámait előjellel egészítjük ki. Ha az AB távolság mérőszáma pozitív, akkor a BA távolságé negatív. Egy egyenes által adott két irány közül legyen az AB irány pozitív, evvel azt akarjuk mondani, hogy ez egyenesen az AB irányú távolságok mérőszámait pozitív előjellel és az ellenkező irányú távolságok mérőszámait negatív előjellel vesszük. Ennek megfelelően pozitív mérőszámú távolság röviden pozitív távolság és negatív mérőszámú távolság röviden negatív távolság.



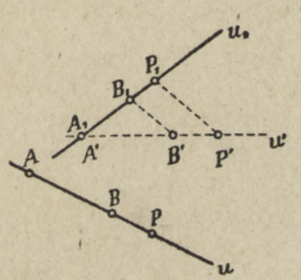
15. ábra.

Egy egyenesen felvett három pont A, B és P közül legyen A és B a két alappont, még pedig A az első alappont, B a második alappont, P legyen az osztópont. Ekkor a P pont osztóviszonyán értjük a következő számértéket:

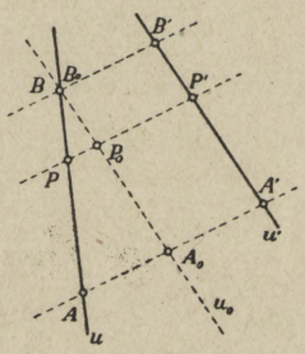
$$(ABP) = \frac{AP}{BP} = \lambda.$$

Az AB egyenesen felvett minden P ponthoz tartozik egy meghatározott értékű osztóviszony és minden osztóviszony értékhez tartozik egy és csakis egy P pont. Az AB véges szegmentum egy pontjához tartozó osztóviszony negatív, a végtelen szegmentum egy pontjához tartozó osztóviszony mindig pozitív. A 15. ábra mutatja az egyenesen felvett A, B alappontok mellett ama P, illetőleg Q pont szerkesztését, melynek osztóviszonya $+\frac{1}{2}$, illetőleg $-\frac{1}{2}$. (Itt az A és B pontokon átmenő segédvonalak tetszőleges irányú parallel egyenesek.)

Tegyük fel, hogy A, B és P pontok osztóviszonya geometriailag adott, vagyis egy u egyenesen adva van három pont, akkor az osztóviszony számértékének ismerete nélkül egy tetszőleges u_1 egyenesen adott A_1 és B_1 alappontokhoz szerkeszthetünk oly P_1 pontot, hogy $(A_1B_1P_1)=(ABP)$. Legyen az u_1 egyenes A_1 pontjára illeszkedő, de az u_1 egyenestől különböző egyenes u'. (16. ábra.) Az u' egyenesre lemásoljuk az u egyenesre illeszkedő pontok viszonylagos



16. ábra.



17. ábra.

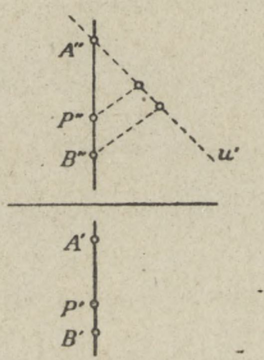
helyzetét úgy, hogy az A pont megfelelője $A'\equiv A_1$ legyen, a lemásolt pontok rendre B' és P'. Ha a B', B_1 pontok összekötő egyenesével parallel egyenest illesztünk a P' pontra, akkor ez az egyenes kimetszi az u_1 egyenesen a keresett P_1 pontot. E szerkesztésből kitűnik az is, hogy geometriailag adott osztóviszony három pontjára illeszkedő három parallel egyenes a parallel egyenesek síkjára illeszkedő tetszőleges egyenessel három oly pontot határoz meg, melyeknek osztóviszonya az eredeti osztóviszonnyal egyenlő, ha egy-egy parallel egyenesre illeszkedő két-két pont az osztóviszony megállapításánál egyenlő szerepű. A 17. ábrában e szerint, ha abban

$$A_0B_0 \parallel A'B',\ (ABP)=(A'B'P'),\ \text{mert}\ (ABP)=(A_0B_0P_0)=(A'B'P').$$

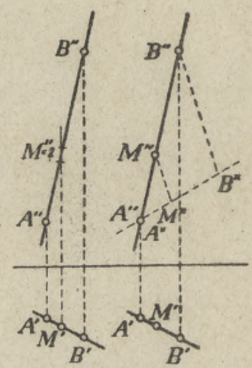
31. §. Profil egyenesre illeszkedő pont. Adott egyenesre illeszkedő pont egyik képéből úgy szerkesztettük a pont második képét, hogy a pont adott képére illeszkedő rendező és az egyenes másik képének metszéspontját állapítottuk meg. E szerkesztés profil egyenes esetében nem alkalmazható. Legyen adva egy profil egyenes két pontjával $A(A'A'')$ és $B(B'B'')$ (18. ábra), továbbá legyen ismeretes e profil egyenesre illeszkedő P pont első képe, P'. Szerkesztessék meg a P pont második képe, P''. A konstrukciót a következő egyenlő osztóviszonyok alapján végezhetjük:

$$(A'B'P') = (ABP) = (A''B''P''), \text{ vagyis } (A'B'P') = (A''B''P'').$$

A most alkalmazott szerkesztést akkor is alkalmazhatjuk előnyösen, ha két pontjával adott egyenesre illeszkedő pontot kívánunk felvenni és az egyenes egyik képe, mondjuk a második képe, a tengellyel közel derékszöget alkot. (19. ábra.) Ekkor az egyenes egy tetszőleges pontjának első képére illeszkedő rendező az egyenes második képét igen kis szög alatt metszi. A pont második képe csak elméletileg van egyértelműen meghatározva, de grafikailag a pont



18. ábra.



19. ábra.

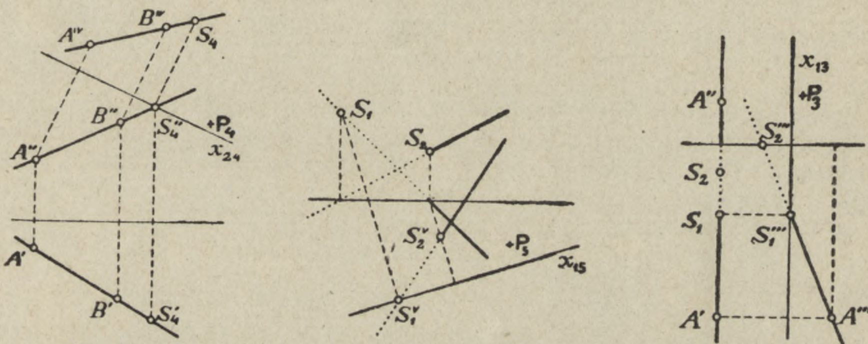
második képe sokértelmű. Grafikailag, a szokásos pontossággal akkor szerkesztjük meg a pont második képét, ha azt az $(A'M'B') = (A''M''B'')$ osztóviszonyok egyenlősége alapján megállapítjuk. (Jobb metszés elérése végett $\overline{A^xM^x} = 2.\overline{A'M'}$ és ugyanakkor $\overline{M^xB^x} = 2.\overline{M'B'}$).

32. §. Az egyenes transzformációja. Egyenes transzformációján értjük az egyenes új képének a szerkesztését egy új képsíkon, ha az egyenes két képét ismerjük. Minden egyenes az egyenesre illeszkedő két pontjával van meghatározva és két pontra illeszkedő egyenes képe a pontok képeinek összekötő egyenese, az egyenes új képét megszerkesztettnek mondhatjuk, ha két pontjának új képeit megszerkesztettük.

A 20. ábrában két képével adott egyenes negyedik képét látjuk megszerkesztve, a negyedik képsík a második képsíkra merőleges. Az egyenesre illeszkedő A és B pontnak megszerkesztettük a negyedik képét, a két negyedik kép összekötő egyenese a keresett negyedik kép. Az egyenes az új képsíkot egy pontban metszi, ez az egyenes negyedik nyompontja, jele: S_4. S_4 a negyedik képsíkra illeszkedő pont, második képe az új tengely egy pontja, ez a pont az egyenes második képének is pontja, tehát a negyedik nyompont második képe az egyenes második képének és új tengelynek metszéspontja, e pontban az új tengelyre állított merőleges metszi az egyenes negyedik képét annak keresett negyedik nyompontjában.

A 21. ábrában egy egyenes ötödik képét szerkesztettük meg egy az első képsíkra merőleges új képsíkon. Az egyenes ötödik képének szerkesztésénél az egyenes első és második nyompontját használtuk fel.

A 22. ábrában nyompontjaival adott profil egyenes harmadik képe van megszerkesztve, itt a harmadik képsíkot az első képsíkra illeszkedő új tengely körül forgattuk az első képsíkba. Profil egyenes esetében előnnyel jár új képsíknak bevezetése, mert a profil egyenesekre vonatkozó eddig érintett feladatok közvetlenül megoldhatók. Így a profil egyenèsre illeszkedő A pont első képéből az egyenes harmadik képén a pont harmadik képét úgy nyerjük, hogy az A' pontra illeszkedően megrajzoljuk az új rendezőt, az új rendező egyenese az egyenes harmadik képét a keresett pontban metszi. Ugyane pontnak második képét úgy nyerjük, hogy az ismeretes har-



20. ábra. 21. ábra. 22. ábra.

madik rendezőt felrakjuk második rendezőnek, mert első képsíkra merőleges új képsík esetében a második rendező és az új rendező nagyságra és értelemre nézve egyezik. Ha pedig a profil egyenesre illeszkedő A pont második képéből meg akarjuk szerkeszteni e pont első képét, akkor az új képsíkon az új tengellyel párhuzamos egyenest rajzolunk, de úgy, hogy az egyenes távolsága az új tengelytől nagyságra és értelemre nézve egyezzék a pont második rendezőjével, az új tengellyel parallel egyenes kimetszi az egyenes harmadik képén az A pont harmadik képét. E képből az új tengelyre állított merőleges kimetszi a profil egyenes első képén az egyenesre illeszkedő A pont első képét.

A transzformációval nyerhető előnyöket a következő feladat konstruktív kivitele is mutatja. Legyen adva egy profil egyenes két pontjával és egy tetszőleges pont. Szerkesztessék az adott pontra illeszkedő és az adott profil egyenessel parallel egyenes. A keresett profil egyenes első és második képe közvetlenül megrajzolható, de ezt a keresett profil egyenest egy az egyenesre illeszkedő második pont két képével ki kell egészíteni. E végett megszerkesztjük az adott elemek új képeit egy tetszőleges új képsíkon, parallel egyenesek egynevű képei mindig parallelek, tehát az adott pont új képére illeszkedően megrajzoljuk az adott profil egyenes új képével párhuzamos egyenest, ez lesz a keresett profil egyenes új képe. A keresett profil egyenes megmaradó képe és új képe által teljesen adott, s így első és második képe egy további ponttal kiegészíthető. Az egész feladat konstruktív kivitelét az olvasóra bízom.

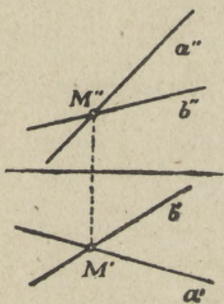
33. §. Adott egyenessel parallel új képsík bevezetése. Eddig új képsíkot az előző esetekben azért vezettünk be, hogy az új két képsíkból álló képsíkrendszerrel szemben az egyenes ne legyen profil egyenes. Tettük ezt főleg azért, hogy egy-két feladat gyorsabban legyen megoldható. Sok esetben az ábrázoló geometriai feladat gyorsabban elvégezhető, ha a feladatban szereplő egyenes a képsíkkal szemben speciális helyzetű, jelesen ha az egyenes a képsíkkal párhuzamos, illetőleg a képsíkra merőleges.

Legyen adva egy, a két képsíkkal szemben általános helyzetű, egyenes. Bevezetendő oly új képsík, mely az adott egyenessel parallel. Képsíkkal parallel egyenes egyik képe a tengellyel parallel. Megfordítva, ha egy egyenes egyik képe a tengellyel parallel, akkor az eredeti egyenes legalább az egyik képsíkkal parallel. Tehát ha az új képsíkot jellemző új tengelyt, pl. az $x_{1,4}$ egyenest, az egyenes első képével, ill. az $x_{2,5}$ egyenest az adott egyenes második képével párhuzamosan vesszük fel, akkor az eredeti két képsíkból álló képsíkrendszerrel szemben általános helyzetű egyenes az új két képsíkból álló képsíkrendszerrel szemben a kívánt helyzetben lesz. Az első esetben az egyenes a negyedik képsíkkal lesz parallel, mert első képe parallel az $x_{1,4}$ új tengellyel; a második esetben az egyenes az ötödik képsíkkal lesz parallel, mert második képe parallel az $x_{2,5}$ új tengellyel.

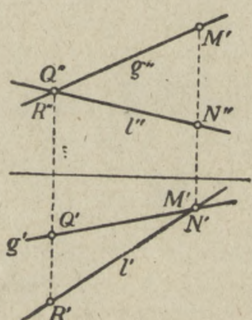
34. §. Adott egyenesre merőleges új képsík bevezetése. Adott két képsík esetében az egyik képsíkra merőleges egyenes a másik képsíkkal párhuzamos. Általános helyzetű egyenesre merőleges új képsík az eredeti két képsík egyikével sem alkothat két képsíkból álló új képsíkrendszert, mert az új képsíkra merőleges egyenesnek a megmaradó képsíkok egyikével párhuzamosnak kellene lennie. Tehát a két képsíkkal szemben általános helyzetű egyenes esetében közvetlenül az egyenesre merőleges új képsíkot nem vezethetünk be, ez csak akkor lehetséges, ha az egyenes a megmaradó képsíkok egyikével parallel. Ha az egyenes pl. az első képsíkkal parallel, akkor egy az első képsíkra merőleges új képsík az első képsíkkal alkothat oly két képsíkból álló képsíkrendszert, mely rendszerben az adott egyenes az új képsíkra merőleges. Mivel a P_1P_4 rendszerben az új képsíkra merőleges egyenes profil egyenes, az új tengelyt a megmaradó képre merőlegesen kell választani. Ezen meggondolások alapján közvetve tudunk tetszőleges egyenesre merőleges új képsíkot bevezetni. Először az előbbi pont alapján bevezetünk új képsíkot, mely az adott egyenessel párhuzamos, legyen ez a képsík a negyedik képsík. A negyedik képsíkon megszerkesztjük az egyenes negyedik képét, ha most a negyedik képsíkra merőleges új képsíkot, az ötödik képsíkot, úgy vezetjük be, hogy az ötödik képsíkot jellemző $x_{4,5}$ tengely az egyenes negyedik képére merőleges, akkor az ötödik képsík az eredeti egyenesre merőleges.

35. §. Két egyenes. Két illeszkedő egyenesnek van közös pontja, a közös pont a két egyenes metszéspontja. Két nem illeszkedő egyenesnek nincs közös pontja, az egyenesek nem metszik egymást, az egyenesek kitérő vagy torz egyenesek.

Legyen két illeszkedő egyenes közös pontja *M*, e pont első képére illeszkedik mindkét egyenes első képe, e pont második képére illeszkedik mindkét egyenes második képe. Ha két egyenes első és második képeit egészen tetszőlegesen vesszük fel és az egyeneseket illeszkedőknek gondoljuk, akkor a közös pont első képe csak az egyenesek első képeinek közös pontja, a közös pont második képe csak az egyenesek második képeinek közös pontja lehet, de a közös pont a tér egy pontja, tehát e pont első és második képének összekötő egyenese a képsíkok egyesítése után egy a tengelyre merőleges egyenes. Amennyiben *az egyenesek első képeinek közös pontja és második képeinek közös pontja a képsíkok egyesítése után egy a tengelyre nem merőleges egyenest határoznak meg, akkor*



23. ábra.



24. ábra.

a képek által adott két egyenes két kitérő egyenes. Így nyertünk kritériumot, mellyel az egyenesek puszta rajza alapján az egyenesek illeszkedő, ill. kitérő voltát megállapíthatjuk. Az 23. ábrában $a(a'a'')$, $b(b'b'')$ egyenesek illeszkedő egyenesek, a 24. ábrában $g(g'g'')$, $l(l'l'')$ egyenesek kitérő egyenesek.

Metsző egyenesek képeire megállapított kritérium nem alkalmazható, ha az egyenesek közül az egyik vetítő egyenestől különböző profil egyenes. Ekkor az első képek metszéspontja és a második képek metszéspontja mindig tengelyre merőleges egyenest határoznak meg, holott bizonyára vannak a profil egyenesre nem illeszkedő egyenesek is.

Illeszkedő egyenesek képeire vonatkozó kritérium általában szükséges és elégséges, a legutóbb tárgyalt esetben a megállapított kritérium szükséges, de nem elégséges.

Kitérő egyenesek első pontjáról azt mondjuk, hogy az a két egyenes egy *látszólagos metszéspontja*, a második képek közös pontja szintén látszólagos metszéspont. Az első képsíkon a látszólagos metszéspont két pont közös első képe, egy-egy e pontok közül egy-egy kitérő egyenesre illeszkedik, e pontok egy első vetítő sugárra illeszkedő pontok. Ugyanazon *első vetítő sugárra illeszkedő pontokról azt mondjuk, hogy e pontok első képei fődésben lévő pontok, röviden első fődőpontok.* E szerint a kitérő egyenesek látszólagos metszéspontja a kitérő egyenesek első fődőpontjainak közös első képe, ill. második fődőpontjainak közös második képe.

Feladatok: 1. Adva van egy profil egyenes két pontja A ($A'A''$) és B($B'B''$). Szerkesztessenek meg az egyenes nyompontjai egy harmadik vagy negyedik képsíknak felhasználása nélkül. 2. Adva van egy profil egyenes két nyompontja. Szerkesztessék ez egyenesre illeszkedő általános helyzetű egyenes. 3. Adva van egy általános helyzetű egyenes g($g'g''$). Szerkesztessék meg az egyenesnek az első felező síkra illeszkedő pontja.

A sík.

36. §. A sík ábrázolása. Síkra illeszkedő pontok első képeinek összessége az egész első képsík és második képeinek összessége az egész második képsík, tehát minden sík első képe az egész első képsík, második képe az egész második képsík, és ha a síkra illeszkedő pontokat bármily új képsíkra vetítjük, akkor általában az új képsík a síknak új képe. Ebből következik, hogy a sík képeiből nem rekonstruálható, ezért a síkot nem képeivel, hanem a síkot meghatározó térelemek képeivel fogjuk ábrázolni.

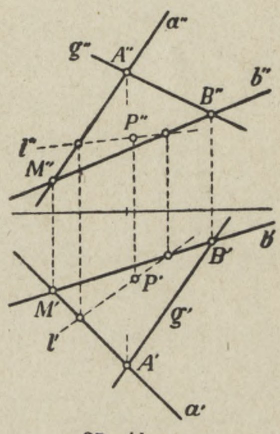
A síkot *a)* két illeszkedő egyenes, *b)* egy egyenes és az egyenesre nem illeszkedő pont, *c)* három nem egy egyenesre illeszkedő pont határozza meg. A síkmeghatározás *b)* és *c)* eseteit lehetőleg a meghatározás első esetére fogjuk visszavezetni. Egyenessel és az egyenesre nem illeszkedő ponttal adott sík két metsző egyenes összekötő síkjával adott, ha az adott pontot az adott egyenes egy tetszőleges pontjával egyenessel összekötjük, ekkor az eredeti egyenes és a most megszerkesztett egyenes összekötő síkja azonos az eredeti síkkal. Három pont által meghatározott sík esetében az egyik adott pontot összekötjük a másik kettő mindegyikével, az így nyert illeszkedő egyenesek összekötő síkja azonos a három pont összekötő síkjával.

A síkot ábrázoltuk, ha a síkra illeszkedő két egyenest ábrázoltuk. A síkra illeszkedő egyenesek között vannak profil egyenesek is, a profil egyenes, mint láttuk, konstruktív szempontból kivételes helyzetű egyenes, azért a sík meghatározására szolgáló egyenesek között profil egyenest lehetőleg mellőzni fogunk.

37. §. Ábrázolt síkra illeszkedő pont, illeszkedő egyenes. Síkra illeszkedő pontot síkra illeszkedő egyenes, és síkra illeszkedő egyenest síkra illeszkedő pontok segítségével ábrázolunk. Legyen adva két illeszkedő egyenes, a két egyenes megállapít egyetlen síkot (25. ábra). Az első képsík egy tetszőleges pontja egy a síkra illeszkedő pontnak első képe, az eredeti pont az első képre illeszkedő első vetítő sugár és sík metszéspontja, e pont a tér egy meghatározott pontja, tehát van meghatározott második képe, ezt a második képet egyelőre csak akkor tudjuk megszerkeszteni, ha a pont első képét azon két egyenes egyikének első képén választottuk, mely egyenesekkel a síkot megadtuk.

Az első képsík egy tetszőleges egyenese egy a síkra illeszkedő egyenes első képe, az eredeti egyenes a felvett első képre illeszkedő első vetítő sík és adott sík metszésvonala, e metszésvonal a tér egy meghatározott egyenese, tehát van meghatározott második képe. A síkra illeszkedő egyenes második képét a következő két tétel alapján szerkeszthetjük meg: a) *síkra illeszkedő egyenes minden pontja síkra illeszkedő pont,* b) *egy síkra illeszkedő két egyenes mindig egy a síkra illeszkedő pontban metszi egymást.*

Legyen a síkot meghatározó két egyenes $a(a'a'')$, $b(b'b'')$. Vegyük fel egy a síkra illeszkedő tetszőleges egyenes első képét, a g' egyenest. Az eredeti a és g egyenesek egy síkra illeszkedő egyenesek, van közös pontjuk, e közös pont első képe csak az első képek közös pontja lehet, A'. Az A pont második képe, mint az a egyenesre illeszkedő pont második képe szerkeszthető meg. Ugyanúgy megszerkeszthetjük a g egyenes ama B pontjának második képét, mely pontban a g egyenes a síkra illeszkedő b egyenest metszi. Akkor az A'' és B'' pontok összekötő egyenese a síkra illeszkedő g egyenes második képe. Így megszerkesztettük egy a síkra illeszkedő egyenes két képét, két a síkra illeszkedő pont segítségével.



25. ábra.

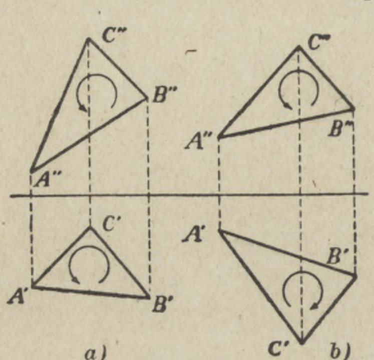
Síkra illeszkedő tetszőleges pont első képéből a pont második képét úgy szerkesztjük, hogy megszerkesztjük oly egyenes két képét, mely egyenes a pontra és síkra illeszkedő egyenes. Legyen a pont P, P' pontra illeszkedő l' egyenes legyen egy a síkra illeszkedő l egyenes első képe, ez egyenes megszerkesztett második képén nyerjük a síkra illeszkedő P pont második képét. Igy megszerkesztettük egy a síkra illeszkedő pont két képét egy a síkra illeszkedő egyenes segítségével.

38. §. Egyenesre illeszkedő sík szerkesztése. Egy g egyenesre illeszkedő síkok síksort alkotnak, melynek tengelye a g egyenes. A g egyenesre illeszthető síkok közül egyet úgy ábrázolunk, hogy a g egyenesre illeszkedő tetszőleges a egyenest ábrázolunk. A g és a egyenesekkel ábrázolt sík a keresett sík.

39. §. Pontra illeszkedő sík szerkesztése. Egy P pontra illeszkedő síkok síkpontot alkotnak, melynek centruma a P pont. A P pontra illeszthető síkok közül egyet úgy ábrázolunk, hogy a P pontra illeszkedő két egyenest ábrázolunk, e két egyenessel ábrázolt sík az adott pontra illeszkedő sík.

40. §. Dűlt sík, feszített sík. Vegyük fel a tér három, nem az egyenesre illeszkedő pontját, $A(A'A'')$, $B(B'B'')$, $C(C'C'')$. E három ponttal síkot ábrázoltunk. Legyen a három pont egy háromszög három csúcspontja. Az első képsíkban az A', B', C' csúcspontokkal szerkesztett háromszögről azt mondjuk, hogy ez az ABC háromszög első képe (26. ábra), A'', B'', C'' csúcspontokkal szerkesztett háromszög az eredeti háromszög második képe. Az A', B', C' sorrend a háromszög első képében egy körüljárási értelmet állapít meg, A'', B'', C'' sorrend a háromszög második képében szintén egy körüljárási értelmet állapít meg. A körüljárási értelem a képsíkok egyesítése után az első és második projekcióban lehet egyező, vagy ellenkező értelmű. Az első esetben azt mondjuk, hogy a háromszög síkja dűlt, a másik esetben azt mondjuk, hogy a háromszög síkja feszített.

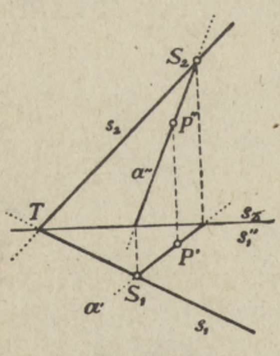
Egy sík, ha a végtelenben fekvő síkot hozzágondoljuk, terünket két részre bontja. Az első képsík fölött igen nagy távolságban lévő szemlélő és a második képsík előtt igen nagy távolságban lévő szemlélő az ABC háromszög síkjának ugyanazon oldalát, vagy két különböző oldalát látja. Ha a sík által keletkezett egyik féltérrészben van a két szemlélő, akkor a két szemlélő a sík ugyanazon oldalát látja, a háromszög körüljárási értelme mindkét projekcióban egyező, a sík dűlt. Ellenkező esetben a két szemlélő a sík két különböző oldalát látja, a két szemlélőre a körüljárási értelem ellenkező, a két projekcióban is ellenkező, a sík feszített. Mert az első képsík fölött lévő szemlélőre az eredeti háromszög körüljárási értelme és a háromszög első képének körüljárási értelme egyezik, ugyanúgy egyezik a második képsík előtt lévő szemlélőre az eredeti háromszög körüljárási értelme a háromszög második képének körüljárási értelmével. A 26. ábrában az *a)* háromszög síkja dűlt, a *b)* háromszög síkja feszített.



26. ábra.

41. §. Nyomvonalakkal adott sík. A két illeszkedő egyenes által ábrázolt síkban az eredeti két egyenest a sík két tetszőleges más egyenesével helyettesíthetjük. A helyettesítés sok esetben előnyös, ha a síkot azokkal az egyenesekkel ábrázoljuk, mely egyenesekben az adott sík a képsíkokat metszi. Sík és képsík közös egyenese a sík nyomvonala. Két képsíkból álló képsíkrendszerben a síknak van első és van második nyomvonala. Az első nyomvonalat s_1 betűvel, a második nyomvonalat s_2 betűvel, az adott sík és n-ik képsík metszésvonalát, a sík n-ik nyomvonalát, s_n betűvel jelöljük.

Vegyük fel a sík első nyomvonalát (27. ábra), ennek második képe a tengely, mert az első nyomvonal az első képsíkra illeszkedő egyenes. Hasonlóan a még fel nem vett második nyomvonal első képe szintén a tengely. A két nyomvonal egy síkra illeszkedő két egyenes, a közös pont első képe az első nyomvonal első képének és a második nyomvonal első képének metszéspontja, e pont az első nyomvonal és tengely metszéspontja. Ugyanúgy a második nyomvonal és tengely metszéspontja a nyomvonalak közös pontjának második képe. Mivel egy pontnak első és második képe mindig a tengelyre merőleges egyenesen van, a két nyomvonal közös pontjának két képe csak egy a tengelyre illesz-

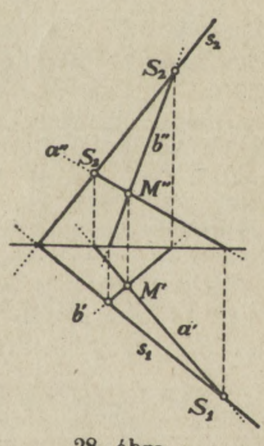


27. ábra.

kedő pont lehet, vagyis egy sík két nyomvonala a tengely egy pontjára illeszkedik, e pont a sík és tengely metszéspontja, T, röviden a sík tengelypontja. Tehát síkot nyomvonalaival úgy ábrázolunk, hogy a tengely egy pontjára illeszkedően megrajzoljuk a sík első és második nyomvonalát, ugyanakkor az első nyomvonal második képét és a második nyomvonal első képét, mivel e két kép mindig a tengellyel azonos, nem jelöljük.

Nyomvonalaival adott síkra illeszkedő pontot és egyenest úgy szerkesztünk, mint két tetszőleges egyenessel adott síkban. Pl. szerkesztessék meg az a' egyenes által adott a egyenes második képe (27. ábra). Az a' egyenes az első nyomvonalat és a második nyomvonal első képét egy-egy pontban metszi, e pontok második képeit a pontok első képeire illeszkedő rendezőkkel közvetlenül nyerjük, a második képek összekötő egyenese lesz az a egyenes második képe. Az a egyenes és első nyomvonal közös pontja az a egyenes első nyompontja, mert az első nyomvonal minden pontja az első képsíkra illeszkedő pont. Ugyanúgy az a egyenes és a sík második nyomvonalának közös pontja az a egyenes második nyompontja. Így a nyomvonalaival adott síkra illeszkedő egyenesre a következő eredményt nyerjük: *egyenes akkor illeszkedik a síkra, ha az egyenes első nyompontja a sík első, és második nyompontja a sík második nyomvonalára illeszkedő pont.*

Ennek alapján két tetszőleges illeszkedő egyenes által adott sík nyomvonalait meg tudjuk szerkeszteni (28. ábra). Megszerkesztjük az adott illeszkedő egyenesek első és második nyompontjait. A két első nyompont összekötő egyenese a sík első nyomvonala, a két második nyompont összekötő egyenese a sík második nyomvonala. Helyes és pontos szerkesztés mellett a szerkesztett első és második nyomvonal közös pontja egy a tengelyre illeszkedő pont. Midőn szerkesztett elemek egy további geométriai feltételt kielégíteni tartoznak, azt mondjuk, hogy a szerkesztésnél egy ellenőrzés, kontroll áll rendelkezésünkre. Szerkesztők minden grafikus ellenőrzést szívesen fogadnak, mert minden kielégített kontroll a szerkesztés kivitelének helyességébe vetett hitet alátámasztja.



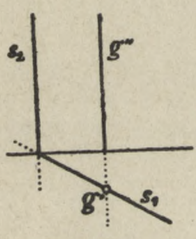
28. ábra.

Az első nyomvonalnak az első képsík pozitív felére eső része az első nyomvonal pozitív fele, az első nyomvonal másik része az első nyomvonal negatív fele. Hasonlóan beszélünk a második nyomvonal pozitív, ill. negatív feléről. Megállapodunk abban, hogy a két nyomvonal pozitív felét teljes vonallal erősen, a többit pontozva rajzoljuk.

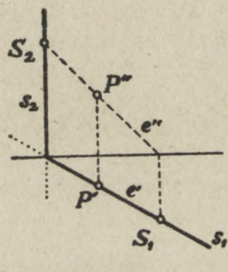
Nyomvonalaival adott sík dűlt, ill. feszített voltára vonatkozó kritérium megállapítását az olvasóra bízom.

Egyenesre illeszkedő, de nyomvonalaival megadandó síkot úgy szerkesztünk, hogy az egyenes első nyompontjára, ill. második nyompontjára illeszkedő első és második nyomvonalat úgy rajzoljuk, hogy a két nyomvonal a tengely egy pontjára illeszkedjék.

42. §. Vetítő sík. A síknak feszített és dűlt helyzete között van átmeneti helyzet, az átmeneti helyzetű sík a képsíkra merőleges sík, vetítő sík. Képsíkra merőleges sík a képsíkra merőleges egyenesre illeszkedik, tehát képsíkra merőleges síkot úgy szerkesztünk, hogy a képsíkra merőleges egyenesre illeszkedő síkot ábrázolunk. A 29. ábrában felvettünk egy az első képsíkra merőleges g egyenest. Ez egyenesre illeszkedő sík első nyomvonalát az egyenes első képére illeszkedően, de különben tetszőlegesen rajzoljuk, az első nyomvonal és tengely közös pontja a sík tengelypontja, a tengelypont és az egyenes második nyompontjának összekötő egyenese a sík második nyomvonala. Az egyenes második nyompontja az egyenes második képének végtelenben fekvő pontja, tehát a sík második nyomvonala a tengelyre merőleges egyenes. Ugyanúgy egy második vetítő sík második nyomvonala általános helyzetű egyenes, első nyomvonala a tengelyre merőleges.



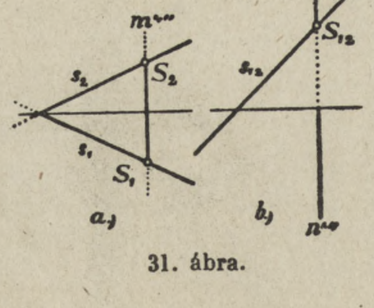
29. ábra.



30. ábra.

Első vetítő síkra illeszkedő végesben fekvő egyenes és pont első képe a sík első nyomvonalával azonos egyenes, ill. a sík első nyomvonalára illeszkedő pont (30. ábra). Az első vetítő sík végtelenben fekvő egyenesének első képe az első képsík bármely a sík első nyomvonalával párhuzamos egyenes és a síkra illeszkedő első vetítési középpont első képe az első képsík bármely pontja. Ha az első vetítő síkra illeszkedő végtelenben fekvő térelemek képeitől eltekintünk, akkor a síkra illeszkedő minden pont első képe a sík első nyomvonalára illeszkedő pont, a síkra illeszkedő minden egyenes első képe a sík első nyomvonalával azonos egyenes. Az első vetítő síkra illeszkedő egyenes második képéhez egyértelműen tartozik egy első kép, de az első képhez kétszeresen végtelen sok második kép tartozik. Ugyanezt ismételhetjük az első vetítő síkra illeszkedő pontra vonatkozólag. Második vetítő síkra vonatkozólag az eddigi eredményekhez hasonló eredményeket állapíthatunk meg.

43. §. Felezősíkra merőleges sík. Az első felezősíkra merőleges egyenesre illeszkedő sík az első felezősíkra merőleges sík. Minden második felezősíkkal parallel profil egyenes az első felezősíkra merőleges. Második felezősíkkal parallel profil egyenes két nyompontja a képsíkok egyesítése után a tengelyre szimmetrikus helyzetű, tehát ilyen egyenesre illeszkedő sík két nyomvonala a képsíkok egyesítése után szintén szimmetrikus helyzetű a tengelyre nézve.



31. ábra.

A második felezősíkra merőleges egyenesre illeszkedő sík a második felezősíkra merőleges. A második felezősíkra merőleges egyenes mindig az első felezősíkkal parallel profil egyenes, ilyen egyenes két nyompontja a képsíkok egyesítése után összeesik s így az erre illeszkedő sík két nyomvonala a képsíkok egyesítése után összeesik. A 31. ábra *a)* az első felezősíkra merőleges, *b)* a második felezősíkra merőleges síkot mutat.

44. §. Tengellyel parallel sík. Tengellyel parallel sík tengelypontja a tengely végtelenben fekvő pontja s így a tengellyel parallel sík két nyomvonala a tengellyel parallel. A két parallel nyomvonal véges szélességű síksávot állapít meg, e véges sáv lehet az I., a II., a III., ill. a IV. térnegyedben, így lehet a tengellyel parallel síkok négy helyzetét megkülönböztetni. Ha a véges síksáv az I. vagy III. térnegyedben van, a sík dűlt; ha a véges síksáv a II. vagy IV. térnegyedben van, a sík feszített.

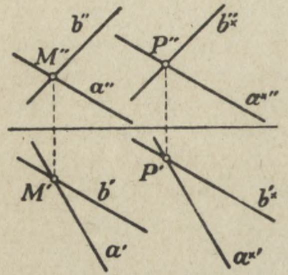
45. §. Tengelyre illeszkedő sík. A tengelyre illeszkedő sík két nyomvonala a tengellyel azonos egyenes, ez az egy egyenes a síkot nem határozza meg. A tengelyre illeszkedő sík meghatározásához szükséges még a tengelyre nem illeszkedő pont, vagy egy a tengelyre illeszkedő egyenes. Ez a pont, ill. egyenes lehet valamely képsík pontja, illetőleg egyenese, lehet valamely felezősík pontja, illetőleg egyenese, végül lehet oly pont, illetőleg egyenes, mely sem képsíkra, sem felezősíkra nem illeszkedik. Ilyen módon a tengelyre illeszkedő síkoknak hat helyzetét nyerjük.

46. §. Képsíkkal, felezősíkkal parallel sík. Képsíkkal parallel sík a tengellyel parallel vetítő sík. Így az első képsíkkal parallel sík második nyomvonala a tengellyel parallel egyenes, első nyomvonala az első képsík végtelenben fekvő egyenese. Az első képsíkkal parallel síkra illeszkedő minden pont második képe a sík második nyomvonalára illeszkedő pont, és e síkra illeszkedő minden egyenes második képe a második nyomvonallal azonos egyenes, mert e sík második vetítő sík. Hasonló eredményeket állapíthatunk meg a második képsíkkal parallel síkra vonatkozólag. Képsíkkal parallel sík a végesben fekvő nyomvonallal és a hozzá mindig gondolandó végtelenben fekvő nyomvonallal meg van határozva. Az első képsíkkal parallel sík lehet az első képsík fölött, lehet az első képsík alatt; a második képsíkkal parallel sík lehet a második képsík előtt, lehet a második képsík mögött. Így a képsíkokkal parallel síkoknak négy helyzetét különböztethetjük meg.

Felezősíkkal parallel sík a másik felezősíkra merőleges és a tengellyel parallel. Így a második felezősíkkal parallel sík két nyomvonala a tengellyel parallel és a képsíkok egyesítése után a tengelyre nézve szimmetrikus; az első felezősíkkal parallel sík két nyomvonala a tengellyel parallel és a képsíkok egyesítése után két azonos egyenes. Első felezősíkkal parallel síkoknak, valamint a második felezősíkkal parallel síkoknak két-két helyzetét különböztethetjük meg, felezősík fölötti és felezősík alatti síkhelyzeteket.

47. §. Profil sík. A tengelyre merőleges sík profil sík. Profil síknak első és második nyomvonala a tengelyre merőleges. A profil sík első és második vetítő sík egyszerre.

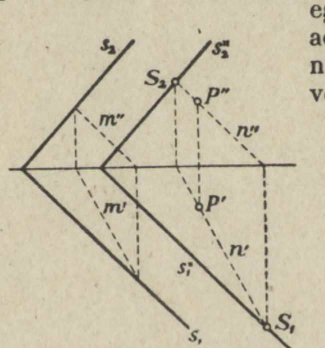
48. §. Parallel síkok. Két illeszkedő egyenessel adott sík esetében adott pontra illeszkedő és az adott síkkal parallel síkot úgy szerkesztünk, hogy az adott ponton át az adott síkot meghatározó egyenesekkel parallel egyeneseket vezetünk, ilyen módon az adott pontra illeszkedő egyenesekkel ábrázoltuk a keresett síkot (32. ábra).



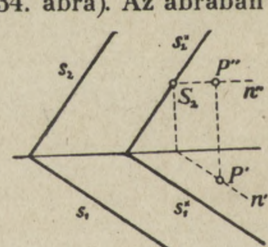
32. ábra.

Nyomvonalaival adott síkkal parallel síkot a tengely egy pontjára illeszkedően hasonlóan megszerkesztve azt nyerjük, hogy *parallel síkok egynevű nyomvonalai paralellek.* Az egynevű nyomvonalak közös végtelenben fekvő pontjai a parallel síkok közös végtelenben fekvő pontjai.

Utóbbi megjegyzés alapján pontra illeszkedő, de nyomvonalaival adott síkkal parallel síknak, S^x, nyomvonalait igen egyszerűen nyerjük. Legyen (33. ábra) S (s_1, s_2) az adott sík, az adott pont $P(P'P'')$. Felveszünk az adott síkban egy tetszőleges egyenest, m, megrajzoljuk a P pontra illeszkedő és az m egyenessel parallel egyenest, legyen ez n, akkor az n egyenes első nyompontján át és az adott sík első nyomvonalával parallel egyenes lesz a keresett sík első nyomvonala, továbbá az n egyenes második nyompontján át az adott sík második nyomvonalával parallel egyenes lesz a keresett sík második nyomvonala. A szerkesztésnél ellenőrzés is áll rendelkezésünkre, mert a szerkesztett sík első és második nyomvonala a tengely egy és ugyanazon pontjára illeszkedő pont. A szerkesztés némi egyszerűsítése abban áll, hogy az adott síkban felvett tetszőleges egyenes a síknak első vagy második nyomvonala (34. ábra). Az ábrában az adott



33. ábra.

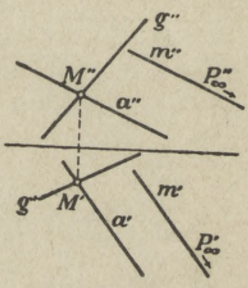


34. ábra.

sík tetszőleges egyeneseként a sík első nyomvonalát választottuk. Az adott pontra illeszkedő és a sík első nyomvonalával parallel egyenes egy az első képsíkkal parallel egyenes, ennek második nyompontján át és az adott sík második nyomvonalával parallel egyenes lesz a keresett sík második nyomvonala. E nyomvonal megállapítja az x_{12} tengelyen a sík tengelypontját, erre illeszkedik az adott sík első nyomvonalával parallel helyzetben a keresett sík első nyomvonala. A végzett szerkesztés egyszerűbb, de a megállapított szerkesztésbeli ellenőrzés feláldozásával jár.

Általában, ha két sík két első nyomvonala egymással és két második nyomvonala egymással parallel, akkor a két sík parallel. Fenti feltételt kielégítő síkok csak akkor nem parallelek, ha a síkok tengellyel parallel síkok, mert az első nyomvonalak közös végtelenben fekvő pontja és a második nyomvonalak közös végtelenben fekvő pontja nem két különböző pont, csak egy pont, a tengelynek egyetlen végtelenben fekvő pontja, szóval e síkoknak általában csak egy közös végtelenben fekvő pontjuk van.

49. §. Végtelenben fekvő térelemekre illeszkedő sík szerkesztése. *a)* Adva van egy végesben fekvő $g(g'g'')$ egyenes és egy végtelenben fekvő P_∞ pont (35. ábra). Végtelenben fekvő pontot végesben fekvő $m(m'm'')$ egyenessel adunk meg, melynek végtelenben fekvő pontja az adott pont. Szerkesztessék meg az adott g egyenes és P_∞ pont összekötő síkja. Olyan $a(a'a'')$ egyenes, mely m egyenessel parallel és g egyenesre illeszkedik, illeszkedik az adott végtelenben fekvő pontra, tehát g és a egyenesek összekötő síkja a keresett sík.



35. ábra.

b) Adva van két végtelenben fekvő pont P_∞ és Q_∞, mint $p(p'p'')$ és $q(q'q'')$ egyenesek végtelenben fekvő pontja, továbbá adva van a végesben fekvő $A(A'A'')$ pont. Szerkesztessék meg e három pont összekötő síkja. Az A pontra illeszkedő és a p, illetőleg q egyenesekkel parallel egyenesek összekötő síkja a keresett sík.

c) Adva van egy végtelenben fekvő egyenes és egy végesben fekvő pont. Szerkesztessék e térelemek összekötő síkja. Végtelenben fekvő egyenest végesben fekvő síkkal adunk meg, melynek végtelenben fekvő egyenese az adott egyenes. Az adott pontra illeszkedő és az adott síkkal parallel sík lesz a keresett sík.

A *c)* alatti feladat egy már tárgyalt feladatnak átfogalmazása. Hasonlóan átfogalmazhatjuk az *a)* és *b)* feladatokat is. Az átfogalmazott *a)* feladat szerint a tér egy végesben fekvő egyenesére oly illeszkedő síkot szerkesztettünk, mely sík egy adott egyenessel parallel. Az átfogalmazott *b)* feladat szerint a tér egy végesben fekvő pontjára oly illeszkedő síkot szerkesztettünk, mely sík két adott kitérő egyenessel parallel.

Metszési feladatok.

50. §. Két sík metszésvonalának, egyenes és sík metszéspontjának sztereometriai meghatározása. Két sík metszésvonala egyenes, ez az egyenes megszerkesztettnek mondható, ha az egyenesnek két nem azonos pontját megszerkesztettük. *Két sík közös egyenesére illeszkedő pontot két illeszkedő egyenes metszéspontjának, vagy egyenes és sík metszéspontjának szerkesztésére vezetjük vissza.* Az első esetben két sík metszésvonalának egy pontját a két síkkal szemben általános helyzetű, harmadik sík segítségével szerkesztjük meg. A harmadik sík az adott síkok mindegyikét egy-egy egyenesben metszi, az így nyert két egyenes közös pontja a két sík metszésvonalának egy pontja. Mert az első sík és segédsík közös egyenesének minden pontja az első síkra illeszkedő pont, a második sík és segédsík közös egyenesének minden pontja a második síkra illeszkedő pont, s így a segédsíkra illeszkedő két egyenes közös pontja mindkét síkra illeszkedő pont. E szerkesztés kétszeres alkalmazásával nyerjük a két sík közös egyenesének két pontját. A második esetben két sík metszésvonalának egy pontját nyerjük, ha a két sík közül az egyikre illeszkedő egyenes és másik sík közös pontját szerkesztjük meg, egy ilyen pont ugyancsak a két sík metszésvonalára illeszkedő pont. E szerkesztés kétszeres alkalmazásával megállapított két pontra illeszkedő egyenes a két sík keresett metszésvonala.

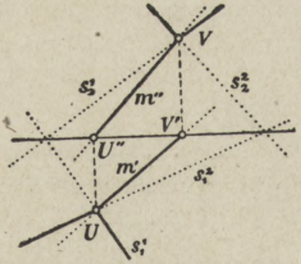
Adott egyenes és adott sík metszéspontjának szerkesztését két illeszkedő egyenes közös pontjára vezetjük vissza. Az adott egyenesre illeszkedő tetszőleges sík és adott sík közös egyenese illeszkedik az adott egyenesre és illeszkedik az adott síkra, tehát a szerkesztett közös egyenes és adott egyenes közös pontja a keresett metszéspont.

A fenti utasítások mutatják, hogy két sík metszésvonalának szerkesztését végeredményben megint csak két sík metszésvonalának szerkesztésére vezetjük vissza, szóval a feladatot önmagával oldjuk meg s így a feladat látszólag megoldhatatlan. A megoldást mégis lehetővé teszi az a körülmény, hogy a szerkesztésnél szereplő segédsík felett szabadon rendelkezünk.

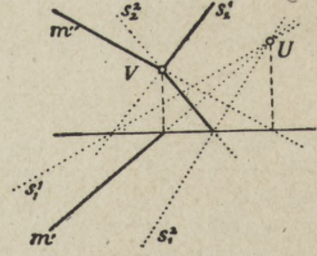
Továbbá ne felejtsük el, hogy két sík metszésvonalát és egyenesnek síkkal való metszéspontját már eddig is felhasználtuk szerkesztéseinkben. Így egyenesnek képe nem más, mint az egyenesre illeszkédő vetítő sík és képsík metszésvonala. Egyenesnek nyompontja nem más, mint az egyenes és képsík metszéspontja. Stb.

51. §. Két sík metszésvonala. Két sík metszésvonalának konstruktív tárgyalásánál kezdetben feltesszük, hogy a síkok nyomvonalakkal adott síkok és csak e pont végén fogjuk tárgyalni tetszőleges illeszkedő egyenesekkel adott síkok metszésvonalának szerkesztését.

1. Legyen adva két sík, $S_1(s_1^1 s_2^1)$ és $S_2(s_1^2 s_2^2)$. A 36. ábrában mindkét sík dűlt, míg a 37. ábrában az egyik sík dűlt, a másik fcszitett. A két sík metszésvonalának egy pontját egy segédsík beve-



36. ábra.

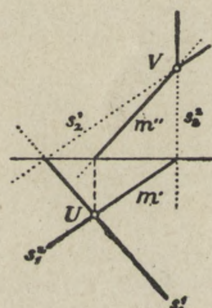


37. ábra.

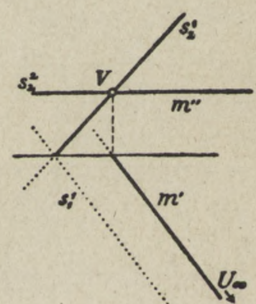
zetésével nyerjük. Legyen a segédsík az első képsík. Az első képsík az első síkot az s_1^1 egyenesben, a második síkot az s_1^2 egyenesben metszi, a két első nyomvonal közös pontja U, e pont a két sík metszésvonalának egy pontja, még pedig a metszésvonal első nyompontja, mert U az első képsíkra illeszkedő pont, második képe tehát a tengelyre illeszkedő pont. Hasonlóan második segédsíkul választhatjuk a második képsíkot, a második nyomvonalak közös pontja, V, szolgáltatja a metszésvonal második nyompontját. Az U, V pontok által meghatározott egyenes a két sík metszésvonala.

Két sík metszésvonalának szerkesztésénél részben a képiesség fokozására, részben a két síkból álló téralakzat térbeli rekonstrukciójának gyakorlására láthatósági viszonyokat is lehet feltüntetni. Előrebocsátjuk, hogy két sík metszésvonala a térben egy bárhol elgondolt szemlélőre nézve mindig látható egyenes, mert a két sík és a végtelenben fekvő sík a teret négy részre bontja és bármelyik szögrészben legyen a szemlélő, a két sík közös egyenesét mindig látja. Tehát két képsík mellett a két sík közös egyenesének az első térrészben fekvő részét teljes vonallal rajzoljuk. Hogy az első sík első nyomvonalából mi látható, mi nem látható, azt a másik sík dönti el. A másik sík az egyenest két félsugárra osztja, e félsugarak közül az egyiket a másik sík eltakarja, ez nem látható, pontozva rajzolandó, a másik félsugarat a másik sík nem takarja el, tehát teljes vonallal rajzolandó, de csak az a része, mely rész az első képsík pozitív részére esik. Hasonlóan elintézhető minden nyomvonalon a láthatóság, amint azt a két ábra mutatja.

2. A nyomvonalakkal adott síkok közül legyen az egyik vetítősík (38. ábra). A két sík metszésvonalának szerkesztése ugyanúgy történik, mint előbb. A szerkesztésből kitűnik, hogy itt nyomvonalaival adott síkra illeszkedő egyenes első képéből megszerkesztettük az egyenes második képét. Valóban, síkra illeszkedő egyenes első képével megadtuk azt az első vetítő síkot, melyre a keresett egyenes illeszkedik s így ez egyenes az adott sík és az egyenes első képével adott első vetítő sík közös egyenese. E feladatban a láthatósági viszonyok feltüntetésénél csak azt kell megjegyezni, hogy az első vetítősík az ábrában szereplő dűlt sík első nyomvonalából nem takar el semmit.



38. ábra.



39. ábra.

3. Nyomvonalaival adott általános helyzetű sík és első képsíkkal parallel helyzetű sík metszésvonalának második nyompontja a két második nyomvonal közös pontja, a metszésvonal első nyompontja az általános helyzetű sík első nyomvonalának végtelenben fekvő pontja (39. ábra). A metszésvonal az általános helyzetű sík első nyomvonalával parallel egyenes, első képe a sík első nyomvonalával parallel, második képe a tengellyel parallel. Az általános helyzetű síkon minden első képsíkkal parallel sík a sík egy speciális helyzetű egyenesét állapítja meg, ezek az egyenesek összességükben egy parallel sugársort adnak, e parallel sugársornak egy-egy egyenese a sík egy első fővonala. Ugyanúgy az általános helyzetű síkot egy a második képsíkkal parallel sík egy a sík második nyomvonalával

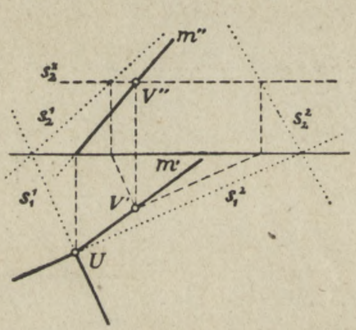
parallel egyenesben metszi, a közös egyenes az általános helyzetű sík egy második fővonala, egy második fővonal második képe a sík második nyomvonalával parallel és első képe a tengellyel parallel.

Nyomvonalaival adott általános helyzetű síkra illeszkedő pontot síkra illeszkedő egyenessel szerkesztettünk, a következőkben e szerkesztésnél igénybevett egyenes legtöbbször a síknak egy első, illetőleg második fővonala lesz.

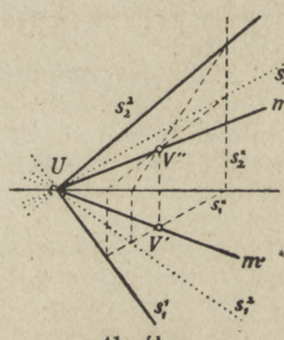
Megállapodunk abban, hogy egy sík első fővonalát h-val és egy második fővonalát v-vel fogjuk jelölni.

Tengellyel parallel vagy tengelyre illeszkedő sík a fővonalaknak csak egy rendszerét tartalmazza, egy első fővonal egyúttal második fővonal is. Ilyen síkon fővonalat a síkra illeszkedő pont segítségével és egy pontot a síkra illeszkedő általános helyzetű egyenes segítségével veszünk fel.

4. Szerkesztessék meg nyomvonalaival adott két sík metszésvonala, de tegyük fel, hogy a második nyomvonalak közös pontja a rajz síkjának rendelkezésünkre álló részéből kiesik (40. ábra). Ekkor

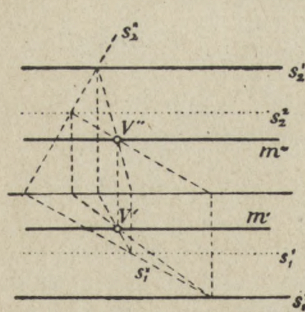


40. ábra.



41. ábra.

az első nyomvonalak közös pontja a metszésvonalnak egy pontja. Egy másik pont szerkesztésére segédsíkot vezetünk be, olyan segédsíkot, melynek mindkét adott síkkal való metszésvonalát az előzők alapján meg tudjuk szerkeszteni, ilyen segédsík egy tetszőleges vetítősík vagy valamely képsíkkal parallel sík. Az ábrában egy az első képsíkkal parallel segédsíkot választottunk. E sík az adott síkok mindegyikét egy-egy fővonalban metszi, a fővonalak közös pontja az eredetileg keresett metszésvonal egy másik pontja.



42. ábra.

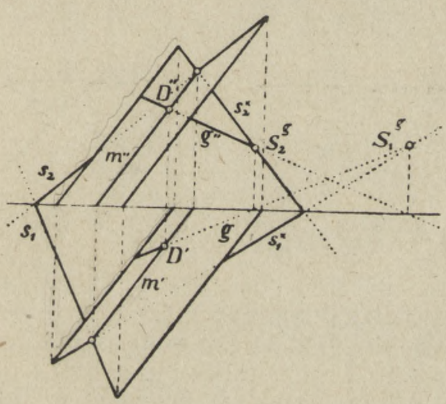
5. Ha nyomvonalaival adott két síknak közös tengelypontja van, akkor segédsíkul vagy valamely képsíkkal parallel síkot, vagy egész általános helyzetű síkot, vagy tetszőleges vetítősíkot alkalmazunk. A 41. ábrában segédsíkul egy tetszőleges első vetítő síkot alkalmatunk. Itt a keresett metszésvonalnak csak egy pontját kell megszerkeszteni, mert egy másik pont a két sík közös tengelypontja.

6. A 42. ábrában két a tengellyel parallel sík metszésvonalát szerkesztettük meg. A két síknak közös tengelypontja a tengely vég-

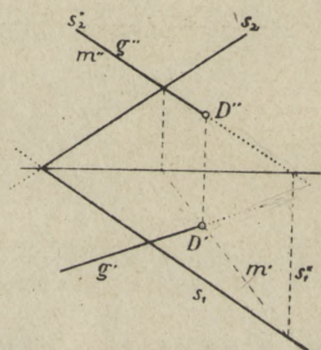
telenben fekvő pontja, c pont a metszésvonalnak pontja, tehát a keresett metszésvonal a tengellyel parallel egyenes lesz. Segédsíkul általános helyzetű síkot vettünk, ennek hátránya, hogy a metszésvonal második pontjának szerkesztésére néhány vonallal több vonalat kellett rajzolni, de előnye, hogy a szerkesztésnél ellenőrzés áll rendelkezésünkre.

52. §. Egyenes és sík metszéspontja. Két képével adott egyenes és nyomvonalaival adott sík metszéspontját, miután nyomvonalakkal adott síkok metszésvonalát meg tudjuk szerkeszteni, most már megállapíthatjuk. Az adott egyenesre nyomvonalaival adott síkot illesztünk, e sík és az eredetileg megadott sík metszésvonalát megszerkesztjük, a metszésvonal és az adott egyenes közös pontja a keresett metszéspont.

1. A 43. ábrában a fenti általános utasítás szerint szerkesztettük meg sík és egyenes metszéspontját. Az adott sík $S(s_1 s_2)$, az adott egyenes $g(g'g'')$, a g egyenesre illesztett segédsík $S^x(s_1^x s_2^x)$, a segéd-



43. ábra.



44. ábra.

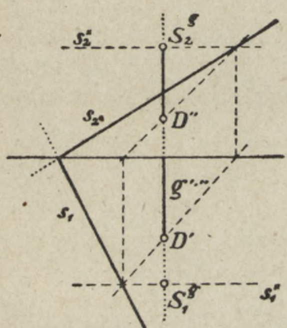
sík és adott sík metszésvonala $m(m'm'')$, m és g illeszkedési pontja, $D(D'D'')$, a keresett pont. A metszéspont első és második képét egymástól függetlenül nyerjük s így a szerkesztésre kontrollt is nyertünk.

2. Egyenes és sík metszéspontjának szerkesztésénél az egyenesre illesztett segédsík lehet egy első, illetőleg második vetítősík is. A 44. ábrában az egyenesre illesztett második vetítősíkot alkalmaztuk. Az ábrában alkalmazott jelölések mellett a vetítősík második nyomvonala a g''-vel azonos egyenes, első nyomvonala a tengelyre merőleges egyenes. A vetítősík az adott síkot az $m(m'm'')$ egyenesben metszi, m'' azonos az adott egyenes második képével, m' egyenest vagy úgy szerkesztjük meg, mint az adott sík és segédsík metszésvonalának első képét, vagy mint az adott síkra illeszkedő m egyenes második képéből annak első képét, mindkét esetben ugyanazon vonalakat rajzoljuk. Az m és g egyenesek első képeinek közös pontja a metszéspont első képe, a g egyenes második képére való felvetítéssel nyerjük a metszéspont második képét.

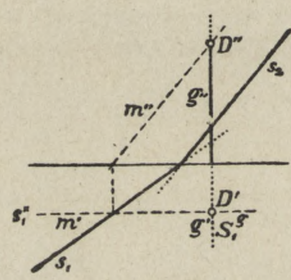
A szerkesztésnél alkalmazott speciális segédsíkkal rövidebb úton nyertük a metszéspontot, de a kontroll elmaradt.

Megjegyzendő, hogy e szerkesztésnél az m és g egyenes második vetítősíkja közös, az ilyen egyenesekről azt szoktuk mondani, hogy második födőegyenesek. Az adott g egyenesnek végtelen sok második födőegyenese van, minden egyenes, mely a g egyenes második vetítősikjára illeszkedik, a g egyenes második födőegyenese. A metszéspont meghatározásánál a g egyenes ama egyetlen második födőegyenesét alkalmaztuk, mely egyúttal az adott síkra is illeszkedik.

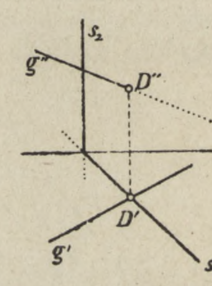
3. Nyomvonalaival adott sík és nyompontjaival adott profil egyenes metszéspontjának szerkesztésénél az egyenes adott síkra illeszkedő födőegyenesével nem boldogulunk (45. ábra). Ez esetben,



45. ábra.



46. ábra.



47. ábra.

amint azt az ábrából is leolvashatjuk, előnyösen az adott egyenesre illeszkedő, tengellyel parallel segédsíkkal operálunk.

4. Nyomvonalaival adott sík és vetítősugár metszéspontjának szerkesztésénél az egyenesre illeszkedő és képsíkkal parallel segédsíkkal állapítjuk a metszéspontot (46. ábra). A segédsík az adott síkot egy fővonalban metszi, a fővonal és egyenes közös pontja a keresett pont.

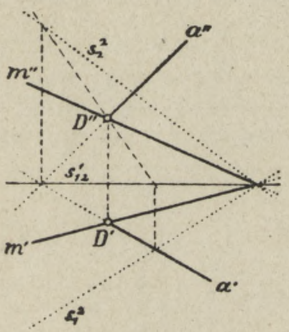
5. Szerkesztessék egy első vetítősík és egyenes metszéspontja (47. ábra). Az adott egyenesre illesztett első vetítősík, mint segédsík, az adott első vetítősíkot egy első vetítősugárban metszi, ennek az első vetítősugárnak az első képe az adott egyenes első képének és az adott sík első nyomvonalának közös pontja, mivel a metszéspont erre az első vetítősugárra illeszkedik, a metszéspont első képe a vetítősugár pontszerű első képével azonos pont, második képét az adott egyenes második képére való felvetítésével közvetlenül nyerjük.

E szerkesztésből a jövő számára megjegyezzük azt, hogy egyenes és sík metszéspontját akkor tudjuk legegyszerűbben meghatározni, ha a sík vetítősík.

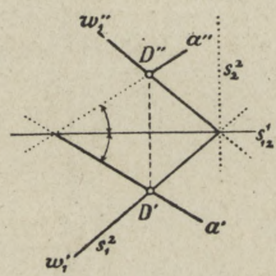
53. §. Metszési feladatok tetszőleges illeszkedő egyenesekkel adott síkok esetében. Az eddig tárgyalt metszési feladatokban egy-egy adott sík nyomvonalaival adott sík volt. A bemutatott metszési feladatok arra képesítenek, hogy bármily módon adott két sík metszésvonalát, illetőleg bármily módon adott sík és egyenes metszéspontját megszerkesszük.

1. Szerkesszük meg egy a tengelyre illeszkedő S_1 sík és egy nyomvonalaival adott S_2 sík metszésvonalát. (48. ábra.) A tengelyre illeszkedő S_1 síkot ábrázoltuk, ha e síkra illeszkedő $a(a'a'')$ egyenes két képét megadtuk. A két sík metszésvonalának egy pontja az S_2 sík tengelypontja, a metszésvonalnak egy második pontja az a egyenes és S_2 sík metszéspontja.

2. Szerkesszük meg az első felezősík és egy nyomvonalaival adott tetszőleges első vetítősík metszésvonalát. (49. ábra.) Az első felezősík jellemzésére felvesszük egész tetszőlegesen az első felező-



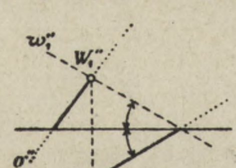
48. ábra.



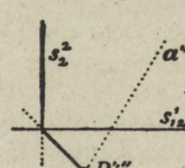
49. ábra.

síkra illeszkedő $a(a'a'')$ egyenest. A keresett metszésvonal egy pontja a vetítősík tengelypontja, egy másik pontja az a egyenes és az adott első vetítősík metszéspontja. Legyen az első felezősík és adott első vetítősík metszésvonala $w_1(w_1'w_1'')$, akkor a szerkesztés alapján a következő eredményt nyertük: a w_1 egyenes első képe azonos a vetítősík első nyomvonalával, az egyenes második képe az egyenes első képének szimmetrikus egyenese a tengelyre nézve. Az itt nyert szerkesztésbeli eredményt előnyösen felhasználhatjuk tetszőleges egyenes és első felezősík metszéspontjának meghatározására.

3. Szerkesztessék meg a $g(g'g'')$ egyenes és első felezősík metszéspontja. (50. ábra.) Az egyenesre illesztett segédsík az egye-



50. ábra.



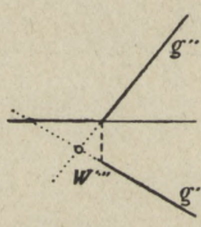
51. ábra.

nes első vetítősíkja, e sík az első felezősíkot a w_1 egyenesben metszi, w_1' azonos g' és w_1'' a g' szimmetrikusa a tengelyre nézve. A keresett pont második képe w_1'' és g'' közös pontja, W_1'', első képét levetítéssel nyerjük.

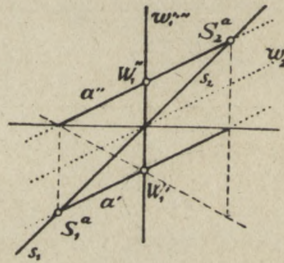
4. Második felezősík és első vetítősík metszésvonalának szer-

kesztésénél (51. ábra), ha e pont 2. feladata szerint eljárunk, oly egyenest nyerünk, melynek mindkét képe a képsíkok egyesítése után a vetítősík első nyomvonalával azonos egyenes.

5. A 4. feladat alapján szerkesszük meg egy $g(g'g'')$ egyenes és második felezősík közös pontját. (52. ábra.) A g egyenesre illesztett segédsík legyen a g egyenes első vetítősíkja, eme első vetítősík metszi a második felezősíkot a w_2 egyenesben, a w_2 egyenes első és második képe a képsíkok egyesítése után a g egyenes első képével azonos egyenes. A g egyenes második képének és a w_2 egyenes második képének közös pontja a keresett metszéspont második képe, levetítéssel nyernők a metszéspont első képét, de ez a képsíkok egyesítése után a metszéspont második képével azonos pont. A szerkesztés alapján kimondhatjuk, hogy egy egyenes és második felezősík metszéspontjának két képe a képsíkok egyesítése után az a pont, mely pontban az egyenes két képe metszi egymást. Ugyanezen eredményhez jutunk akkor is, ha az egyenesnek a második felezősíkra



52. ábra.



53. ábra.

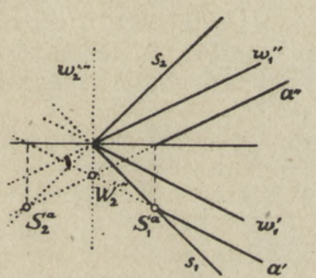
illeszkedő pontját keressük, t. i. egyenesre illeszkedő pont első képe az egyenes első képére, második képe az egyenes második képére illeszkedő pont, de a második felezősíkra illeszkedő pont két képe a képsíkok egyesítése után összeesik, s így a három feltételnek eleget tévő pont a képsíkok egyesítése után az egyenes első és második képének illeszkedési pontja.

6. Szerkesszük meg egy nyomvonalaival adott második felezősíkra merőleges síknak metszésvonalát az első felezősíkkal. (53. ábra.) E végett vegyünk fel a felezősíkra merőleges síkban oly egyenest, melynek nyompontjai a sík tengelypontjától egyenlő távolságban vannak, de az egyenes ne legyen profil egyenes. Ezáltal a síkban oly $a(a'a'')$ egyenest szerkesztettünk, melynek két képe a képsíkok egyesítése után egymással parallel, szóval az a egyenes a második felező síkkal parallel egyenes. Megszerkesztve az a egyenes metszéspontját az első felezősíkkal, e pont 3. feladata szerint oly pontot nyerünk, mely ponthoz tartozó rendezővonal az adott sík tengelyponjára illeszkedik. T. i. az a'' egyenes szimmetrikusát a tengelyre nézve legegyszerűbben úgy szerkesztjük meg, hogy az a egyenes második nyompontjának szimmetrikusát összekötjük az a egyenes első nyompontjának második képével. Az a egyenes második nyompontjának első képe, második nyompontjának szimmetrikus pontja a tengelyre nézve, az a egyenes első nyompontja és első nyompontjának második képe egy oblongum négy csúcspontja. Az oblongum

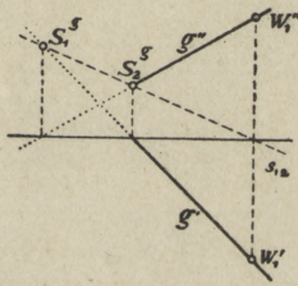
középpontja az a egyenes és első felezősík metszéspontjának első képe, e pont az a egyenes nyompontjainak rendezővonalaitól egyenlő távolságban van. Az adott sík tengelypontja az a egyenes nyompontjainak rendezővonalaitól szintén egyenlő távolságban van, s így kell, hogy az a egyenes és első felezősík metszéspontjának rendezővonala a sík tengelypontjára illeszkedjék. A második felezősíkra merőleges sík és első felezősík közös egyenesének egy pontja a sík tengelypontja, tehát a második felezősíkra merőleges síknak metszésvonala az első felezősíkkal a sík tengelypontjára illeszkedő profil egyenes. Ezt az eredményt sztereometriai meggondolásokkal is nyerjük. Ugyanis az első felezősík a második felezősíkra merőleges, az adott sík szintén a második felezősíkra merőleges. Egy síkra merőleges két sík közös egyenese a síkra, jelen esetben a második felezősíkra merőleges, de minden második felezősíkra merőleges egyenes profil egyenes.

E feladat teljes kiaknázása kedvéért megemlítjük, hogy a második felezősíkra merőleges sík a második felezősíkot egy egyenesben metszi, ez az egyenes a síkban felvett a egyenessel parallel.

A most megoldott feladathoz hasonló feladat a következő: Szerkesztessék meg egy az első felezősíkra merőleges sík és második felezősík metszésvonala. (54. ábra.) E végett vegyünk fel a sík-



54. ábra.



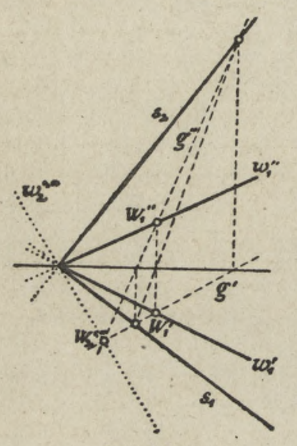
55. ábra.

ban egy $a(a'a'')$ egyenest, két nyompontja megint a sík tengelypontjától egyenlő távolságban van, de az egyenes ne legyen profil egyenes. Ha az a egyenes és második felezősík metszéspontját az adott sík tengelypontjával összekötjük, megint profil egyenest nyerünk, ez az egyenes az adott sík és második felezősík metszésvonala. Itt ugyancsak megjegyzésként megemlítjük, hogy az adott sík és első felezősík metszésvonala a síkban felvett a egyenessel parallel.

7. E § 6. feladatában elintézett szerkesztés alapján tetszőleges egyenes és első felezősík metszéspontjának szerkesztésére még egy igen előnyös eljárást nyertünk. Legyen adva a $g(g'g'')$ egyenes és szerkesszük meg a g egyenes és első felezősík metszéspontját. (55. ábra.) Egyenes és sík metszéspontját az egyenesre illesztett segédsík révén nyerjük. Az egyenesre illesztett segédsík legyen a második felezősíkra merőleges sík. A képsíkok egyesítése után az egyesített két nyomvonal az egyenes első és második nyompontjának összekötő egyenese. A segédsík tengelypontjára és a segédsíkra illeszkedő profil egyenes a segédsík és első felezősík metszésvonala.

E profil egyenes és adott egyenes közös pontja az adott egyenes és első felezősík metszéspontja.

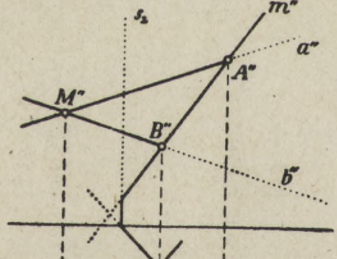
E feladatból látjuk, hogy egyenes és első felezősík metszéspontjának megszerkesztésére, amennyiben az egyenes két nyompontját ismerjük, csak két egyenest kell rajzolni; míg az 5. feladatból láttuk, hogy egyenes és második felezősík metszéspontjának szerkesztésére, amennyiben az egyenes két képét ismerjük, egyenest nem is kell rajzolni, a rajz síkjában a két kép metszéspontja a keresett pontnak két képe.



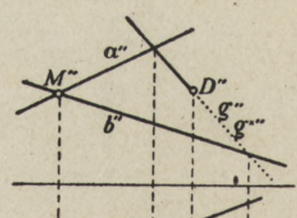
56. ábra.

8. Miután egyenesnek úgy az első, mint a második felezősíkkal való metszéspontját igen rövid úton meg tudjuk szerkeszteni, ezt felhasználhatjuk arra, hogy nyomvonalaival adott síknak úgy az első, mint a második felezősíkkal való metszésvonalát megállapítsuk. (56. ábra.) A metszésvonalnak egy pontja a sík tengelypontja, egy másik pontját egy a síkra illeszkedő egyenesén nyerjük, ha ennek úgy az első, mint a második felezősíkkal való metszéspontját megállapítjuk. A tengelypont és az egyenesnek az első felezősíkra illeszkedő pontja meghatározza a sík és első felezősík metszésvonalát, a tengelypont és az egyenesnek a második felezősíkra illeszkedő pontja meghatározza a sík és a második felezősík metszésvonalát.

9. Szerkesszük meg két tetszőleges illeszkedő egyenessel adott sík és első vetítősík metszésvonalát. (57. ábra.) Legyenek az illeszkedő egyenesek $a(a'a'')$ és $b(b'b'')$, a vetítősík $S(s_1 s_2)$. A két sík



57. ábra.



58. ábra.

metszésvonala az a és S sík közös pontjának, továbbá a b és S sík közös pontjának, az ábrában az A és B pontok összekötő egyenese.

Ugyanúgy szerkesztjük meg illeszkedő egyenesekkel adott síknak és az első képsíkkal parallel síknak, illetőleg a második képsíkkal parallel síknak metszésvonalát. Az első esetben megszerkesztjük az illeszkedő egyenesekkel adott síknak egy első, a második esetben egy második fővonalát.

10. Illeszkedő, a, b egyenesekkel adott síknak és g egyenesnek metszéspontját úgy szerkesztjük meg, hogy megszerkesztjük a g egyenesnek pld. második födőegyenesét a síkban, a födőegyenes és adott egyenes illeszkedési pontja a keresett metszéspont. (58. ábra.)

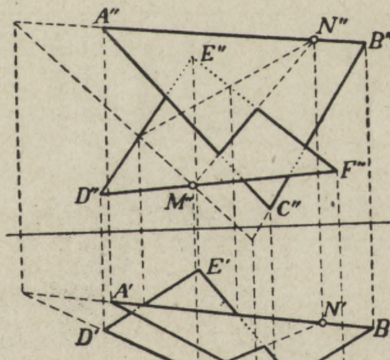
E feladat alapján illeszkedő egyenesekkel adott síkok metszésvonalát is megszerkeszthetjük. Az adott egyenesek közül kettőnek megszerkesztjük azon síkkal való metszéspontját, melyre nem illeszkedik, a nyert pontok összekötő egyenese a metszésvonal.

11. Síkpoligon ábrázolásánál a poligon három csúcspontját tetszőlegesen vehetjük fel, mert három nem egy egyenesre illeszkedő pont síkot határoz meg. A poligon további csúcspontját a három pont által meghatározott síkra illeszkedően kell felvenni.

Ha egy poligon négy vagy több csúcspontját tetszőlegesen vesszük fel, akkor e poligon csúcspontjai általában nem illeszkednek egy síkra. Oly poligon, melynek csúcspontjai nem illeszkednek egy síkra torzpoligon.

Egy zárt síkpoligon véges síkrészt határol. Vegyük fel két zárt síkpoligon véges síkrészét, akkor e véges síkrészek általában metszhetik egymást és ha a síkrészeket nem gondoljuk átlátszóknak, részben vagy egészen eltakarhatják egymást. Legközelebbi feladatunk tehát a két síkrész metszésvonalának szerkesztése, és úgy az első projekcióban, mint a második projekcióban a láthatósági viszonyoknak a megállapítása.

Adva vannak az ABC ($A'B'C'$, $A''B''C''$) és DEF ($D'E'F$, $D''E''F''$) síkrészek. (59. ábra.) A két síkrész metszésvonalának egy-egy pontja egy tetszőleges poligon oldalnak és a másik poligon síkjának metszéspontja. Az ábrában a DF egyenesnek az ABC síkkal való metszéspontját, M($M'M''$) és az AB egyenesnek a DEF síkkal való metszés pontját, N($N'N''$) pontokat szerkesztettük meg, mindkét esetben az egyenesek első födőegyeneseivel operáltunk. Az M és N pontok összekötő egyenese a két sík metszésvonala. Mivel határolt síkrészek áthatásáról van szó, a metszésvonalnak csak az a része érvényesül, mely rész mindkét poligon belső pontja, illetőleg az egyik poligonra nézve belső, de a másik poligonra nézve határpont.

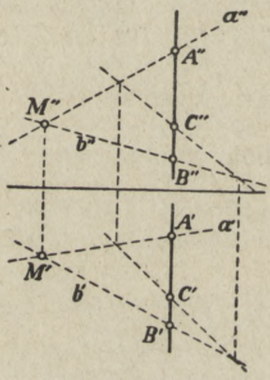


59. ábra.

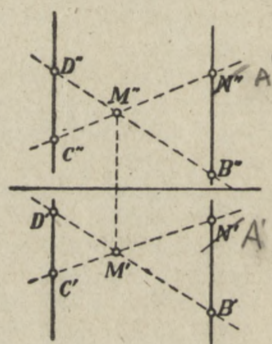
A láthatósági viszonyokat födőpontok segítségével döntjük el. Így az első képre nézve a BC véges darab a DEF háromszög síkja alatt van, ezt leolvashatjuk a BC és EF egyenesek első födőpontjainak második képeiből, az EF egyenesen fekvő pont magasabban van, mint a BC egyenesen lévő pont, tehát az első képben a födőpontok környezetében az EF egyenes látható. Az F ponttól az E pont felé haladva az egyenes addig látható, míg a két sík metszésvonalát nem metszi, innen kezdve nem látható a másik síkrész határolásáig. Az ED egészen az ABC sík alatt van, DF egyenes az M pontig az ABC sík alatt van, míg MF darabja az ABC sík fölött van. Evvel eldöntöttük az első projekcióban az ABC háromszög láthatósági viszonyait is. A két síkrész második projekciójában a láthatóság eldöntésénél második födőpontokból indulunk ki.

54. §. Kiegészítő megjegyzések illeszkedő térelemek ábrázolásához. Profil egyenesre vonatkozó illeszkedési feladatok konstruktív kivitelénél hol az osztóviszony fogalmához, hol pedig egy új képsík bevezetéséhez folyamodtunk. Az illeszkedési és metszési feladatok tárgyalása után a profil egyenesre vonatkozó illeszkedési feladatok egyszerűsíthetők.

A) Adott profil egyenesre illeszkedő pont szerkesztése. Legyen egy profil egyenes két pontja $A(A'A'')$ és $B(B'B'')$, továbbá egy a profil egyenesre illeszkedő C pont első képe C'. (60. ábra.) Szerkesztessék



60. ábra.

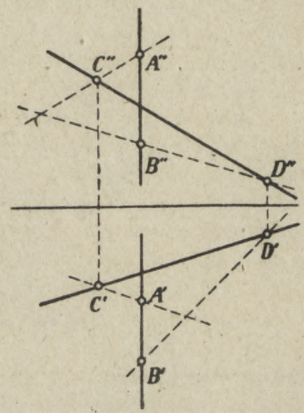


61. ábra.

meg a C pont második képe. Felvesszük a tér $M(M'M'')$ tetszőleges pontját, ezt összekötjük a profil egyenes A és B pontjával. Az M pontra illeszkedő két egyenes meghatároz egy síkot, e síkra illeszkedik az adott profil egyenes is. Ha most felvesszük egy a síkra illeszkedő egyenes első képét a C pont első képére illeszkedően és megszerkesztjük ez egyenes második képét, akkor ez kimetszi a profil egyenes második képén a C pont második képét.

B) Adott pontra illeszkedő és profil egyenessel parallel egyenes szerkesztése. Legyen a profil egyenes két pontja $A(A'A'')$ és $B(B'B'')$, továbbá a tér egy tetszőleges adott pontja $C(C'C'')$. (61. ábra.) Szerkesztessék a C pontra illeszkedő és az adott profil egyenessel parallel egyenes. A keresett profil egyenes megszerkesztettnek mondható, ha egy erre illeszkedő D pont két képét ismerjük. Mindenekelőtt megrajzoljuk az A és C pontok összekötő egyenesének két képét, ezen az egyenesen felveszünk tetszőlegesen egy M pontot, megrajzoljuk az MB egyenest, ez az egyenes, illetőleg ennek képei metszik a C pontra illeszkedő profil egyenes képeit a keresett D', illetőleg D'' pontban.

C) Két egyenes illeszkedési kritériuma. Két, mindkét képsíkkal szemben általános helyzetű, metsző egyenes illeszkedési kritériuma nem volt alkalmazható, ha az egyik egyenes profil egyenes volt. Két illeszkedő egyenes nemcsak metszéspontot, hanem összekötő síkot is állapít meg, és az egyik egyenesre illeszkedő pontot összekötve a másik egyenes egy pontjával, e síkra illeszkedő egyenest nyerünk. Legyen az adott profil egyenes két pontja A és B. Egy tetszőleges egyenes két pontja C és D. (62. ábra.) Ha az AB és CD egyenesek illeszkedők, akkor AC és BD egyenesek szintén illeszkedő egyenesek, de akkor utóbbi egyenesek második képeinek metszéspontja és ugyanezen egyenesek első képeinek metszéspontja egy a tengelyre merőleges egyenest állapít meg, ellenkező esetben az eredetileg adott két egyenes kitérő. Megjegyzendő, hogy a szerkesztésnél ugyanúgy felhasználhatók az AD és BC egyenesek is. Az ábrában az AB és CD egyenesek kitérők.



62. ábra.

Ha mindkét egyenes nyompontjaival adott, akkor, ha az egyenesek illeszkedők, az egyenesek második nyompontjainak összekötő egyenese és az ugyanezen egyenesek első nyompontjainak összekötő egyenese a tengely egy pontjára illeszkednek.

D) Profil síkra illeszkedő két egyenes metszéspontja. Egy profil síkra illeszkedő két egyenes metszéspontját külön meg kell szerkeszteni. E végett az adott profil egyenesek mindegyikére illesztünk egy-egy általános helyzetű síkot, a két sík metszésvonalára illeszkedik a keresett pont.

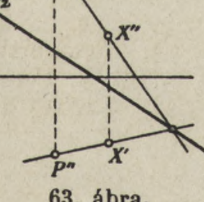
E) Síkbeli rendszer két képe közötti rokonság. Síkbeli rendszer egy elemének van első és második képe. Síkbeli rendszer első képe az egész első képsík, mint síkbeli rendszer; síkbeli rendszer második képe az egész második képsík, mint síkbeli rendszer. A két képsík egyesítésével nyerünk egyesített síkbeli rendszereket. Az egyesített síkbeli rendszerek elemei között kölcsönös és egyértelmű vonatkozás áll fenn, mert az eredeti síkbeli rendszer egy pontjának, illetőleg egy egyenesének van meghatározott első és második képe. Ha az eredeti síkbeli rendszer egy elemének első és második képét a képsíkok egyesítése után megfelelőknek tekintjük, akkor mondhatjuk, hogy pontnak pont, egyenesnek egyenes felel meg, illeszkedő elemeknek az egyik rendszerben illeszkedő elemek felelnek meg a másik rendszerben. Mivel egy megfelelő pontpár az eredeti sík egy pontjának első és második képe, az egyesített síkbeli rendszerek közti vonatkozásnál a megfelelő pontok összekötő egyenesei parallel egyenesek; egyenesek, melyek a projekció tengelyére merőlegesek. Az eredeti síkbeli rendszer egy egyenesének két képe a képsíkok egyesítése után, szolgáltat egy megfelelő egyenespárt, ilyen egyenespárt a tengelyre merőleges egyenes megfelelő pontpárban metszi. Egy megfelelő egyenespárnak van egy közös pontja, ez a pont megfelelőjével összeesik, a vonatkozásban egy önmagának megfelelő pont. Az egyesített síkbeli rendszerek önmaguknak megfelelő pontjai azon pontok, mely pontok első és második képei a képsíkok egyesítése után összeesnek. E pontok az eredeti síkbeli rendszerben egy egyenesen vannak, az egyenes az eredeti sík és második felezősík metszésvonala. Tehát az egyesített síkbeli rendszerekben az önmaguknak megfelelő pontok egy egyenesen, az eredeti sík és második felezősík közös egyenesének két összeeső képén vannak, szóval a megállapított vonatkozásban a megfelelő egyenesek metszéspontjai egy egyenes pontsor pontjai.

Egy meghatározott eredeti sík közvetíti a két képsík összeejtéséből nyert egyesített síkbeli rendszerek elemeinek megfeleltetését, a megfeleltetésből nyert eme vonatkozás az axiális affinitás.

Az axiális affinitásban a megfelelő pontok összekötő egyenesei parallelek, e parallel egyenesek közös iránya az affinitás iránya; az axiális affinitásban a megfelelő egyenesek metszéspontjai egy egyenesen vannak, ez az egyenes az affinitás tengelye.

Egyesített síkbeli rendszerek axiális affinitása meg van határozva, ha ismerjük az affinitás tengelyét és a tengelyre nem illeszkedő megfelelő pontpárt, mert az affinitás tengelye az eredeti sík egy egyenesének két összeeső képe, míg a megfelelő pontpár az eredeti sík egy pontjának két képe. Már pedig egy egyenes és az egyenesre nem illeszkedő pont az eredeti síkot egyértelműen határozza meg, és a meghatározott eredeti sík egyértelműen állapítja meg a két képsík összeejtéséből nyert egyesített síkbeli rendszerek egynemű elemeinek megfelelkezését.

Az axiális affinitást előnyösen alkalmazhatjuk síkbeli alakzatok két képének szerkesztésénél. Legyen adva egy síknak a második felezősíkkal való metszésvonala w_2 és egy a síkra illeszkedő pont, $P(P'P'')$. (63. ábra.) Ha e síkra illeszkedő X pont első képét tetszőlegesen felvesszük, akkor második képét az affinitás felhasználásával úgy szerkesztjük meg, hogy az X pont első képét összekötjük az adott P pont első képével, az így nyert egyenesnek megállapítjuk a második felezősíkkal való metszéspontját, e pontot összekötjük az adott P pont második képével, ezzel nyertünk megfelelő egyeneseket, az X pont első képére illeszkedő affinitási sugár kimetszi az egyenes második képén az X pont második képét.



63. ábra.

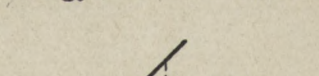
Tengelyre illeszkedő síkot a tengellyel és a síkra illeszkedő pont két képével adtunk meg. Amikor tengelyre illeszkedő sík pontjainak, illetőleg egyeneseinek első képeiből megszerkesztettük azok második képeit, akkor az axiális affinitást alkalmaztuk. Ekkor a sík és második felezősík metszésvonala a projekció tengelye, az affinitás iránya az affinitás tengelyére merőleges.

Egyesített síkbeli rendszerek axiális affinitása az elemekből ismeretes egyes vonatkozásoknak általánosítása. Ha az eredeti síkot a két képsíkkal szemben speciális helyzetben választjuk, akkor a két képsík egyesítéséből nyert axiális affinitás egy-egy ismeretes vonatkozásba megy át. *a)* Legyen az eredeti sík a második felezősík, akkor a vonatkozás *az azonosság,* megfelelő pontok, megfelelő egyenesek összeesnek, a második felezősík egy alakzatának első és második képe födésben van, a vonatkozás kongruencia födésben. *b)* Legyen az eredeti sík a második felezősíkkal parallel, e síkra illeszkedő elemek képei közti vonatkozás *kongruencia perspektív helyzetben,* mert a második felezősíkkal parallel helyzetű síkra illeszkedő alakzat első és második képe két egybevágó alakzat és a megfelelő pontok parallel egyenesekre illeszkednek. Az affinitás tengelye az egyesített képsíkok közös végtelenben fekvő egyenese. *c)* Legyen az eredeti sík az első felezősík, e sík közvetítésével nyert affin vonatkozás *az orthogonális szimmetria,* melynek tengelye a projekció tengely stb. *d)* Legyen az eredeti sík az első felezősíkkal parallel, akkor e sík közvetítésével nyert affin vonatkozás ugyancsak *az orthogonális szimmetria,* a szimmetria tengelye a sík és második felezősík metszésvonalának képe. Stb. *e)* Legyen az eredeti sík a második felezősíkra merőleges, akkor e sík közvetítésével nyert affin vonatkozás *a ferde szimmetria* stb.

Eddig azt láttuk, hogy egy eredeti sík az egyesített képsíkok elemei között kölcsönös és egyértelmű vonatkozást létesít. De ha az eredeti sík vetítősík, akkor az egyesített képsíkok elemei közti vonatkozás már nem kölcsönös és egyértelmű. Így, ha a sík első vetítősík, akkor minden végesben fekvő pont második képéhez egy és csakis egy első kép tartozik, míg az első képsík egy tetszőleges pontjának megfelelője a második képsík végtelenben fekvő egyenesének egy pontja, de ha az első képsík pontja a sík első nyomvonalára illeszkedő pont, annak második képe határozatlan. Az első képsíkra merőleges sík az egyesített képsíkok elemei között szintén affin vonatkozást létesít, ez a vonatkozás már nem kölcsönös és egyértelmű, az affin vonatkozásnak vannak szinguláris elemei, ezek az itt tárgyalt esetben a vetítősík első nyomvonala az első képsíkban és a második képsíkban a második képsíknak végtelenben fekvő egyenese. *Affinitás szinguláris elemekkel szinguláris affinitás.*

55. §. A sík transzformációja. Sík transzformációján értjük a síkot meghatározó térelemeknek transzformációját. Ez a tágabb értelemben vett síktranszformáció a pont és egyenes transzformációjával elintézettnek mondható. Szűkebb értelemben a sík transzformációján értjük egy adott síknak a bevezetett új képsíkon lévő nyomvonalának szerkesztését. Az új képsík az adott síkot egy egyenesben metszi, az egyenes új képének előállítása a szűkebb értelemben vett síktranszformáció lényege.

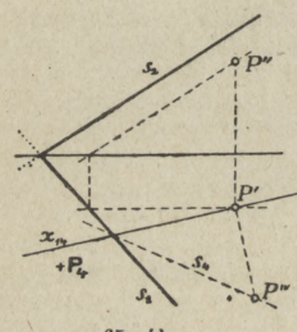
Szerkesszük meg nyomvonalaival adott sík új nyomvonalát, az s_4 egyenest, ha az új képsíkot az első képsíkra merőlegesen választjuk (64. ábra). Az új képsík egy első vetítősík, e vetítősík az adott síkot az s_4 egyenesben metszi. Az s_4 első képe az új tengellyel azonos egyenes, első


64. ábra.

nyompontja az új tengely és az adott sík megmaradó első nyomvonalának közös pontja, második nyompontja a sík második nyomvonalának ama pontja, melyben a régi és új tengely közös pontjára illeszkedő és a régi tengelyre merőleges egyenes a második nyomvonalat metszi. Az első nyompont negyedik képe önmaga, ez az új rendszerben a sík tengelypontja, ha a második nyompont negyedik képét a szokott módon még megszerkesztjük, akkor a nyompontok negyedik képeinek összekötő egyenese a sík negyedik nyomvonala.

A szerkesztésből látjuk, hogy a sík negyedik nyomvonalának konstruálására nem kell ismerni a negyedik nyomvonal második képét, ezért a következőkben e kép rajzolását mellőzni fogjuk.

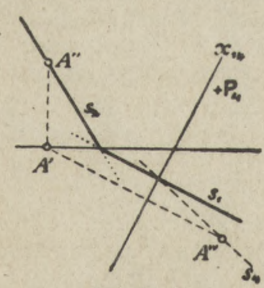
A szerkesztés gyors kivitele szempontjából lényeges, hogy a régi és új tengely metszéspontja, továbbá a negyedik nyomvonal második nyompontja a rajz síkján hozzáférhető pontok legyenek. Amennyiben e pontok kiesnek (65. ábra), a negyedik nyomvonal szerkesztésénél a negyedik nyomvonal egy pontjának első képét, ez mindenesetre az új tengelyre illeszkedő pont, tetszőlegesen felveszszük; e pontnak, mint az adott síkra illeszkedő pontnak, megszerkesztjük a második képét, az ily módon két képével megadott pont negyedik képére illeszkedik a sík negyedik nyomvonala.



65. ábra.

Ha a sík két tetszőleges egyenessel adott, akkor a sík negyedik nyomvonalát úgy szerkesztjük meg, hogy meghatározzuk az egyenesek negyedik képeit, majd megállapítjuk az egyenesek új nyompontjait, az új nyompontok összekötő egyenese a sík negyedik nyomvonala.

56. §. Adott síkra merőleges új képsík bevezetése. Legyen adva nyomvonalaival a két képsíkkal szemben általános helyzetű sík. Bevezetendő oly új képsík, mely az adott síkra merőleges. Képsíkra merőleges sík egyik nyomvonala a tengelyre merőleges. Tehát az új tengelyt pl. az első képsíkban az adott sík első nyomvonalára merőlegesen kell választani, akkor az első és negyedik képsíkból álló képsíkrendszerben az adott sík negyedik vetítősík lesz. A sík negyedik nyomvonalát vagy úgy szerkesztjük meg, ahogy azt az előzőkben láttuk, de megszerkeszthetjük úgy is, hogy a sík egy tetszőleges pontjának megszerkesztjük a negyedik képét, e pont mindenesetre a sík negyedik nyomvonalának egy pontja. Mert első vetítősíkra illeszkedő pont első képe a sík első nyomvonalára illeszkedő pont, ugyanúgy a negyedik vetítősíkra illeszkedő pont negyedik képe a sík negyedik nyomvonalára illeszkedő pont (66. ábra).



66. ábra.

Adott síkra merőleges új képsík a sík egy fontos egyenesét metszi ki. Ha a síkra merőleges új képsík az első képsíkra merőleges, akkor az új képsík a síkot egy első esésvonalban metszi. Tehát *a sík egy első esésvonala a sík olyan egyenese, melynek első képe a sík első nyomvonalára, ill. a sík első fővonalának első képére merőleges.* Az összes első esésvonalak a síkra illeszkedő parallel egyenesek egy rendszere. Ugyanúgy a *sík második nyomvonalára merőleges, síkra illeszkedő egyenes a sík egy második esésvonala.* Egy sík esésvonalainak két rendszere, amennyiben csak két képsíkot tételezünk fel, általában a sík fővonalainak két rendszerétől különböző, de ha pl. a sík egy első vetítő sík, akkor a sík egy első fővonala egyúttal a síknak második esésvonala, és a síknak egy második fővonala egyúttal a síknak egy első esésvonala. Tengellyel parallel sík első esésvonala egyúttal a sík második esésvonala.

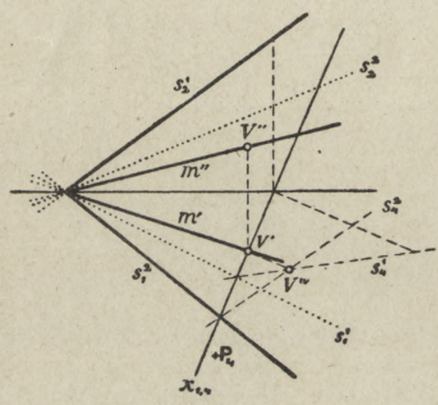
Két tetszőleges egyenessel adott síkra merőleges új képsíkot, mely képsík az első képsíkkal alkot két képsíkból álló képsíkrendszert, úgy vezetünk be, hogy az első képsíkban az új tengelyt az adott sík egy megszerkesztett első fővonalának első képére merőlegesen vesszük fel, mert a síkra illeszkedő első fővonal első képe a sík első nyomvonalával parallel egyenes.

57. §. Adott síkkal parallel új képsík bevezetése. Adott két képsík esetében az egyik képsíkkal parallel sík a másik képsíkra merőleges. Általános helyzetű síkkal parallel új képsík az eredeti két képsík egyikével sem alkothat két képsíkból álló új képsíkrendszert, mert az új képsíkkal parallel síknak a megmaradó képsíkok egyikére merőlegesnek kellene lennie. Tehát a két képsíkkal szemben általános helyzetű sík esetében közvetlenül a síkkal parallel új képsíkot nem vezethetünk be, ez csak akkor lehetséges, ha a sík a meglévő képsíkok egyikére merőleges. Ha a sík pl. az első képsíkra merőleges, akkor egy az első képsíkra merőleges új képsík az első képsíkkal alkothat oly két képsíkból álló képsíkrendszert, mely rendszerben az adott sík az új képsíkkal parallel. Mivel a $P_1\,P_4$ rendszerben az új képsík az adott síkkal parallel, az új tengelyt a megmaradó nyomvonallal párhuzamosan kell választani. Ezen meggondolások alapján közvetve tudunk tetszőleges síkkal parallel új képsíkot bevezetni. Először az előbbi pont alapján bevezetünk új képsíkot, mely az adott síkra merőleges, legyen ez a képsík a negyedik képsík. A negyedik képsíkon megszerkesztjük a sík negyedik nyomvonalát, ha most a negyedik képsíkra merőleges új képsíkot, az ötödik képsíkot úgy vezetjük be, hogy az ötödik képsíkot jellemző x_{45} tengely a sík negyedik nyomvonalával parallel, akkor az ötödik képsík az eredeti síkkal parallel.

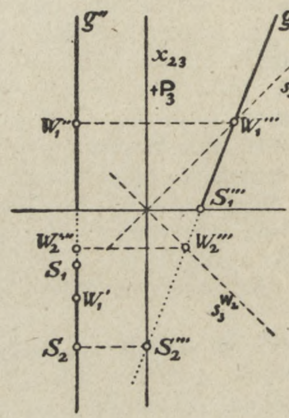
58. §. A sík transzformációjának néhány alkalmazása. 1. Adva van közös tengelyponttal két sík. Szerkesztessék meg a két sík metszésvonala (67. ábra). A metszésvonal egy pontja a közös tengelypont. A metszésvonal egy másik pontja egy új képsíkon a síkok új nyomvonalainak közös pontja. Új képsíkul harmadik képsíkot is alkalmazhatunk.

2. Szerkesztessék meg két nyompontjával adott profil egyenesnek az első és második felezősíkkal való metszéspontja (68. ábra). A feladatot transzformáció igénybevételével oldjuk meg. Egyenes és sík metszéspontját akkor nyerjük a leggyorsabban, ha a sík valamely

képsíkra nézve vetítősík. Feladatunkban a sík az első és második felezősík. Felezősík nyomvonalai az x_{12} tengellyel azonos egyenesek. Mivel azt kívánjuk, hogy a felezősík a bevezetendő új képsíkra nézve vetítősík legyen, az új tengelyt az x_{12} tengelyre merőlegesen kell választani, szóval harmadik képsíkot vezetünk be. Alkosson a harmadik képsík a második képsíkkal két képsíkból álló képsíkrendszert és állapítsuk meg az első felezősík harmadik nyomvonalát. Az

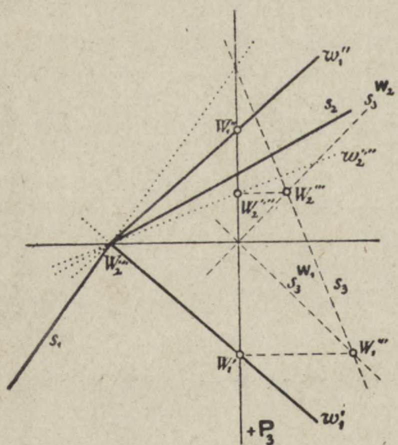


67. ábra.



68. ábra.

első felezősík harmadik nyomvonalának meghatározására fel kell venni egy a felezősíkra illeszkedő pontot, e pont harmadik képe a sík harmadik nyomvonalának egy pontja, mert a sík harmadik vetítősík, s így minden a síkra illeszkedő pont harmadik képe a sík harmadik nyomvonalára illeszkedő pont. Felezősíkra illeszkedő pont két rendezője egyenlő, ebből következik, hogy felezősíkra illeszkedő pont harmadik képe az új és régi tengely szögfelezőjére esik. E szögfelező az első, illetőleg második felezősík harmadik nyomvonala. A felezősíkok harmadik nyomvonalait metszi az adott profil egyenes harmadik képe a keresett metszéspontok harmadik képeiben. Az ábrában az első felezősíkkal való metszéspont jele W_1, a második felezősíkkal való metszéspont jele W_2.



69. ábra.

3. Szerkesztessék meg az adott S (s_1 s_2) sík és felezősík metszésvonala (69. ábra). A metszésvonal egy pontja az adott sík tengelypontja, egy másik pontot egy speciális helyzetű segédsíkkal fogunk megszerkeszteni. A segédsík legyen a harmadik képsík, mely az első képsíkkal alkosson két képsíkból álló képsíkrendszert. A harmadik képsík az adott síkot profil egyenesben metszi. A profil egye-

nes harmadik képe, vagyis az adott sík harmadik nyomvonala és a felezősík harmadik nyomvonala, mint a harmadik képsíkra illeszkedő két egyenes illeszkedési pontja, az adott sík és felezősík közös egyenesének egy pontja a harmadik projekcióban.

Általában megjegyezhetjük, hogy a legtöbb feladatban, melyben tengelyre illeszkedő, illetőleg tengellyel parallel sík szerepel, a harmadik képsík bevezetése szerkesztésbeli előnyöket nyujt.

Transzverzális feladatok.

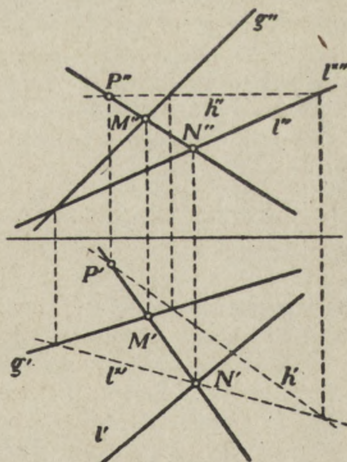
Adott g és l kitérő egyenesek transzverzálisán értjük azt az egyenest, mely egyenes az adott kitérő egyenesek mindegyikére illeszkedik. Ilyen transzverzális végtelen sok van. Így a g egyenes Q pontjára illeszkedő transzverzálisok egy sugársort alkotnak, a sugársor centruma a Q pont, síkja a Q pont és l egyenes összekötő síkja. Ebből látjuk, hogy adott kitérő egyenesek transzverzálisai a sugaraknak kétméretű sokaságát alkotják. A transzverzálisok kétméretű sokaságából egyes transzverzálisokat úgy választunk ki, hogy egy-egy transzverzálistól egy további geometriai feltételnek kielégítését követeljük.

59. §. Adott síkra illeszkedő transzverzális. Legyenek g és l az adott kitérő egyenesek, és **S** a tér tetszőleges síkja. A g egyenesre és az **S** síkra illeszkedő egyenes csak oly egyenes lehet, mely egyenes az **S** síkra illeszkedik és a g és **S** sík metszéspontján átmegy, ezek az egyenesek egy sugársort alkotnak az **S** síkban; ugyanúgy az l egyenesre és az **S** síkra illeszkedő egyenesek szintén az **S** síkra illeszkedő sugársort alkotnak. Az **S** síkra illeszkedő két sugársor közös egyenese, vagyis a g és l egyeneseknek az **S** síkkal való metszéspontjainak összekötő egyenese, lesz a keresett transzverzális. Ha a transzverzálist t-vel jelöljük, akkor

$$t = |(g\mathbf{S})\ (l\mathbf{S})|.$$

Az adott kitérő egyenesek **S** síkra illeszkedő transzverzálisát, mint két sík metszésvonalát is nyerhetjük, az egyik sík az **S** sík, a másik sík a g és **S** metszéspontjának az l egyenessel való összekötő síkja, ekkor

$$t = |[(g\mathbf{S})\ l]\ \mathbf{S}|.$$



70. ábra.

60. §. Adott pontra illeszkedő transzverzális. Két kitérő egyenes a tér egy tetszőleges pontjára illeszkedő transzverzálisának szerkesztése az előbbi feladatnak térbeli duálja. Tehát a feladat megoldási menete az előbbi feladat megoldásának térbeli duálja, s így ha a kitérő egyenesek g és l, az adott pont P, a keresett transzverzális t, akkor

$$t = |\,[gP]\ [lP]\,|, \text{ vagy } t = |([gP]\ l)\ P|.$$

Pontra illeszkedő transzverzális szerkesztése a 70. ábrában látható. Itt az adott P pont és adott g egyenes összekötő síkját két illeszkedő egyenessel ábrázoltuk, ezek közül az egyik az adott g egyenes, a másik a síknak P pontjára illeszkedő első fővonala, h. E síknak az l egyenessel való metszéspontját, az N pontot megszerkesztettük aż l egyenesnek a síkon lévő második födőegyenesének felhasználásával, e födőegyenes az l^x egyenes. Az N és P pontok összekötő egyenese a keresett transzverzális, t. A szerkesztett transzverzális metszi a g egyenest is, az illeszkedési pontot az első és második képben egymástól függetlenül nyerjük, s így a szerkesztésnél kontroll is áll rendelkezésünkre.

61. §. Transzverzális feladatok, melyekben végtelenben fekvő térelemek szerepelnek. 1. Szerkesztessék két kitérő egyenesnek a végtelenben fekvő síkra illeszkedő transzverzálisa. A transzverzális a kitérő egyenesek végtelenben fekvő pontjainak összekötő egyenese, egy végtelenben fekvő egyenes. Végtelenben fekvő egyenest egy sík állásával adunk meg. Egy sík állása azonos a keresett végtelenben fekvő egyenessel, ha a sík a kitérő egyenesekkel parallel. Ilyen sík végtelen sok van, ezekből egyet úgy szerkesztünk, hogy a tér egy tetszőleges pontjára illeszkedően az adott kitérő egyenesekkel parallel egyeneseket vezetünk, ezek összekötő síkjának állása a feladat megoldása. 2. Szerkesztessék két kitérő egyenesnek egy adott végtelenben fekvő pontra illeszkedő transzverzálisa. A végtelenben fekvő pontot egy egyenes irányával adjuk meg. A feladat úgy is fogalmazható, hogy szerkesztessék adott egyenessel parallel transzverzális. A kitérő egyenesek mindegyikére az adott iránnyal parallel síkot illesztünk, e síkok metszésvonala a keresett transzverzális. 3. Az adott kitérő egyenesek közül az egyik lehet végtelenben fekvő egyenes, ez akkor adva van, mint egy sík végtelenben fekvő egyenese. Ez esetben adott síkra illeszkedő transzverzális szerkesztése átfogalmazásban azt jelenti, hogy egyenes és sík metszéspontján át a síkban oly egyenes szerkesztendő, mely egyenes egy másik adott síkkal parallel. A keresett egyenes parallel a két sík metszésvonalával, egyéb részletek mellőzhetők. 4. Ha az adott kitérő egyenesek közül egy a végtelenben van és a tér egy tetszőleges pontjára illeszkedő transzverzálist keressük, akkor e feladat átfogalmazásban azt jelenti, hogy szerkesztessék a tér egy adott pontjára illeszkedő oly egyenes, mely egyenes egy adott egyenesre illeszkedik és egy adott síkkal parallel. Az adott ponton átmenő és az adott síkkal parallel sík az adott egyenest egy pontban metszi, e pont és az adott pont összekötő egyenese a keresett transzverzális.

Eddig a g és l egyeneseket kitérőknek tételeztük fel; ha ezek illeszkedők, akkor minden egyenes, mely a két egyenes közös síkjára, illetőleg a két egyenes közös pontjára illeszkedik, a két egyenes egy-egy transzverzálisa.

Feladatok: 1. Ábrázoltassék két illeszkedő egyenes által adott síkban egy első, illetőleg egy második fővonal. — 2. Szerkesztessék adott egyenesre illeszkedő és az első felezősíkra merőleges sík. — 3. Szerkesztessék a tér egy adott pontjára illeszkedő oly egyenes, mely egyenes két adott síkkal parallel. — 4. Szerkesztessék egy adott sík és egy adott, tengellely parallel egyenes metszéspontja. — 5. Szerkesztessék egy adott síkra illeszkedő ama pont, melynek első és második távolsága adott. — 6. Szerkesztessék adott síkkal parallel egyenes. — 7. Szerkesztessék adott síkkal parallel profil egyenes és határoztassanak meg a profil egyenes nyompontjai. — 8. Adva van a tengellyel parallel sík és egy pont. Szerkesztessék az adott ponton átmenő és adott síkkal parallel sík *a)* harmadik képsík felhasználásával, *b)* harmadik képsík felhasználása nélkül. — 9. Adva van három sík, szerkesztessék meg a három sík közös pontja. — 10. Adva van egy a tengellyel parallel sík második nyomvonala, szerkesztessék meg a sík első nyomvonala, de a nyomvonalakkal határolt véges síksáv adott szélességű legyen. — 11. Szerkesztessék meg a második felezősíkkal parallel sík és az első felezősíkra merőleges sík metszésvonala. — 12. Szerkesztessék meg az első felezősíkkal parallel sík és a második felezősíkra merőleges sík metszésvonala. — 13. Szerkesztessék adott sík adott pontjára illeszkedő első, illetőleg második esésvonal. — 14. Nyomvonalaival adott síkon szerkesztessék egy parallelogramma két képe, a parallelogramma átlói a sík nyomvonalaival azonos egyenesek. — 15. Szerkesztessék adott profil egyenes és adott első vetítősík metszéspontja. — 16. Szerkesztessék adott ponton átmenő, adott egyenessel parallel és az első felezősíkra merőleges sík.

Kollineár síkbeli rendszerek.

62. §. Síkbeli rendszerek perspektív helyzetben. Legyen adva két általános helyzetű sík, S és S′, továbbá egy tetszőleges vetítési középpont, *C*. Az S sík egy *A* pontjára illeszkedő vetítősugár az S′ síkot egy meghatározott pontban, az *A′* pontban metszi. Megfordítva az S′ sík *B′* pontjára illeszkedő vetítősugár az S síkot egy meghatározott *B* pontban metszi. Ilyen módon minden vetítősugárra illeszkedik két pont, az egyik pont az S síknak, a másik pont az S′ síknak egy pontja. Ha egy-egy vetítősugárra illeszkedő pontpár pontjait *megfelelőknek* tekintjük, akkor a két síkbeli rendszer pontjai között kölcsönös és egyértelmű vonatkozást létesítettünk. Ha az S síkot eredeti síknak minősítjük és az S′ síkot képsíknak tekintjük, a síkokra nem illeszkedő vetítési középpont mellett mondhatjuk azt is, hogy az eredeti sík és a képsík pontjai között kölcsönös és egyértelmű vonatkozás áll fenn, az eredeti sík egy pontjához a képsíknak egy és csakis egy pontja tartozik és megfordítva.

A síkok eme vonatkoztatása mellett *a megfelelő pontok nem azonos pontok,* csak a két sík metszésvonalára illeszkedő pontok és ezek megfelelői azonos pontok, éppen ezért a két sík metszésvonalára illeszkedő pontokról azt fogjuk mondani, hogy ezek önmaguknak megfelelő pontok.

Az adott vetítési középpont az S sík és S′ sík egyenesei között is megállapít kölcsönös és egyértelmű vonatkozást. Az S sík *g* egyenesének megfelelője az S′ sík ama egyenese, melyben a *g* egyenesre illeszkedő vetítősík az S′ síkot metszi, ez a *g′* egyenes. Az S sík egy pontjára illeszkedő egyenes megfelelője a pont megfelelőjére illeszkedő egyenes, mert centrális vetítésnél illeszkedő elemeknek megint illeszkedő elemek felelnek meg. Megfelelő egyenesek ugyanazon vetítősíkra illeszkedő egyenesek, tehát metszik egymást, a metszéspont önmagának megfelelő pont, minden ilyen pont a két sík közös egyesének egy pontja.

Egy síkra illeszkedő pontok és egyenesek síkbeli rendszert alkotnak, mondhatjuk tehát, hogy *egy megadott vetítési középpont két síkbeli rendszer elemei között kölcsönös és egyértelmű vonatkozást állapít meg. E vonatkozás törvényei:* a) *pontnak pont, egyenesnek egyenes* *felel meg;* b) *az egyik síkbeli rendszer illeszkedő elemeinek a másik síkbeli rendszer illeszkedő elemei felelnek meg;* c) *megfelelő pontok összekötő egyenesei a tér egy pontjára illeszkednek;* d) *megfelelő egyenesek metszéspontjai egy egyenesen vannak, a két síkbeli rendszer közös egyenesén, melynek minden pontja önmagának megfelelő pont.*

A két síkbeli rendszer a vetítési középpontra nézve perspektív helyzetben van. Két síkbeli rendszer oly vonatkozása, mely vonatkozás a fenti törvények közül az *a)* és *b)* törvényeket kielégíti, a síkbeli rendszernek *kollineár vonatkozása,* amennyiben a fenti törvények közül a *c)* és *d)* alatti követelmények is ki vannak elégítve, a síkbeli rendszerek kollineációja *kollineáció perspektív helyzetben.*

Perspektív síkbeli rendszereknél a vetítési középpont a kollineáció centruma, az önmaguknak megfelelő pontok sorozó egyenese a kollineáció tengelye.

Perspektív síkbeli rendszerek, mint **S** és **S'** esetében az **S** sík végtelenben fekvő, q_∞ egyenesének megfelelője az **S'** síkban az a q' egyenes, mely egyenesben a centrumra illeszkedő és az **S** síkkal parallel sík az **S'** síkot metszi. Ugyanúgy az **S'** sík végtelenben fekvő r'_∞ egyenesének megfelelője, r, az **S** síkban az az egyenes, mely egyenesben a centrumra illeszkedő és az **S'** síkkal parallel sík az **S** síkot metszi. Kollineár síkbeli rendszerek végtelenben fekvő egyeneseinek megfelelői a kollineáció *ellentengelyei.* Perspektív síkbeli rendszerek ellentengelyei a kollineáció tengelyével parallel egyenesek.

S és **S'** perspektív síkbeli rendszerek centruma lehet a tér egy végtelenben fekvő pontja, a kollineár síkbeli rendszereket ez esetben affin síkbeli rendszereknek mondjuk, az ellentengelyek a síkbeli rendszerek végtelenben fekvő egyenesei. Megfordítva, ha perspektív síkbeli rendszerek ellentengelyei a végtelenben vannak, akkor a perspektivitás centruma csak a térnek végtelenben fekvő pontja lehet, tehát a síkbeli rendszerek vonatkozása affinitás.

Projiciáljuk az $\mathbf{S}_1$ síkbeli rendszer elemeit a C_1 pontból az $\mathbf{S}_2$ síkra. Ha ugyanúgy az $\mathbf{S}_2$ síkbeli rendszert egy C_2 pontból egy $\mathbf{S}_3$ síkra vetítjük, majd az $\mathbf{S}_3$ síkbeli rendszert egy C_3 pontból egy $\mathbf{S}_4$ síkra vetítjük és úgy tovább, akkor az

$$\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{S}_4, \ldots, \mathbf{S}_n \ldots$$

síkbeli rendszerek oly sorozatát nyerjük, mely sorozatban minden síkbeli rendszer a sorozatban a síkbeli rendszert megelőző és követő síkbeli rendszerrel perspektív, vagyis

$$\mathbf{S}_1 \overset{C_1}{\wedge} \mathbf{S}_2 \overset{C_2}{\wedge} \mathbf{S}_3 \overset{C_3}{\wedge} \mathbf{S}_4 \overset{C_4}{\wedge} \ldots \overset{C_{n-1}}{\wedge} \mathbf{S}_n$$

Ha a sorozatban két nem szomszédos síkbeli rendszert veszünk, pl. $\mathbf{S}_3$ és $\mathbf{S}_7$ síkbeli rendszereket, akkor is a síkbeli rendszerek között kölcsönös és egyértelmű vonatkozás áll fenn, mert az $\mathbf{S}_3$ sík A_3 pontjából egyértelműen nyerjük az A_4 pontot, mint az A_3 pont vetületét az $\mathbf{S}_4$ síkon a C_3 pontból, hasonlóan nyerjük az A_4 pontból a C_4 vetítési középpont révén az $\mathbf{S}_5$ síkon az A_5 pontot, s így tovább, végül nyerjük az $\mathbf{S}_7$ síkban az A_3 pontnak megfelelőjét, az A_7 pontot. Ugyanúgy nyerhetjük a g_3 egyenesnek megfelelőjét, a g_7 egyenest, továbbá azt is látjuk, hogy illeszkedő elemeknek illeszkedő elemek felelnek meg. Szóval az S_3 és S_7 síkbeli rendszerek között kollineár vonatkozás áll fenn, de a két síkbeli rendszer általában nincs perspektív helyzetben, mert két tetszőleges megfelelő egyenes kitérő, holott perspektív helyzet mellett megfelelő egyenesek mindig metszik egymást.

A fenti sorozatban a vetítési középpontok is sorozatot alkotnak, e sorozatban szereplő vetítési középpontok közül egy vagy több a végtelenben is lehet, utóbbi körülmény a megállapított eredményeken nem változtat.

63. §. Egyesített kollineár síkbeli rendszerek. A perspektív síkbeli rendszerek sorozatában akár egy-egy sík, melyre a vetítés történik, akár egy-egy vetítési középpont, melyből a vetítés történik, ismételten fordulhat elő. Ha a sorozatban egy sík kétszer fordul elő, akkor e síkban egyesített kollineár síkbeli rendszereket nyerünk, egy síkbeli rendszert kétféle felfogásban. Pl.:

$$P \overset{O}{\wedge} S_1 \overset{C}{\wedge} S_2 \overset{O}{\wedge} P \qquad (1)$$

$$P \overset{C_1}{\wedge} S \overset{C_2}{\wedge} P \qquad (2)$$

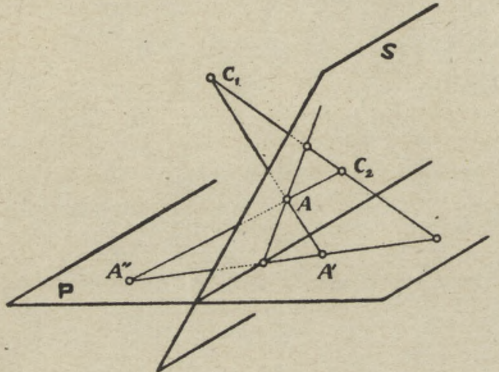
$$P_2 \overset{C_2}{\wedge} S \overset{C_1}{\wedge} P_1 \overset{C_\infty}{\wedge} P_2 \qquad (3)$$

Az 1. alatti sorozatban az S_1 és S_2 síkbeli rendszerek perspektív-kollineár-rokon síkbeli rendszerek a C pontra nézve, mindkét síkbeli rendszert ugyanazon O pontból a P síkra, mondjuk egy képsíkra vetítjük. A képsíkban ilyen módon egyesített síkbeli rendszereket nyerünk. Az egyesített síkbeli rendszerekben megfelelő pontok összekötő egyenesei egy ponton, a C pontnak O pontból nyert vetületén mennek át. T. i. ha az S_1 síkbeli rendszer egy pontja A_1 és megfelelője az S_2 síkbeli rendszerben A_2, továbbá az A_1 pont vetülete az O pontból a P képsíkon A'_1, és az A_2 pont vetülete az O pontból a P képsíkon A'_2, akkor A'_1 és A'_2 pontok összekötő egyenese az A_1 és A_2 pontok összekötő egyenesének vetülete a P képsíkon az O pontból. De az S_1, S_2 síkbeli rendszerek megfelelő pontjainak összekötő egyenesei mind a tér C pontjára illeszkedő egyenesek, tehát kell, hogy ezek képei a P képsík egy pontjára, a C pontnak O pontból való vetületére illeszkedjenek.

Kimutathatjuk azt is, hogy a P képsíkon az egyesített síkbeli rendszerek megfelelő egyeneseinek metszéspontjai egy egyenes pontsor pontjai. Mert S_1, S_2 síkbeli rendszerek két megfelelő egyenese, g_1 és g_2 illeszkedők, az illeszkedési pont a síkbeli rendszerek közös egyenesének egy pontja; amennyiben a g_1 és g_2 egyeneseket az O pontból a P képsíkra vetítjük, a g'_1 és g'_2 egyenesek közös pontja mindenesetre az S_1, S_2 síkbeli rendszerek közös egyenesének képére illeszkedő pont lesz.

A P képsíkon nyert egyesített síkbeli rendszerek perspektív helyzetben vannak. Egyesített síkbeli rendszerek e kollineációját *síkbeli centrális kollineációnak* mondjuk.

A 2. alatti kollineár síkbeli rendszerek sorozatáról azt is mondhatjuk, ha a P síkbeli rendszert képsíknak tekintjük, hogy az S síkbeli rendszer elemeit a tér két különböző pontjából ugyanazon P képsíkra vetítjük. Az S sík egy pontjának, illetőleg egy egyenesének két képe megfelelő pontok, illetőleg egyenesek a P képsíkon (71. ábra). Az ábrából közvetlenül leolvasható, hogy a képsíkon az egyesített síkbeli rendszerek megfelelő pontjainak összekötő egyenesei a C_1, C_2 pontok összekötő egyenesének és a P képsík metszéspontjára illeszkedő egyenesek, továbbá az önmaguknak megfelelő pontok az S sík és P képsík közös egyenesére illeszkedő pontok. Vagyis az egyesített síkbeli rendszerek kollineációja síkbeli centrális kollineáció.



71. ábra.

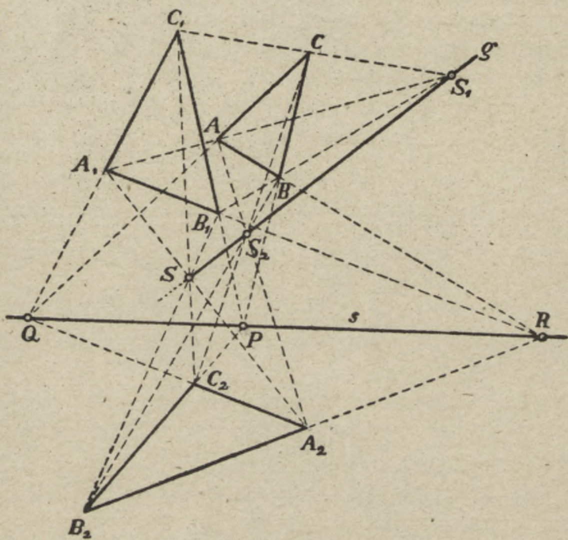
A kollineár síkbeli rendszerek 3. alatti sorozatát csak azért említjük meg, mert a kollineár síkbeli rendszerek ilyen sorozatával már találkoztunk, találkoztunk akkor, mikor egy síkbeli rendszer orthogonális projekcióját állítottuk elő a második képsíkon és orthogonális projekcióját állítottuk elő az első képsíkon, majd az első képsíkot a második képsíkba forgattuk. Kiegészítésképpen itt megemlítendő, hogy az orthogonális parallel projekcióban a két képsíknak megállapodásszerű egyesítése felfogható még ferde parallel vetítés eredményeként is. T. i. ha az első képsíkot a második képsíkba forgatjuk, akkor az első képsík egy pontjának a második képsíkba forgatottját úgy is nyerhetjük, hogy az első képsík pontját a második felezősíkra merőleges irányban a második képsíkra vetítjük.

A 3. alatti sorozattal a P_2 képsíkban megint egyesített kollineár síkbeli rendszereket nyerünk, de a kollineáció nem lesz centrális kollineáció, csak egész kivételes esetekben nyerünk centrális kollineár, illetőleg centrális affin síkbeli rendszereket.

Az ábrázoló geometriában többízben találkozunk egyesített collineár síkbeli rendszerekkel, hogy az egyesített kollineár síkbeli rendszerek centrális kollineációban, illetve centrális affinitásban vannak-e, azt külön vizsgálat tárgyává kell tenni. E vizsgálatok könnyebb megejtése végett a következő pontban egy segédtételt fogunk tárgyalni.

64. §. Desargues tétele. Állapítsunk meg két háromszög szögpontjai és oldalai között oly vonatkozást, mely vonatkozásban szögpontnak szögpont, oldalnak oldal felel meg, de úgy, hogy megfelelő szögpontokra illeszkedő oldalak legyenek megfelelők, akkor Desargues tétele azt mondja, hogy amennyiben a megfelelő szögpontok összekötő egyenesei egy pontban találkoznak, akkor a megfelelő oldalak metszéspontjai egy egyenesen vannak. A tétel bizonyításánál két esetet különböztetünk meg: *a)* a háromszögek különböző síkokban vannak, *b)* a háromszögek egy síkban vannak. Az *a)* esetre a tételt külön bizonyítani nem kell, mert a perspektív háromszögek perspektív síkbeli rendszerekben megfelelő alakzatok, és akkor, amint azt a 62. §-ban kimutattuk, a megfelelő egyenesek metszéspontjai egy egyenesen vannak.

b) Legyen a két háromszög $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$, és tegyük fel, hogy az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egyenesek a háromszögek közös síkjára illeszkedő S pontban találkoznak (72. ábra). Az S ponton keresztül vegyünk oly egyenest, g-t, mely nem illeszkedik a két háromszög síkjára. A g egyenesen vegyük fel az S_1 és S_2 pontokat egész tetszőlegesen. Az S_1A_1 és S_2A_2 egyenesek illeszkedő egyenesek, mert mindegyik illeszkedik úgy a g, mint az A_1A_2 illeszkedő egyenesekre, legyen az S_1A_1, S_2A_2 egyenesek illeszkedési pontja A, ugyanúgy illeszkedők a S_1B_1, S_2B_2 egyenesek B illeszkedési ponttal és hasonlóan illeszkedők a S_1C_1, S_2C_2 egyenesek C illeszkedési ponttal.



72. ábra.

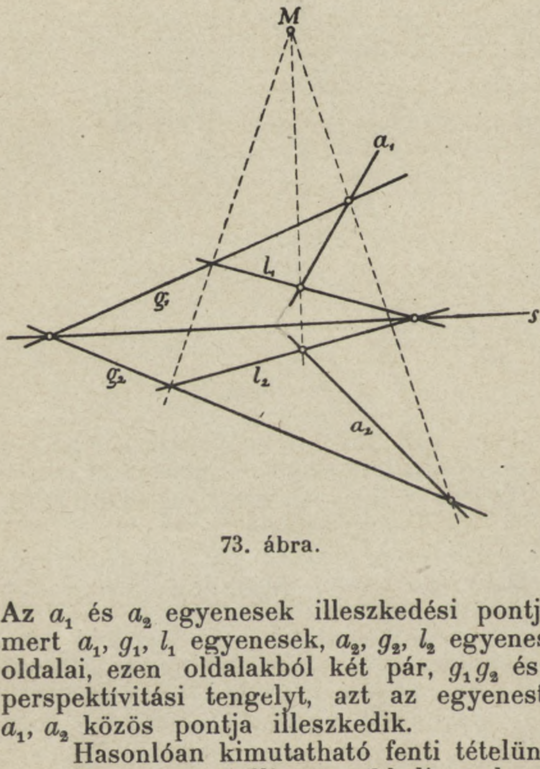
Az ABC, $A_1B_1C_1$ háromszögek nem egy síkban fekvő perspektív háromszögek, ABC, $A_2B_2C_2$ háromszögek szintén nem egy síkban fekvő perspektív háromszögek, a perspektívitás tengelye mindkét esetben ugyanaz az s egyenes, ez az s egyenes az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögek közös síkjának metszésvonala az ABC háromszög síkjával

De akkor az *a)* eset értelmében BC és B_1C_1 az s egyenes, mondjuk P pontjára illeszkedő egyenesek, ugyanúgy BC és B_2C_2 szintén az s egyenes egy pontjára illeszkedő egyenesek, de a BC egyenes az s egyenest csak egy pontban metszheti, tehát kell, hogy BC, B_1C_1, B_2C_2 az s egyenes ugyanazon pontjára illeszkedő egyenesek legyenek. Kimutattuk tehát, hogy a B_1C_1, B_2C_2 egyenesek metszéspontja az s egyenes egy pontja. Hasonlóan kimutatható, hogy C_1A_1, C_2A_2 egyenesek és A_1B_1, A_2B_2 egyenesek metszéspontja az s egyenesre illeszkedő pontok, szóval egy síkban fekvő perspektív háromszögek megfelelő oldalainak metszéspontjai egy egyenesen vannak.

Desargues tétele meg is fordítható, vagyis ha két háromszögben a megfelelő oldalak metszéspontjai egy egyenesen vannak, akkor a megfelelő szögpontok összekötő egyenesei egy ponton mennek keresztül. A Desargues-tétel megfordításának bizonyítása az eredeti tétel segítségével történik (72. ábra). Tegyük fel, hogy az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögek megfelelő oldalainak metszéspontjai egy egyenesen vannak, legyenek ezek P, Q, R. Ekkor a P pont az RB_1B_2 és QC_1C_2 háromszögek perspektívitási centruma, e háromszögek megfelelő oldalainak metszéspontjai az eredeti Desargues-tétel értelmében egy egyenesen vannak. A megfelelő oldalak metszéspontjai A_1, A_2 és S, ahol S a B_1B_2 és C_1C_2 megfelelő oldalak illeszkedési pontja, de ezzel kimutattuk, hogy az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egy pontra illeszkedő egyenesek.

65. §. Egyesített síkbeli rendszerek centrális kollineációja. *Egyesített kollineár síkbeli rendszerekről a Desargues tételre való hivatkozással mondhatjuk, hogy amennyiben a megfelelő pontok összekötő egyenesei mind egy ponton mennek keresztül, akkor a megfelelő egyenesek metszéspontjai egy egyenesen vannak, és amenynyiben a megfelelő egyenesek metszéspontjai egy egyenesen vannak, akkor a megfelelő pontok összekötő egyenesei egy pontra illeszkednek.*

Tegyük fel, hogy az egyesített síkbeli rendszerek megfelelő pontjainak összekötő egyenesei egy ponton mennek át, legyen ez a pont M (73. ábra). Ha felveszünk két megfelelő egyenespárt g_1g_2, l_1l_2, akkor az egyik pár közös pontjának összekötő egyenese a másik pár közös pontjával már az az egyenes, melyre a megfelelő egyenesek metszéspontjai illeszkednek, legyen ez s. Mert az első rendszer egy tetszőleges a_1 egyenese metszi a g_1 és l_1 egyeneseket egy-egy pontban, e pontok megfelelői a g_2, illetőleg l_2 egyeneseken vannak, ezek megszerkeszthetők, mivel a megfelelő pontok összekötő egyenesei az M pontra illeszkednek, e pontok meghatározzák az a_1 egyenes megfelelőjét, az a_2 egyenest.



73. ábra.

Az a_1 és a_2 egyenesek illeszkedési pontja az s egyenes egy pontja, mert a_1, g_1, l_1 egyenesek, a_2, g_2, l_2 egyenesek perspektív háromszögek oldalai, ezen oldalakból két pár, g_1g_2 és l_1l_2, már meghatározza a perspektívitási tengelyt, azt az egyenest, melyre a harmadik pár, a_1, a_2 közös pontja illeszkedik.

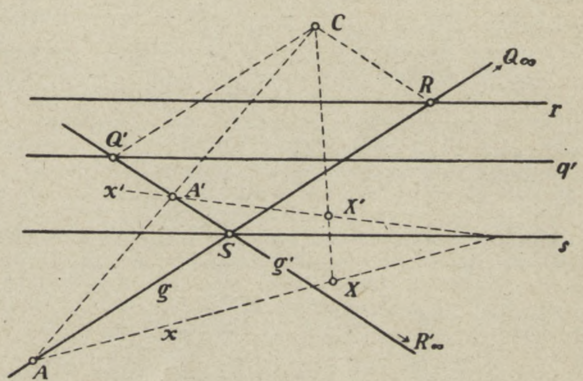
Hasonlóan kimutatható fenti tételünk második fele.

Egyesített kollineár síkbeli rendszerek tehát centrális helyzet mellett egyúttal axiális helyzetben vannak és megfordítva, mindkét körülmény együttes kifejezésére azt fogjuk mondani, hogy az egyesített kollineár síkbeli rendszerek centrális kollineációban vannak.

Az egyesített síkbeli rendszerek centrális kollineációjának egy speciális esete az affinitás, míg a centrális-kollineár-rokon egyesített síkbeli rendszereknél a megfelelő pontok összekötő egyenesei egy végesben fekvő pontra illeszkedik, addig centrál-affin-rokon egyesített síkbeli rendszereknél a megfelelő pontok összekötő egyenesei parallel egyenesek.

Egyesített síkbeli rendszerek centrális kollineációja meg van határozva, ha ismerjük a kollineáció tengelyét, centrumát és egy megfelelő pontpárt, avagy egy megfelelő egyenespárt. Adott megfelelő egyenespár mellett a centrumra illeszkedő tetszőleges egyenes az egyenespárt megfelelő pontokban metszi; adott megfelelő pontpár mellett a pontpár pontjaira és a tengely ugyanazon pontjára illeszkedő egyenesek megfelelő egyenesek.

Legyen megadva az S és S′ egyesített síkbeli rendszerek centrális kollineációja, a centrum C, a tengely s és egy megfelelő egyenespár g, g' (74. ábra). Ekkor egy tetszőleges X pont megfelelőjét a következőképpen szerkesztjük meg: az X pontra tetszőlegesen illesztett x egyenes metszi az ugyanazon rendszerbeli g egyenest az A pontban, az A pont megfelelője illeszkedik a g' egyenesre, ezen az egyenesen az A pont megfelelője az a pont, melyben a g' egyenest az AC egyenes metszi, ha az így nyert A' pontot az x és s egyenesek közös pontjával összekötjük, kapjuk az x egyenes megfelelőjét, az x' egyenest, ezen az egyenesen lesz az X pont megfelelője, az X' pont. A kollineáció centrumára illeszkedő egyenesnek megfelelője önmaga, ezeket az egyeneseket a kollineáció sugarainak is mondjuk. Minden centrális kollineációban van egy sugársor, melynek minden sugara önmagának megfelelő sugár, e sugársor centruma a kollineáció centruma; továbbá van egy egyenes pontsor, melynek minden pontja önmagának megfelelő pont, e pontsor a kollineáció tengelye.



74. ábra.

Az adott centrális kollineációban megszerkeszthetjük az ellentengelyeket is. Mindenekelőtt megállapíthatjuk, hogy minden centrális kollineációban az ellentengelyek a kollineáció tengelyével parallel egyenesek, mert az ellentengely az egyik síkbeli rendszer végtelenben fekvő egyenesének megfelelője a másik síkbeli rendszerben, a végtelenben fekvő egyenes a kollineáció tengelyét annak végtelenben fekvő pontjában metszi, e pont önmagának megfelelő pont, tehát minden ellentengely a kollineáció tengelyének végtelenben fekvő pontjára illeszkedik. Az ellentengelyeket megszerkesztettük, ha azoknak egy-egy végesben fekvő pontját megállapítottuk. Az S′ síkbeli rendszer q' ellentengelyének egy pontját nyerjük, ha a g egyenes végtelenben fekvő Q_∞ pontjának megfelelőjét megszerkesztjük. Megrajzoljuk a g egyenessel parallel kollineáció sugarat, ez kimetszi a g' egyenesen a Q_∞ pontnak megfelelőjét, a Q' pontot. E pontra illeszkedik az S′ síkbeli rendszer ellentengelye, a q' egyenes. Hasonló gondolatmenettel megszerkesztettük a 74. ábrában az S síkbeli rendszer ellentengelyét, az r egyenest, mint az R pontra illeszkedő, tengelylyel parallel egyenest, ahol az R pont a g' egyenesre illeszkedő R'_∞ végtelenben fekvő pontnak megfelelője. Jelöljük g és g' egyenesek közös pontját S-sel, akkor a szerkesztés alapján kimondhatjuk, hogy az R, S, Q', C pontok egy parallelogramma csúcspontjai, e parallelogramma alakzatból következik, hogy az egyik ellentengely távolsága a kollineáció tengelyétől nagyságra és értelemre nézve egyező a centrumnak a másik ellentengelytől való távolságával.

Centrál-kollineár-rokon egyesített síkbeli rendszerek rokonsága magában foglalja mindazon rokonságokat, melyeket eddig egyesített síkbeli rendszereknél megismertünk. Pl. Legyen a centrális kollineáció tengelye a végtelenben, ekkor megfelelő háromszögeket szerkesztve, a centrális kollineáció törvényei szerint azt tapasztaljuk, hogy a perspektív háromszögek hasonlók, tehát a centrális kollineáció a hasonlóság perspektív helyzetben. A többi ismeretes rokonságokat itt már nem kell említeni, mert az 54. §. E-ben azokat már tárgyaltuk a centrális affinitással kapcsolatban.

Feladatok: 1. Vegyük fel az S síkbeli rendszer egy egyszerű sokszögét, de úgy, hogy az r ellentengelyen minden pont a sokszög külső pontja. Adott centrális kollineáció esetében szerkesztessék meg a sokszög megfelelője. — 2. Adott centrális kollineációban szerkesztessék egy sokszög megfelelője, ha a sokszög saját rendszerbeli ellentengelye a sokszöget metszi. Ugyanakkor állapítsuk meg az adott sokszög belső pontjaiból alkotott síkrész megfelelőjét. — 3. Ha adva van egy centrális kollineáció tengelye, akkor hány egyenespárral és milyen feltételek mellett lesz a kollineáció meghatározott. — 4. Mi a 3. alatti feladat síkbeli duálja. — 5. Adva vannak S és S' centrál-affin síkbeli rendszerek. Ha e síkbeli rendszerek közül az S-et a síkbeli rendszerek közös síkjában elmozdítjuk, nyerünk egy S'' síkbeli rendszert. Mily elmozdulás mellett lesznek S' és S'' síkbeli rendszerek megint centrál-affin helyzetben.

Síklapú alakzatok.

66. §. A gúlafelület. Síkbeli rendszer minden alakzatának van térbeli duálja, a duál alakzat a pontbeli rendszer egy alakzata. A pontbeli rendszer egy egyszerű alakzatát úgy nyerjük, hogy a pontbeli rendszer azon sugarainak összességét vesszük, mely sugarak egy poligon oldalainak pontjaira illeszkednek. Legyenek a síkpoligon, vagy térbeli poligon csúcspontjai rendre $A_1A_2 \ldots A_kA_{k+1} \ldots A_n$, akkor a pontbeli rendszernek az A_kA_{k+1} oldalra illeszkedő sugarai egy teljes sugársornak egy részét adják, e rész határsugarai az A_k és A_{k+1} csúcspontokra illeszkedő sugarak. A felvett poligon a pontbeli rendszerből kiválasztott sugáralakzatnak vezérpoligonja, az egyes sugarak a kiválasztott sugáralakzatnak alkotói, a vezérpoligon csúcspontjaira illeszkedő alkotók a sugáralakzat élei. A vezérpoligon egy oldalára illeszkedő alkotók síkrészt határoznak meg, e síkrész a pontbeli rendszerből kiválasztott alakzatnak egy lapja, egy oldala. A pontbeli rendszer kiválasztott sugarain pontot sorozhatunk, e pontok összesége kétméretű pontsokaság, ezt a kétméretű pontsokaságot gúlafelületnek, sokszor csak gúlának mondjuk. A pontbeli rendszer centruma, M, a gúlafelület csúcspontja. A gúla egy lapján fekvő két él szöge, a gúla egy élszöge, a gúla egy élén átmenő két lap szöge, a gúla lapszöge.

Orthogonális parallel projekcióban a gúlafelület adott, ha csúcspontjának és vezérpoligonjának két képét ismerjük; adottnak nem mondhatjuk akkor, ha csúcspontjának két képét és az élek képeit ismerjük, ekkor meg kell még adni az élek egymásutánját és két szomszédos él összekötésének módját.

A gúlafelület vezérpoligonja lehet egyszerű zárt poligon, ekkor a gúlafelület egyszerű zárt gúlafelület. Ha az egyszerű n-oldalú gúlafelületet, mint élalakzatot kívánjuk hangsúlyozni, akkor egyszerű n-élnek; ha pedig mint síkalakzatot kívánjuk hangsúlyozni, akkor egyszerű n-lapnak mondjuk.

Vezérpoligonnal és csúcsponttal adott gúlafelület vezérpoligonját végtelen sok vezérpoligonnal helyettesíthetjük. Az eredeti vezérpoligont helyettesítő vezérpoligont úgy nyerjük, hogy a gúla élein rendre felveszünk egy-egy pontot, ha ezeket a pontokat olyan sorrendben összekötjük, amilyen sorrendben az éleket eredetileg összekötöttük, akkor az így nyert poligon helyettesítheti az eredeti vezérpoligont. Amennyiben az eredeti gúlafelület élein a vezérpoligon csúcspontjait egy síkra illeszkedőn választjuk, legegyszerűbben az által, hogy egy tetszőleges síknak az élekkel való metszéspontjait megállapítjuk, akkor a vezérpoligon síkpoligon. Tehát minden esetben a gúlafelület vezérpoligonja síkpoligonnak választható.

A gúlafelület csúcspontja lehet végtelenben fekvő pont, ezt a végtelenben fekvő pontot egy egyenes irányával adjuk meg. Ekkor a gúlafelület alkotói parallel egyenesek, lapjai, oldalai parallel egyenesekkel határolt síksávok. A gúlafelületet ez esetben *hasábfelület*-nek mondjuk. A hasábfelület meg van határozva vezérpoligonjával, ez lehet térbeli poligon, síkbeli poligon stb., és alkotóinak irányával.

67. §. A testszöglet. Legyen n félsugár közös határpontja az M pont. E félsugarak egy megállapított sorrendjében, mely sorrendben az n-ik félsugár után az első félsugár jön, két egymásután következő félsugár mindig két szöget alkot, ha a fellépő szögpárok közül mindig egyet kiragadunk, akkor n szögből álló oly alakzatot nyerünk, mely alakzatban két egymásután következő szögnek egyik szára közös, az így nyert alakzatot testszögletnek mondjuk. A félsugarak közös végpontja a testszöglet csúcspontja, a félsugarak a testszöglet élei, a szögek, melyekkel a testszögletet előállítottuk, a testszöglet élszögei vagy oldalai. Két nem egymásután következő oldalról a jövőben azt akarjuk feltételezni, hogy azok ne messék egymást. Két egymás után következő oldal, mint két sík, szöget alkot, e szögek a testszöglet lapszögei. Minden él mentén két, egymást 360°-ra kiegészítő lapszög keletkezik, ezek közül tetszőlegesen az egyiket a testszöglet lapszögének mondva, a többi lapszögek kétértékűsége megszünik, ha abban állapodunk meg, hogy két egymásután következő lapszög a közbeeső élszög ugyanazon oldalán legyen.

68. §. A polieder. *Az egyszerű zárt n-lapú polieder n síkpoligon összesége.* Az n síkpoligon mindegyikének egy-egy oldala mindig közös oldala csak két síkpoligonnak. A síkpoligonok összesége egy összefüggő felületet nyujt, ez röviden a polieder felülete; egy-egy poligon a polieder egy oldallapja, határlapja, röviden lapja. A polieder két lapjáról a jövőben azt akarjuk feltételezni, hogy a közös oldalakon kívül ne messék egymást. Két síkpoligon közös oldala a polieder egy éle. Az él minden végpontja legalább három él közös végpontja. Minden él végpontja a polieder csúcspontja. A polieder egy-egy csúcspontja a polieder egy-egy testszögletének csúcspontja. A határoló sokszögek belszögei a síklapú test élszögei. Egy élben találkozó két lap szöge, a polieder lapszöge. A polieder hálózatát úgy nyerjük, hogy azt az élek egy sora mentén megnyitjuk és a polieder többi éle körül rendre az egyes lapokat egy lap síkjába forgatjuk. Mivel minden egyszerű zárt poliederfelületnek van külső és belső oldala, a hálózat készítésénél megállapodunk abban, hogy minden határlap külső oldala legyen a rajz síkjában látható. A polieder *konvex*, ha belsejében mért minden lapszöge 180°-nál kisebb, hacsak egy lapszög 180°-nál nagyobb, akkor a polieder nem konvex.

Az elemekben tárgyalt poliederek mind konvex poliederek. A következőkben mindaz, amit poliederekre vonatkozólag megállapítunk, főleg konvex poliederekre vonatkozik.

69. §. A polieder ábrázolása. Az orthogonális parallel projekcióban egy polieder képén értjük a csúcspontok és élek képeinek összességét. Az élek vetítősíkjait vizsgálva azt tapasztaljuk, hogy vannak oly élek, mely élekhez tartozó vetítősíkoknak két különböző oldalán helyezkednek el a kérdéses élben találkozó poliederlapok és vannak oly élek, mely élekhez tartozó vetítősíkoknak egy oldalán helyezkednek el a kérdéses élben találkozó poliederlapok. Az utóbbi élek konvex poliedernél zárt, általában térbeli poligont alkotnak, ezt a poligont a polieder kontúrpoligonjának mondjuk. Orthogonális parallel projekcióban két képsíkon megkülönböztetünk egy első és egy második kontúrpoligont. Az első és második kontúrpoligon általában két egymástól különböző poligon. Az első kontúrpoligon első képe a polieder első képkörrajza, a második kontúrpoligon második képe a polieder második képkörrajza. Amennyiben a polieder lapjait átlátszatlanoknak gondoljuk, a konturpoligon elválasztja a polieder látható lapjait a nem látható lapoktól.

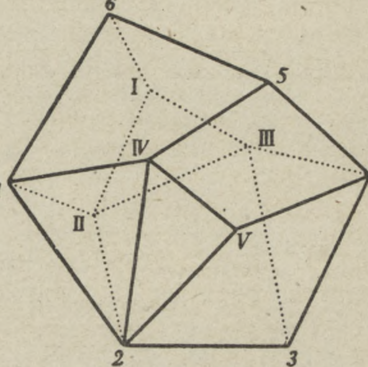
Látható lapon fekvő minden csúcs és minden él látható, nem látható lapon fekvő csúcs és él általában nem látható, csak akkor látható, ha a csúcs a kontúrpoligon csúcspontja és az él a kontúrpoligon oldala.

70. §. Az Euler-féle tétel. Ha l egy konvex polieder lapjainak számát, s csúcsainak számát és e éleinek számát jelenti, akkor ezen számértékek közti összefüggést Euler-féle tételnek mondjuk. A tétel Steiner-féle bizonyítását követve, mindenekelőtt meg kell jegyezni, hogy síkpoligon belszögeinek összege egyenlő azon síkpoligon belszögeinek összegével, mely síkpoligon az eredeti síkpoligonnak centrális képe. T. i. az eredeti síkpoligon belszögeinek összege kizárólag a poligon oldalainak számától függ, de az eredeti poligon oldalszáma általában a képpoligon oldalszámával egyenlő, s így eredeti és kép belszögeinek összege egyenlő. Eredeti és kép belszögeinek összege nem egyenlő, ha az oldalszámokban eltérés mutatkozik, eltérés csak egy esetben van, ha az eredeti poligon síkja vetítősík. Tehát a polieder élszögeinek összege egyenlő az élszögek képeinek összegével addig, míg a polieder egyetlen határlapja sem vetítősík. Előállítva a polieder centrális képét, megállapíthatjuk kétféleképpen az élszögek összegét. Az eredeti polieder élszögeinek összege, ha a határoló sokszögek oldalainak száma rendre n_1, n_2, $n_3 \ldots n_l$ lesz:

$$2R(n_1+n_2+n_3+\ldots+n_l)-4lR.$$

A polieder képében az élszögek összege, ha a képkörrajz k-oldalú sokszög, e sokszög belszögeinek összege kétszer számítva, mert a képkörrajz egy csúcspontja körül az élszögek képei a képkörrajz belszögét kétszer födik, az így nyert összeghez hozzá kell adni azon csúcspontok körüli élszögek képeit, mely csúcspontok képei a polieder képkörrajzának belsejébe esnek, ilyen csúcspont képe körül az élszögek képeinek összege $4R$ (75. ábra). Tehát a polieder projekciójában az élszögek összege:

$$2(2kR-4R)+(s-k)4R.$$



75. ábra.

Ha még tekintetbe vesszük, hogy

$$n_1+n_2+n_3+\ldots+n_l=2e,$$

mert minden élben két oldal összeesik. A nyert összegek egyenlítéséből kapjuk az

$$l+s=e+2$$

összefüggést, mely szerint konvex poliedernél a lapok és csúcsok számának összege kettővel nagyobb, mint a polieder éleinek száma.

Az Euler-féle tétel nemcsak konvex poliederekre érvényes; mindazon poliedereket, melyekre az Euler-féle tétel érvényes Euler-féle poliedereknek mondjuk.

71. §. Az Euler-féle poliederek Legendre-tétele. E tétel azt mondja, hogy *egy Euler-féle polieder, ha éleinek és lapjainak összefűzési módja ismeretes, e adattal van meghatározva,* ahol e a polieder éleinek számát jelenti. Orthogonális parallel projekcióban két képsíkon egy tetszőleges pont a térben adott, ha ismeretes tengelyprojekciója (ehhez egy adat szükséges, t. i. a tengelyprojekciónak távolsága a tengely egy fix pontjától) és két rendezője, szóval egy pont térbeli helyzetének meghatározásához három adat kell. Ha a polieder csúcspontjainak száma s, akkor e szerint a polieder meghatározásához $3s$ adat szükséges. Legyenek a határoló sokszögek oldalainak száma rendre $n_1, n_2, n_3, \ldots n_l$, akkor a $3s$ adatban az n_1 oldalú sokszög n_1 csúcspontjainak meghatározásához szükséges $3n_1$ adat szerepel, de az n_1 oldalú sokszögnek csak három csúcspontjának meghatározásához szükséges három-három adat, a többi csúcspont mindegyikéhez csak két adat kell, mert a poligon síkpoligon, ennek síkja már három pont által meg van határozva és így egy negyedik, ötödik stb. csúcsponthoz már csak két adat kell. Az n_1 oldalú sokszög tényleges meghatározásához kell $3.3+2\ (n_1-3)$ adat, a $3n_1$ adat sok, a többlet n_1-3. Tehát a polieder meghatározásához szükséges adatok száma $3s-[n_1-3+n_2-3+n_3-3+\ldots+n_l-3]=3s+3l-2e=3\,(s+l-e)+e=e+6$.

Az $e+6$ adat az Euler-féle polieder alakját és helyzetét állapítja meg a térben. Egy polieder helyzetének meghatározásához *6* adat kell, mert egy csúcspontjának helyzete három adattal adott, e ponton átmenő élirány két adattal adott és a meghatározott élre illeszkedő sík állása egy adattal adott, marad tehát a polieder alakjának meghatározásához e adat.

Amennyiben a polieder definíciójában megszorító feltételek szerepelnek az e szám redukciót szenved. Legendre-tétele alapján kimondhatjuk, hogy minden Euler-féle polieder meg van határozva, ha az élek nagyságát ismerjük, kivételes esetekkel akkor állunk szemben, ha az élhosszak nem függetlenek egymástól. Így a háromoldalú prizma éleivel nincs meghatározva.

72. §. A piramis, a prizma. *A piramis, a gúla, egy gúlafelület lapjaival és a gúlafelület csúcspontjára nem illeszkedő sík által határolt polieder.* A piramis határolva van n háromszöggel, e háromszögek közös csúcspontja a gúlafelület csúcspontja, továbbá határolva van egy sokszöggel. ez a gúla vezérpoligonja. A csúcspontban találkozó élek a gúla oldalélei, a vezérpoligon oldalai a gúla alapélei. A gúla szabályos, ha vezérpoligonja szabályos sokszög és oldalélei egyenlők.

A prizma zárt hasábfelület lapjaival és két egymással parallel sík által határolt polieder. A prizma, a hasáb, egy oldallapja a hasábfelület egy lapja, egy oldallap sokszöge mindig parallelogramma, mert hasábfelület egy lapján lévő élek parallel egyenesek és egy lapot parallel síkok parallel egyenesekben metszik. A hasábfelülethez nem tartozó parallel síkok a hasábfelületet n-oldalú sokszögekben metszik, e sokszögek közül bármelyik a hasáb vezérpoligonja, mindkettő a hasáb alaplapja, illetve az egyiket alaplapnak, a másikat fedőlapnak mondjuk, ezek mindig egybevágó sokszögek. A hasábfelület éleire eső poliederélek a hasáb oldalélei, egyéb élek a hasáb alapélei. Megkülönböztetünk egyenes és ferde hasábot. A hasáb egyenes, ha oldalélei az alaplapra merőlegesek, különben ferde. Hasáb, melynek alaplapja parallelogramma, annak minden lapja parallelogramma, ilyen négyoldalú hasáb neve parallelepipedon. Oblongum alapú egyenes hasáb minden élszöge, minden lapszöge derékszög, ezért derékszögű parallelepipedonnak mondjuk. Oly egyenes hasáb, melynek alaplapja szabályos sokszög, szabályos hasáb.

73. §. A síklapú prizmatoid. Síklapú prizmatoid két lapja parallel, e határlapok egyébként tetszőleges sokszögek, az egyik lehet háromszög, a másik négyszög, vagy az egyik egy távolság, a másik sokszög, vagy egybevágó sokszögek stb.; a prizmatoid továbbá határolva van háromszögekkel, ezeket úgy nyerjük, hogy az előbbi parallel síkokban fekvő sokszögek csúcspontjait egyenesekkel összekötjük. A határoló háromszögek közül két egymásután következő egy síkban is lehet, ilyen két határoló háromszög egy határoló négyszögbe megy át. A parallel síkokban fekvő sokszögek a prizmatoid alaplapjai, a többi oldallap. A prizmatoid leírásából látjuk, hogy a gúla és hasáb poliederek mindenkor prizmatoidoknak is mondhatók.

74. §. A szabályos poliederek. A szabályos polieder határolva van kongruens konvex szabályos sokszögekkel, testszögletei egybevágó testszögletek. A szabályos poliederek lehetséges voltát az Euler-féle tétellel mutatjuk ki, exisztenciájukat pedig azok ábrázolásával egyidőben fogjuk bizonyítani. Legyen a szabályos polieder határoló sokszögének oldalszáma n, míg az egy csúcsban összefutó élek száma m. Mivel minden határoló sokszög legalább háromoldalú és minden testszöglet is legalább háromoldalú

$$n \geqq 3, \; m \geqq 3,$$

továbbá három szabályos hatszög testszögletet nem alkothat, mert a három élszög összege 360°, így mindig

$$n < 6.$$

Ha e a szabályos polieder éleinek száma, l a lapok száma és s a csúcsok száma, akkor szabályos poliedernél

$$2e = n \,.\, l = m \,.\, s$$

ez az összefüggés és az Euler-féle tétel a következő összefüggéseket adják

$$e = \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2}}, \quad l = \frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2}}, \quad s = \frac{\frac{2}{m}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2}}.\text{*}$$

Mivel e, l, s, n, m csak pozitív egész számok lehetnek, n és m csak oly értékei jöhetnek tekintetbe, melyek az

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenséget kielégítik. Ha az egyenlőtlenségből a törteket eltávolítjuk, majd —1-gyel megszorozzuk, nullára redukáljuk és mindkét oldalhoz 4-et hozzáadunk, nyerjük az

$$(n-2)\,(m-2) < 4$$

egyenlőtlenséget. Így n és m csak oly értékei jöhetnek tekintetbe, mely értékek az

$$\begin{aligned} (n-2)\,(m-2) &= 1 \\ (n-2)\,(m-2) &= 2 \\ (n-2)\,(m-2) &= 3 \end{aligned}$$

egyenletek egyikét kielégítik. Ennek következtében $n-2$, $m-2$ számára a következő értékpárok engedhetők meg: 1, 1; 1, 2; 2, 1; 1, 3; 3, 1. Ezek alapján a megoldási rendszerek

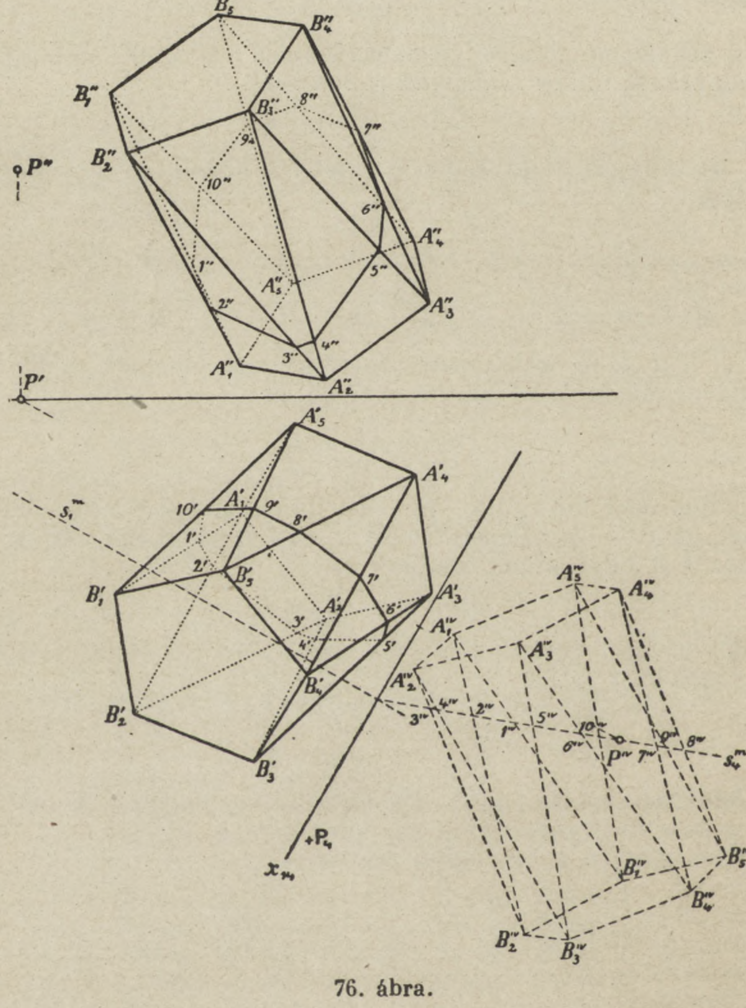
1. $n=3$, $m=3$, $l=4$, $s=4$, $e=6$,
2. $n=3$, $m=4$, $l=8$, $s=6$, $e=12$,
3. $n=3$, $m=5$, $l=20$, $s=12$, $e=30$,
4. $n=4$, $m=3$, $l=6$, $s=8$, $e=12$,
5. $n=5$, $m=3$, $l=12$, $s=20$, $e=30$.

Ebből az egyszerű diszkusszióból következik, hogy legfeljebb öt szabályos konvex polieder lehet.

75. §. Polieder síkmetszete. Vegyünk fel két parallel síkot és rajzoljuk meg az egyikben az A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, a másikban a B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 csúcspontokkal bíró ötszöget. A két sokszög egy

* G. Loria, Vorlesungen über darstellende Geometrie, II.

prizmatoid két alaplapja, az oldallapok háromszögek, ezek képei a prizmatoid definíciója alapján megrajzolhatók (76. ábra). A prizmatoid első kontúrpoligonja az $A_3A_4A_5\ B_1B_2B_3$ poligon, első képkörrajza az első kontúrpoligon első képe, $A'_3A'_4A'_5B'_1B'_2B'_3$; a második kontúrpoligon az $A_1A_2A_3A_4B_4B_5B_1B_2$ poligon, második képkörrajza az $A''_1A''_2A''_3A''_4B''_4B''_5B''_1B''_2$ poligon. Szerkesszük meg a két képével adott



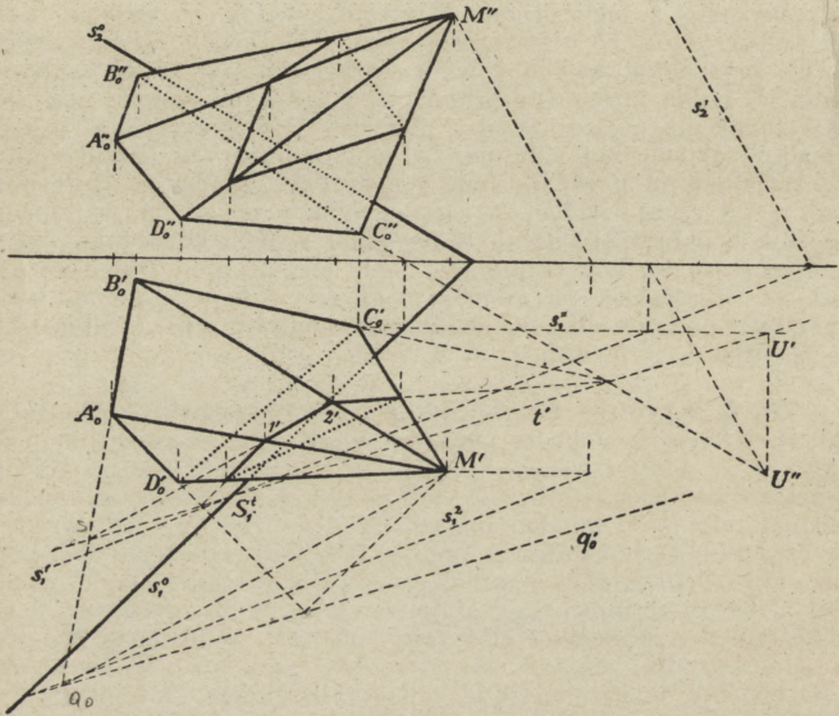
76. ábra.

polieder és az adott sík metszetét. A metszősík adva van első nyom vonalával, $s_1{}^m$, és második nyomvonalának egy pontjával, $P(P'P'')$. A síkmetszet síkpoligon, ennek vannak csúcspontjai és oldalai. A síkmetszet egy csúcspontját nyerjük, ha a polieder oly élének metszéspontját szerkesztjük meg a metszősíkkal, mely élnek metszéspontja a véges él egy belső pontja, amennyiben a metszéspont a véges él külső pontja, az ilyen élről azt fogjuk mondani, hogy a sík nem metszi a kérdéses élt. A síkmetszet egy oldalát nyerjük, ha egy határlap síkjának és a metszősíknak metszésvonalát szerkesztjük meg, e metszésvonal ama véges darabja, mely a határoló sokszög belsejébe esik a síkmetszetnek egy oldala; amennyiben a két sík metszésvonala a határoló sokszöget nem metszi, az ilyen határoló sokszögről azt fogjuk mondani, hogy az a síkot nem metszi. Midőn a síkmetszetet csúcspontjaival szerkesztjük meg, azt mondjuk, hogy a síkmetszetet élmódszerrel szerkesztettük meg; ha pedig a síkmetszetet oldalaival szerkesztjük meg, az mondjuk, hogy a síkmetszetet lapmódszerrel szerkesztettük meg. Akár élmódszerrel, akár lapmódszerrel kívánjuk a síkmetszetet megállapítani, minden egyes élről, minden egyes polieder lapról külön-külön meg kell állapítani, hogy metszi-e a metszősíkot. E megállapítások közvetlenül csak akkor végezhetők, ha a metszősík valamelyik képsíkra nézve vetítősík, de ugyanakkor legkönnyebben szerkeszthető él és sík metszéspontja is. E két körülmény arra indít, hogy a polieder és sík síkmetszetének meghatározásánál a poliedert és a metszősíkot transzformáljuk, új képsíkot vezetünk be, melyre nézve a metszősík vetítősík. A síkmetszet negyedik képe a metszősík negyedik nyomvonalának az a része, melyet a sík negyedik nyomvonalán a polieder negyedik képkörrajza határol. A negyedik képben közvetlenül az ábrából leolvasható, hogy a polieder mely élei, ill. mely lapjai vesznek részt az áthatásban. Az áthatási pontok első képei szolgáltatják a kimetszett poligon első képének csúcspontjait stb. A síkmetszet csúcspontjai 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

76. §. Egyenes és polieder metszéspontjai. Általánosságban egyenes és polieder metszéspontjait úgy szerkesztjük meg, hogy egy az adott egyenesre illeszkedő tetszőleges sík és polieder síkmetszetében meghatározzuk ama pontokat, melyekben az egyenes a síkmetszetpoligon oldalait metszi, minden ilyen pont az egyenesnek és a poliederfelületnek is pontja, tehát egyenes és polieder metszéspontja. Orthogonális parallel projekcióban két képsíkon a feladatot a legegyszerűbben úgy oldjuk meg, hogy az egyenesre illesztett tetszőleges segédsíkot első vagy második vetítősíknak választjuk. Ha második vetítősíknak választottuk, akkor a síkmetszet második képéből megszerkesztjük annak első képét, és ahol az első képben a síkmetszet első képének oldalai az adott egyenes első képét metszik, ott nyerjük a keresett pontok első képeit, felvetítéssel nyerjük e pontok második képeit.

77. §. Gúla síkmetszete. Orthogonális parallel projekcióban vezérpoligonjával és csúcspontjával adott gúla síkmetszetét ugyanúgy szerkeszthetjük meg, mint általános polieder esetében. De gúlánál lényegesen egyszerűbb szerkesztéssel jutunk eredményhez. A piramis oldallapjai gúlafelület egy részét alkotják s így a gúla oldalélein a síkmetszet egyes pontjait centrális kollineációval szerkeszthetjük meg, mert a vezérpoligon és a síkmetszet a térben a gúla csúcspontjára nézve perspektív alakzatok. A szerkesztés menete pld. az első képsíkban a következő: *a)* megszerkesztjük az alapsík és metszősík közös egyenesének első képét, ez az egyenes lesz a centrális kollineáció tengelye; *b)* a gúla csúcspontjára illeszkedő és a metsző síkkal parallel sík a gúla alapsíkját egy egyenesben metszi, ennek az egyenesnek az első képe a centrális kollineáció egyik ellentengelye; *c)* a gúla csúcspontjának első képe a kollineáció centruma; *d)* centrummal, tengellyel és egyik ellentengellyel meghatározott centrális kollineációban megszerkesztjük az alappoligon csúcspontjainak megfelelőit, e pontok a keresett síkmetszet csúcspontjainak első képei.

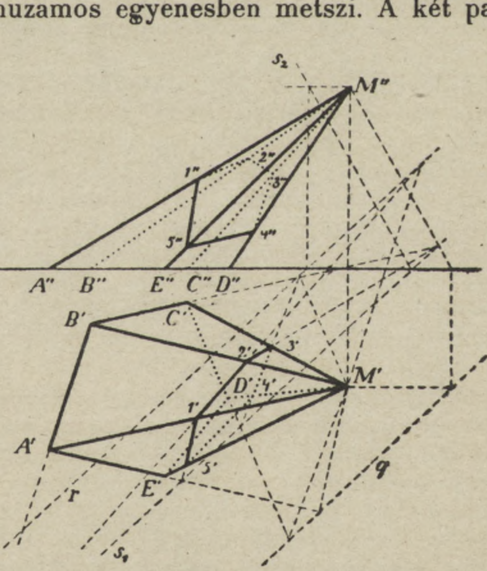
A fenti meggondolások alapján a 77. ábrában szerkesztettük meg a gúla síkmetszetét. A gúla vezérpoligonja az $A_0B_0C_0D_0$ négyszög az $S^0(s_1^0 s_2^0)$ síkban, a gúla csúcspontja az $M(M'M'')$ pont. A metszősík az s_1^1, s_2^1 nyomvonalakkal adott S^1 sík. A síkmetszet



77. ábra.

első képe és a vezérpoligon első képe közt fennálló centrális kollineáció centruma a gúla csúcspontjának első képe, M'. A kollineáció tengelye az S^0 és S^1 sík metszésvonalának első képe, t', t' egyenes egy pontja a két első nyomvonal közös pontja, S_1^t, a két sík metszésvonalának egy másik pontját a második képsíkkal parallel segédsíkkal szerkesztettük meg, e sík, melynek első nyomvonala az s_1^x, egyenes, a vezérpoligon síkjából és a metsző síkból egy-egy második fővonalat metsz ki, e fővonalak közös pontjának első képe U', a keresett tengely egy második pontja. A kollineáció meghatározásához megszerkesztettük még az egyik ellentengelyt, a metszősík végtelenben fekvő egyenesének megfelelőjét. E végett megállapítottuk a gúla csúcspontjára illeszkedő és a metszősíkkal parallel sík első nyomvonalát, az s_1^2 egyenest, az s_1^0 és s_1^2 egyenesek közös pontja a keresett ellentengely egy pontja, az ellentengelyről egyébként tudjuk, hogy az a kollineáció tengelyével parallel egyenes, tehát a q_0' egyenes ezek szerint megrajzolható. A síkmetszet első képében az egyes oldalakat nyerjük, ha a már meghatározott centrális kollineációban a vezérpoligon oldalainak megfelelőit szerkesztjük. Így az $A_0'B_0'$ egyenes metszi a kollineáció tengelyét, a t' egyenest és a kollineáció ellentengelyét, a q_0' egyenest egy-egy pontban. Az utóbbi pont a gúla csúcspontjának első képével megállapítja a megfelelő egyenes irányát, az előbbi ponton átmenő és a most megállapított irányú egyenes a keresett megfelelő egyenes, $1'2'$. Az első képtől függetlenül megszerkeszthetjük a síkmetszet második képét. A második képsíkban a vezérpoligon második képe és a síkmetszet második képe ugyancsak centrálkollineár alakzatok. A kollineáció centruma a gúla csúcspontjának második képe, tengelye a t egyenes második képe és egyik ellentengelye a q_0 egyenes második képe stb.

Megemlítendő, hogy midőn a 77. ábrában, az első projekcióban centrális kollineációval az $A_0'B_0'$ egyenes megfelelőjét az $1'2'$ egyenest szerkesztettük, akkor az MA_0B_0 lap és metszősík közös egyenesének első képét szerkesztettük meg. A szerkesztés sztereometriai meggondolásokkal is végezhető. T. i. a vezérpoligon síkja, a metszősík és az MA_0B_0 lap a tér három síkja, e három síknak van egy közös pontja, melyre a három sík két-két síkjának közös egyenese illeszkedik, ezek közül az egyik az A_0B_0 egyenes, a másik a t egyenes, e kettő már meghatározza a három sík közös pontját, ez a pont tehát a keresett *12* egyenes pontja S. Továbbá az MA_0B_0 lap az S^1 metszősíkot és a gúla csúcspontjára illeszkedő, a metszősíkkal parallel S^2 síkot két párhuzamos egyenesben metszi. A két parallel egyenes közül az MA_0B_0 lap és S^2 metszésvonala közvetlenül megrajzolható, ennek az egyenesnek az egyik pontja az M pont, mert mindkét sík közös pontja, egy másik pontja az A_0B_0 egyenesnek az S^2 síkkal való metszéspontja, e pont csak ott lehet, ahol az A_0B_0 egyenes a q_0 egyenest metszi, mert a q_0 egyenes a vezérpoligon síkjának a metszésvonala az S^2 síkkal. Ha az utóbbi pont Q_0, mondhatjuk, hogy a keresett *12* egyenes az MQ_0 egyenessel parallel.



78. ábra.

A 78. ábrában ugyancsak gúla síkmetszetét szerkesztettük meg. A gúla vezérpoligonja az első képsíkban az $ABCDE$ ötszög, csúcspontja az $M(M'M'')$ pont. A metsző síkot s_1, s_2 nyomvonalaival adtuk meg. Ez esetben a síkmetszet első képét centrális kollineációval szerkeszthetjük meg, a kollináció centruma M', tengelye a metsző sík első nyomvonala, s_1, és egyik ellentengelye a gúla csúcspontjára illeszkedő és a metsző síkkal parallel sík első nyomvonala, q. Külön kell hangsúlyoznunk, hogy a síkmetszet második képét nem tudjuk az első képtől függetlenül megszerkeszteni, mert a síkmetszet második képe és a vezérpoligon második képe közti centrális kollineáció egy kollineáció szinguláris elemekkel, és pedig azért, mert a vezérpoligon síkja a második képsíkra nézve vetítősík.

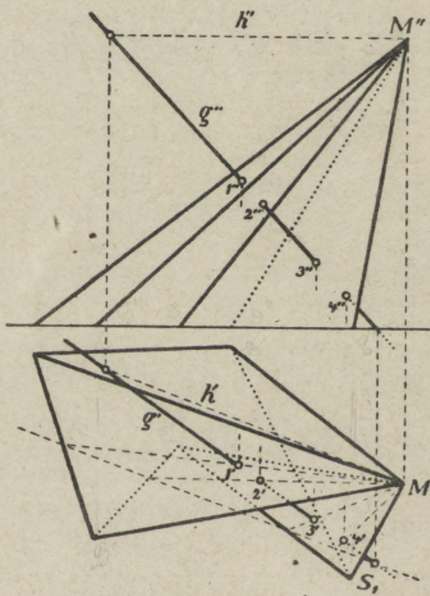
A kész 78. ábrát még úgyis értelmezhetjük, hogy abban az M csúcsponttal és az *12345* vezérpoligonnal megadott gúlának síkmetszetét szerkesztettük az első képsíkkal, e síkmetszet a gúla első nyompoligonja. Ez esetben az első képsíkban a centrális kollineáció centruma és tengelye ugyanaz, mint előbb, csak az q és r ellentengelyek szerepet cserélnek, ahol r a gúla csúcspontjára illeszkedő és az első képsíkkal parallel síknak a metszésvonala az eredeti metszősíkkal.

Orthogonális parallel projekcióban két képsíkon egy tetszőleges gúlának van első és második nyompoligonja. A két nyompoligon az első és második képsík egyesítése után megint centrál kollineár megfelelők, ha a gúla egy élének első és második nyompontja, ill. a gúla egy oldallapjának első és második nyomvonala megfelelő pontok, ill. megfelelő egyenesek. A térben a két nyompoligon perspektív, a perspektivitás centruma a gúla csúcspontja, M. Ha két perspektív síkbeli rendszert a tér egy tetszőleges pontjából egy P képsíkra vetítünk, egyesített centrál kollineár vonatkozásban lévő síkbeli rendszereket nyerünk. E megjegyzés előrebocsátása után kétféleképpen is igazolhatjuk a fenti állításunkat. *a)* Mindenekelőtt bizonyos, hogy a nyompoligonok megfelelő oldalainak metszéspontjai egy egyenesen vannak, mert a megfelelő nyompoligonoldalak a gúla egy oldallapjának első és második nyomvonalára eső egyenesek, tehát a megfelelő nyompoligonoldalak metszéspontjai síkok tengelypontjai, de ezek az $x_{1\,2}$ tengelyre illeszkedő pontok. Evvel azonban a Desargues-féle tétel figyelembevételével már ki is mutattuk, hogy a megfelelő pontok összekötő egyenesei mind egy ponton mennek át. *b)* Közvetlenül is kimutathatjuk, hogy a megfelelő pontok egyensei a képsíkok egyesítése után mind egy ponton mennek át. Legyen a rajz síkja a második képsík és vetítsük a két térbeli nyompoligont a második képsíkra egy oly profil egyenes irányában, mely profil egyenes merőleges a második felezősíkra. Akkor a második nyompoligon ferde képe önmaga, az első nyompoligon ferde képe a második képsíkra ugyanaz a poligon lesz, mint az a poligon, melyet az első képsíkban lévő nyompoligonból nyerünk, ha annak síkját, az első képsíkot az $x_{1\,2}$ tengely körül a második képsíkba forgatjuk. Mivel a térben a megfelelő pontok összekötő egyenesei a gúla csúcspontjára illeszkedő egyenesek voltak, tehát ez egyenesek ferde képei szintén egy pontra illeszkedő egyenesek lesznek. E pont a gúla csúcspontjának a második képsíkon lévő ferde parallel képe. Mivel a nyompoligonok megfelelő pontjai mind egy ponton mennek át, a Desargues-féle tétel megfordítottjára való hivatkozással is mondhatjuk, hogy a megfelelő egyenesek metszéspontjai egy egyenes pontsor pontjai.

oldalai

A gúla legegyszerűbb síkmetszeteit akkor nyerjük, ha a metszősíkot a gúla csúcspontjára illeszkedően választjuk. A gúla csúcspontjára illeszkedő sík a gúlát alkotókban metszi, mert a vezérpoligon és sík közös pontja, továbbá a gúla csúcspontja a metszősíkra illeszkedő két pont, ilyen két pont gúlaalkotót állapít meg, melynek két pontja a metszősíkra illeszkedik, tehát az egész alkotó a metszősíkra illeszkedő egyenes. Amennyiben a gúla vezérpoligonja síkpoligon, a gúla csúcspontjára illeszkedő sík által kimetszett alkotókat úgy nyerjük, hogy megszerkesztjük a vezérpoligon síkjának és a metsző síknak közös egyenesét, ez az egyenes a vezérpoligon oldalait pontokban metszi, minden ilyen pont a gúla csúcspontjával meghatároz egy-egy oly alkotót, mely alkotó a metszősíkra illeszkedik.

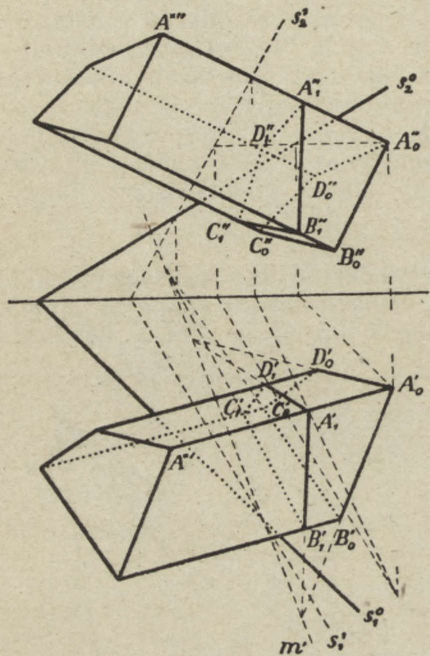
78. §. Egyenes és gúla metszéspontjai. Egyenes és gúla metszéspontjait az egyenesre illeszkedő segédsíkkal állapítjuk meg. Az egyenes és segédsík síkmetszetének közös pontjai a keresett pontok. Az egyenesre illeszkedő síkok síksort alkotnak, e síksornak egy síkja illeszkedik a gúla csúcspontjára, ezt a síkot választjuk segédsíknak, mert e sík és gúla síkmetszete a legegyszerűbb. E segédsíkra illeszkedő gúlaalkotók és az adott egyenes közös pontjai az egyenes és gúla metszéspontjai. A 79. ábra mutatja a síkvezérpoligon és csúcsponttal adott gúlának a gúla csúcspontjára illeszkedő sík által kimetszett alkotóit, továbbá a metszősíkra illeszkedő egyenes és gúlafelület metszéspontjait.



79. ábra.

79. §. Hasáb síkmetszete. Vezérpoligonjával és az alkotók irányával adott hasáb síkmetszetét vagy úgy szerkesztjük meg, hogy a hasábot és a metsző síkot új képsíkra transzformáljuk úgy, hogy a metszősík az új képsíkra nézve vetítősík legyen, amint azt az általános polieder síkmetszetének szerkesztésénél tárgyaltuk, vagy azon affin vonatkozás alapján, mely vonatkozás a hasáb két síkmetszetének két első, ill. két második képe között van. A vezérpoligon és síkmetszet első képe közötti affin vonatkozásnak tengelye az alapsík és metszősík metszésvonalának első képe; az affinitás iránya a hasáb egy oldalélének első képe, mert a vezérpoligon egy csúcspontjának megfelelője e csúcsponton átmenő oldalélnek metszéspontja a metszősíkkal; az affinitás meghatározásához szükséges pontpárt pedig azáltal szerkesztjük meg, hogy egy oldalél döféspontját szerkesztjük a metszősíkkal, e pont és e pontra illeszkedő oldalél metszéspontja a vezérpoligon síkjával megfelelő pontok.

E meggondolások alapján a 80. ábrában szerkesztettük meg egy hasáb síkmetszetét. A hasáb vezérpoligonját, az $A_0B_0C_0D_0$ négyszöget, az egyik képével a nyomvonalaival adott $S^0(s_1^0\, s_2^0)$ síkban vettük fel. A vezérpoligon második képét a poligon csúcspontjaira illeszkedő első fővonalakkal szerkesztettük. A hasábnak az A_0 pontra illeszkedő oldalélének első és második képe tetszőleges irányban rajzolható, az így nyert $a(a'a'')$ éllel parallel és a vezérpoligon csúcspontjaira illeszkedő egyenesek a hasáb oldalélei. Ha a vezérpoligon a hasáb alaplapja, úgy ezt a hasábot még egy födőlappal is határolhatjuk, e végett felvesszük a födőlappoligonnak az a élre illeszkedő A^x csúcspontját egész tetszőlegesen, a fődőlappoligon többi csúcspontja ekkor már meghatározott pontok. T. i. a hasáb oldallapjai parallelogrammák és parallelogramma képe megint parallelogramma, ebből következik, hogy az oldalélek képhossza egy-egy képsíkon egyenlő, tehát az első projekcióban az oldalélek végpontjainak első képeit úgy nyerjük, hogy az $\overline{A_0'A^{x'}}$ távolságot az oldalélek első képeire a vezérpoligon csúcspontjaitól számítva egyértelemben felrakjuk. Hasonlóan nyerjük a födőlapcsúcspontok második képeit.



80. ábra.

Legyen továbbá a nyomvonalaival adott metszősík az $S^1(s_1^1, s_2^1)$ sík. A síkmetszet első képe és a vezérpoligon első képe közt fennálló affin vonatkozás tengelye az S^0 és S^1 síkok közös egyenesének első képe, m'. Az affin vonatkozás egy megfelelő pontpárjának elérésére megszerkesztettük az a él és S^1 sík metszéspontját, $A_1(A_1'A_1'')$, a élnek az S^1 síkban lévő második födőegyenesének felhasználásával, ekkor A_0' és A_1' egy megfelelő pontpár. A meghatározott affinitás alapján előállítjuk az A_0', B_0', C_0', D_0', pontok megfelelőit, az A_1', B_1', C_1', D_1' pontokat, e pontok a síkmetszet első képének csúcspontjai, felvetítéssel nyerjük e pontok második képeit.

Ha a hasáb vezérpoligonja az első képsíkban van, akkor egy síkmetszet első képe és a vezérpoligon közti affin vonatkozásnál az affinitás tengelye a metszősík első nyomvonala.

Úgy mint a gúlánál, a hasábnál is megkülönböztethetünk egy első és egy második nyompoligont, e két nyompoligon a képsíkok egyesítése után affin vonatkozásban lévő idomok, a bizonyítás ugyanúgy végezhető, mint a gúla nyompoligonjainál.

A hasáb síkmetszetét affin vonatkozás alapján nem szerkeszthetjük meg, ha a vezérpoligon síkja azon képsíkra nézve vetítősík, mely képsíkon az affin vonatkozást alkalmazni óhajtjuk. Ekkor a síkmetszetet az affin vonatkozás alapján a másik képsíkon állapítjuk meg és a síkmetszet így meghatározott képéből rendezők rajzolásával megszerkesztjük a hiányzó képet.

A hasáb oldaléleivel parallel sík a hasábot alkotókban metszi, hiszen a hasáb gúla, melynek csúcspontja a hasábalkotók végtelenben fekvő pontja, a szóbanforgó sík e végtelenben fekvő csúcspontra illeszkedik, tehát a síkmetszet alkotókból tevődik össze. A kimetszett alkotók egy-egy pontja a vezérpoligon ama pontja, melyhen az alapsík és metszősík közös egyenese a vezérpoligont metszi.

80. §. Egyenes és hasáb metszéspontjai. Egyenes és hasáb metszéspontjainak szerkesztésénél az egyenesre illeszkedő és a hasáb oldaléleivel parallel segédsíkot alkalmazunk, e segédsík által kimetszett hasábalkotók és adott egyenes illeszkedési pontjai a keresett pontok.

81. §. Két gúla áthatása. Két polieder áthatásának szerkesztése általában abban áll, hogy az egyik polieder éleinek metszéspontjait szerkesztjük a másik polieder lapjaival és megfordítva. Ilyen módon a metszéspontoknak egy csoportját nyerjük, ezeket egyenesekkel úgy kell összekötni, hogy egy-egy ilyen egyenes két poliederlap metszésvonala legyen. A metszéspontokból és metszésvonalakból álló alakzat torzpoligon, mely egy, két vagy több összefüggő részből áll.

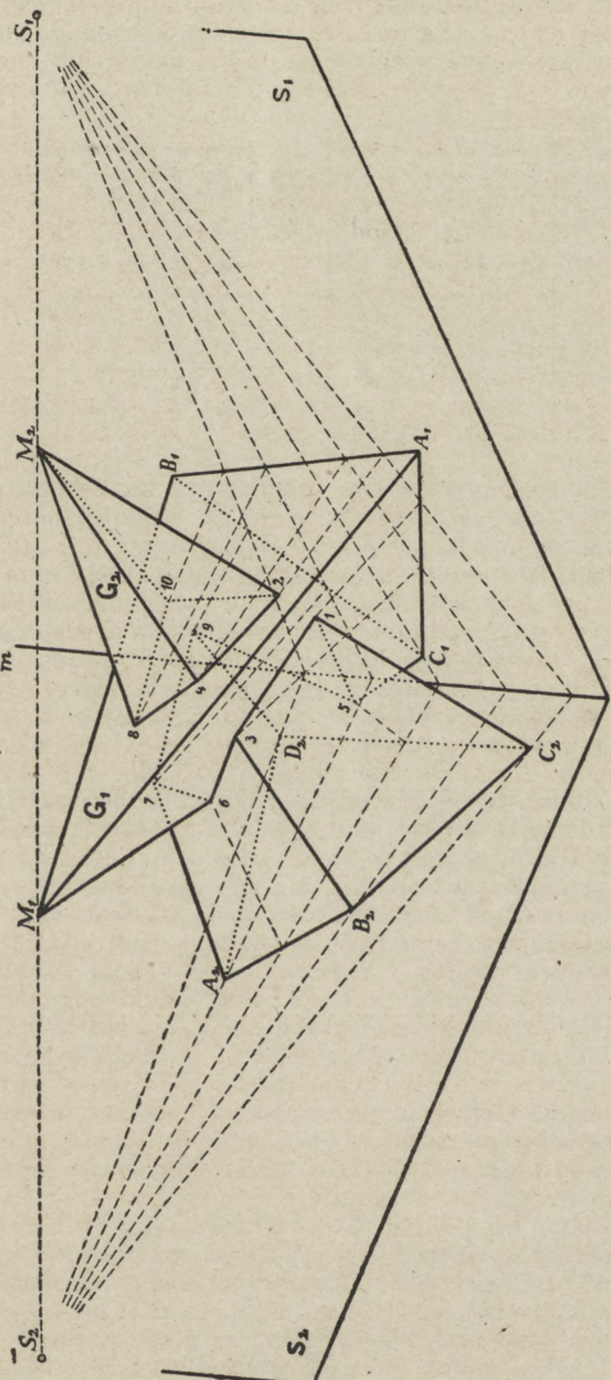
Két gúla áthatásának szerkesztésénél az egyik gúla egy-egy élének metszéspontját szerkesztjük meg a másik gúlával és megfordítva. Legyen az egyik gúla G_1, csúcspontja M_1, vezérpoligonjának csúcspontjai az S_1 síkban A_1, B_1, C_1, ... stb.; legyen a másik gúla G_2, csúcspontja M_2, vezérpoligonjának csúcspontjai az S_2 síkban A_2, B_2, C_2, ... stb. Jobb áttekintés végett nevezzük a G_1 gúla A_1, B_1, C_1 ... pontokra illeszkedő oldaléleit rendre a_1, b_1, c_1, ... stb., hasonló megállapodással szólhatunk a G_2 gúla a_2, b_2, c_2, ... éleiről. A 81. ábrában az áthatás szerkesztésének menetét csak egy projekcióban mutatjuk be s így a kép jelzésére használt vesszőzések mellőzhetők.

Ha az a_1 él metszéspontjait akarjuk szerkeszteni a G_2-vel, akkor oly segédsíkot alkalmazunk, mely sík illeszkedik a G_2 gúla csúcspontjára, az M_2 pontra, és tartalmazza az a_1 élt. Mivel az a_1 él illeszkedik az M_1 pontra, az a_1 él és G_2 gúla metszéspontjainak szerkesztésénél oly segédsíkot alkalmazunk, mely mindkét gúlacsúcspontra illeszkedik, tehát illeszkedik a két csúcspont összekötő egyenesére. Ugyanúgy, ha a G_2 egy oldalélének és a G_1 gúla metszéspontjait kívánjuk szerkeszteni, segédsíkul egy, a két gúla csúcspontjait összekötő egyenesére illeszkedő, síkot alkalmazunk. Tehát az oldalélek metszéspontjainak meghatározásánál alkalmazandó segédsíkok egy síksor síkjaihoz tartozó síkok, a síksor tengelye M_1, M_2 pontok összekötő egyenese, g. A segédsíksor minden egyes síkjának van nyomvonala az S_1 és az S_2 síkban. Egy ilyen síknak az S_1 síkban lévő nyomvonala illeszkedik a g egyenes és S_1 sík közös pontjára, ugyanúgy az S_2 síkban lévő nyomvonala illeszkedik a g egyenes és S_2 sík közös pontjára, legyenek e pontok S_1, illetőleg S_2. Az a_1 élre illesztett segédsík nyomvonala az S_1 síkban illeszkedik az S_1 és A_1 pontra, hogy e segédsík nyomvonalát megrajzolhassuk az S_2 síkban, a sík két egyenesének metszéspontját szerkesztjük meg az S_2 síkkal, a segédsík egyik egyenese a g egyenes, ennek nyompontja az S_2 síkban az S_2 pont, a segédsík másik egyenese a sík nyomvonala az S_1 síkban, ennek metszéspontja az S_2 síkkal a két vezérpoligonsík közös egyenesére illeszkedik, az m egyenesre, tehát a segédsík nyomvonalának egy másik pontja az S_2 síkban az S_1 síkban lévő nyomvonal és m egyenes közös pontja.

Így megszerkesztve az összes segédsíkok nyomvonalait az S_1 és S_2 síkokban egy-egy sugársor sugarait nyerjük az S_1 és S_2 pontok körül, a sugársor sugarai egy egymásutánt állapítanak meg, beszélhetünk egy első, egy második stb. segédsíkról. Ezen egymásutánt követő segédsíkokkal megszerkesztjük az egyes oldalélek metszéspontjait, így az első segédsík tartalmazza az a_1 élt, ez az él nem vesz részt az áthatásban, mert e sík nyomvonala az S_2 síkban a G_2 vezérpoligonját nem metszi, az a_1 élt mindjárt teljes vonallal megrajzoljuk, mert végig látható. A következő segédsík tartalmazza a G_2 gúla c_2 élét, ez az él a G_1 gúlát két pontban metszi, ezeket nyerjük, ha a segédsíknak az S_1 síkban lévő nyomvonalával metsszük a G_1 gúla vezérpoligonját, e metszéspontokhoz tartozó gúlaalkotók a c_2 élt metszik, minden ilyen metszéspont az áthatási poligon egy csúcspontja. Mielőtt hasonlóan a többi él metszéspontját megszerkesztenők avval a gúlával, mely gúlának a kérdéses él nem oldaléle, rögtön megállapítjuk az él láthatósági viszonyait és azt rajzban reprodukáljuk. Jelöljük az áthatási poligon csúcspontjait számokkal, a már megszerkesztett pontok legyenek 1 és 2. Akkor a c_2 élnek, C_2 és 1 pontok, továbbá 2 és M_2 pontok által határolt véges darabjai láthatók, tehát ezeket a részeket teljes vonallal rajzoljuk, míg az 1 és 2 pontok által határolt véges darabot sem teljes, sem pontozott vonallal nem rajzoljuk, mert megállapodunk abban, hogy egy él ama részét, mely rész a másik test belsejében van, egyáltalában nem húzzuk ki. A következő él a b_2 él, erre különösebb megjegyezni való nincs. Az azután következő él a G_1 gúla c_1 éle, ennek metszéspontjai a második gúlával legyenek 5 és 6. A c_1 él M_1-től 6-ig lévő véges része látható, tehát teljes vonallal rajzoljuk, a 6-tól 5-ig lévő részt nem húzzuk ki, mert ez az élrész a G_2 gúla belsejében van, az 5-től C_1-ig lévő részt részben pontozva, részben teljes vonallal rajzoljuk, pontozva rajzoljuk a c_2 élig, mert ezt a részt a G_2 gúla eltakarja.

Ilyen módon az összes éleken rajzban feltüntetve a láthatóságot a már kifejlődött térszemlélet alapján megrajzolhatjuk az áthatási poligon oldalait. Poligon oldal, mint két látható poliederlap metszésvonala, teljes vonallal, mint egy látható és egy nem látható lap metszésvonala, vagy mint két nem látható lap metszésvonala pontozott vonallal rajzolandó.

Amennyiben kezdő az élek láthatóságának feltüntetése mellett sem tudná az áthatási poligon csúcspontjait oldalakkal összekötni, az az alanti módon két táblázatot készít. Az első táblázat a G_1 gúlára, míg a második táblázat a G_2 gúlára vonatkozik. Az első rovatban mindkét táblázatban a gúlák oldallapjai szerepelnek, egy oldallap azon élekkel van jelezve, mely élek összekötő síkja a kérdéses oldallap. Az áthatási poligon szerkesztésénél az első pontokat a c_2 élen nyertük, az 1 és 2 pontokat. A c_2 él a második táblázat második és harmadik sorában szerepel, tehát a második és harmadik sorba írjuk az 1 és 2 számokat egymás alá; a metszéspontok szerkesztéséből



81. ábra.

megállapítjuk, hogy az 1 pont az első gúla c_1a_1 lapján van, tehát az első táblázat harmadik sorába írjuk az 1 számot, mivel pedig a 2 pont az első gúla a_1b_1 lapján van, a 2 számot beírjuk az első táblázat első sorába. Így eljárva

G_1

a_1b_1	2, 4, 8, 10
b_1c_1	$\frac{5}{6}$, 7, 9
c_1a_1	1, 3, $\frac{5}{6}$

G_2

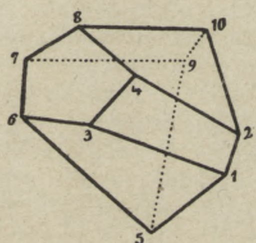
a_2b_2	$\frac{3}{4}$, 6, $\frac{7}{8}$
b_2c_2	$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$
c_2d_2	$\frac{1}{2}$, 5, $\frac{9}{10}$
d_2a_2	$\frac{7}{8}$, $\frac{9}{10}$

az áthatási poligon minden csúcspontjával a két táblázatot elkészítjük. Az elkészített táblázatok alapján az áthatási poligon oldalait megállapíthatjuk. Általában minden csúcspontból két oldal indul ki, vegyük a 2 csúcspontot és állapítsuk meg, hogy ez a pont mely csúcspontokkal összeköthető, e pont az első táblázat első sorában van, s így e pont e sorban szereplő valamelyik csúcsponttal köthető össze, mindjárt a 4 ponttal összeköthető, mert a 2 és 4 pont a második táblázat ugyanazon sorában, a második sorban szerepel. A 2 pontból még egy oldal indul ki, ez nem mehet a 8 felé, mert 2 és 8 a második táblázat ugyanazon sorában nem szerepel, a 2 pont a 10 csúcsponttal összeköthető, mert a második táblázat harmadik sorában mindkét csúcspont szerepel. Ilyen módon az áthatási poligonnak minden oldala megállapítható. Az első táblázat második sorában az 5 és 6 csúcspontokat egymás alá írtuk, ezek a c_1 él metszéspontjai a G_2 gúlával; az egymás alá írt csúcspontokra nézve annak vizsgálata, hogy ezek összeköthetők-e vagy sem, felesleges, mert amennyiben ezek összeköthetők volnának, ez azt jelentené, hogy az egyik polieder él a másik polieder egy lapjában fekszik, ez pedig csak szélső esetben fordulhat elő. Említettük, hogy általában egy csúcspontból az áthatási poligonnak csak két oldala indul ki, több él csak akkor indul ki egy csúcspontból, ha az egyik polieder egy éle a másik poliedert egy élében metszi. Ez csak akkor következik be, ha a két poliedert előre úgy vesszük fel, hogy ez bekövetkezzék.

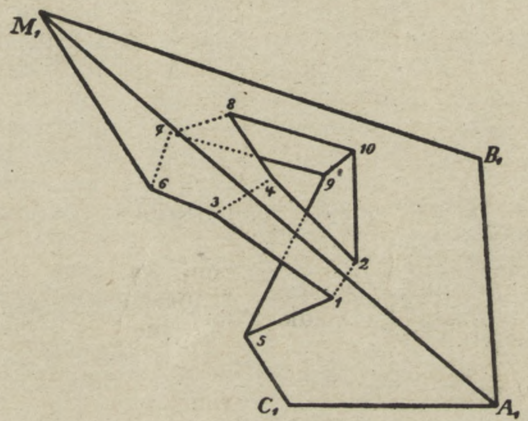
A tárgyalt esetben az áthatási poligon két összefüggő részből áll, az áthatási poligon egyik részének csúcspontjai rendre: 1, 3, 6, 7, 9, 5, 1, a másik rész csúcspontjai rendre: 2, 4, 8, 10, 2. Konvex gúláknál az áthatási poligon akkor áll két részből, ha az egyik gúla minden oldaléle az áthatásban résztvesz, az ábrázolt esetben a G_2 gúla minden oldaléle vett részt az áthatásban. Az áthatási poligon akkor áll egy részből, ha úgy az egyik, mint a másik gúlának vannak oldalélei, melyek az áthatásban nem vesznek részt. Az áthatásnak azt az esetét, mikor az egyik gúla minden oldaléle résztvesz az áthatásban, *teljes áthatásnak* mondjuk, ellenkező esetben az áthatás *kimetszés.*

Két polieder áthatásánál megkülönböztetünk *közös testrészt.* (82. ábra.) A közös testrész határlapjai részei az eredeti poliederlapoknak. Az áthatási poligon minden csúcspontja a közös testrésznek is csúcspontja, az áthatási poligon minden oldala a közös testrész éle, de ezeken az éleken kívül a közös testrésznek vannak még élei, ezek az élek az áthatásban szereplő ama élrészek, mely élrészek az egyik polieder belsejében vannak, tehát ama éldarabok, melyeket a láthatósági viszonyok ábrázolásánál meg sem rajzoltunk, a táblázatokban ezen éldarabok végpontjai egy-egy sorban azok, melyeknek számait egymás fölé írtuk.

Két polieder áthatásánál a poliederek később tárgyalandó rekonstrukciója érdekében még az egyes poliederek rajzát a közös testrész elhagyásával is elkészítjük. (83. ábra.) A G_1 gúla rajzát a közös testrész elhagyásával úgy nyerjük, hogy a gúla összes csúcspontjait és az áthatási poligon összes csúcspontjait kimásoljuk az eredetileg megadott, illetőleg megszerkesztett viszonylagos helyzetben. Az eredeti gúla azon éleit, melyek az áthatásban nem szerepelnek, a láthatósági viszonyok feltüntetésével a rajzba beiktatjuk, azután az áthatásban szereplő gúlaélek ama részeit rajzoljuk, melyek nincsenek a G_2 gúla belsejében; továbbá beiktatjuk az áthatási poligon minden oldalát, végül beiktatjuk a rajzba a G_2 gúla ama élrészeit, melyek a G_1 gúla belsejében vannak, utóbbi éleket csak azért rajzoljuk, mert az áthatásban szereplő testeket tömöreknek gondoljuk. Hasonlóan nyerjük a G_2 gúla rajzát a közös testrész elhagyásával.



82. ábra.



83. ábra.

82. §. Gúla és hasáb áthatása. Gúla és hasáb áthatási poligonjának csúcspontjait ugyanúgy szerkesztjük meg, mint két gúla esetében, hiszen a hasáb gúla, melynek csúcspontja a végtelenben van. Az alkalmazandó segédsíkok oly síksorba tartoznak, melynek tengelye a gúla csúcspontjára illeszkedik és parallel a hasáb oldaléleivel.

83. §. Két hasáb áthatása. Két hasáb esetében, amennyiben a hasábokat gúláknak tekintjük, a gúlák csúcspontjai végtelenben fekvő pontok, ezek összekötő egyenese végtelenben fekvő egyenes. E végtelenben fekvő egyenes az S_1, illetőleg S_2 vezérpoligonsíkot az S_1, illetőleg S_2 végtelenben fekvő pontban metszi. Az alkalmazandó segédsíkok nyomvonalai a vezérpoligonsíkokon parallel egyenesek, ezek irányát nyerjük, ha a tér egy tetszőleges pontjára illeszkedő, a hasábok oldaléleivel parallel egyenesek összekötő síkjának nyomvonalait szerkesztjük meg a vezérpoligonsíkokon. Különben az áthatás szerkesztése azonos a gúláknál nyujtott szerkesztéssel.

Árnyékszerkesztések.

84. §. A megvilágításról. Térbeli alakzat képének előállításánál arra törekszünk, hogy annak képe a szemlélőben lehetőleg azt a benyomást keltse, mint az eredeti alakzat. Ezt a célt szolgáltuk már akkor, mikor az alakzat képében a láthatósági viszonyokat feltüntettük. Minden alakzat lapjai színezettek és hol erősebben, hol kevésbbé vannak megvilágítva. A határlapok színezését nem kívánjuk figyelembe venni, de a megvilágítási viszonyok reprodukciójával, bár igen durva megközelítésben, e fejezetben kívánunk foglalkozni.

Térbeli alakzat megvilágítási viszonyainak törvényszerűségeit tanulmányozva, csakhamar arra a meggyőződésre jutunk, hogy azok sokkal bonyolultabbak, semhogy azok geometriai szerkesztésekre alapul szolgálhatnának. A törvényszerűségek egyszerűsítése végett oly feltételekből indulunk ki, melyek a valóságot csak megközelítik. Ilyen első feltétel *a fényforrás pontszerűsége.* Alakzatnak pontszerű fényforrás által előidézett megvilágítását *centrális megvilágításnak* mondjuk. Az ábrázoló geometriában mindenkor centrális világítást tételezünk fel. Egy másik egyszerűsítési feltétel az, hogy a pontfényforrásból kiinduló *fénysugarak mindig egyenes vonalak.*

Megvilágított alakzat megvilágítási viszonyai változnak, ha a szemlélő és alakzat viszonylagos helyzete változik. Az ábrázoló geometriában csak azoknak a megvilágítási viszonyoknak feltüntetésével fogunk foglalkozni, melyek a szemlélő helyzetétől függetlenek. A szemlélő szubjektív érzeteitől mentes megvilágítást *objektív megvilágításnak mondjuk.*

Meghatározott világítás mellett a fényforrásból kiinduló fénysugarak a testeknek, illetőleg felületeknek egyes részeit érik, ezek a testek vagy felületek megvilágított részei; a testek más részeit nem érik fénysugarak, ezek a testek vagy felületek meg nem világított vagy árnyékban lévő részei.

Alakzatnak megvilágított részeiben az egyes lapok hol sötétebbek, hol jobban megvilágítottak, ezeket a tonuskülönbségeket nem fogjuk feltüntetni. Alakzatnak meg nem világított részeiben az egyes lapok elméletileg egyáltalában nem láthatók, hiszen ezeket fénysugár nem éri, legalább nem olyan fénysugár, mely közvetlenül a fényforrásból indul ki. Az alakzatnak árnyékban lévő részeit az alakzat környezetében lévő alakzatok lapjairól visszavert fénysugarak érik, e visszavert fénysugarak okozzák azt, hogy az árnyékban lévő részek egy szemlélőre nézve láthatók. Az árnyékban lévő részeken is tapasztalhatunk tonuskülönbségeket, ezeket a tonuskülönbségeket szintén nem fogjuk feltüntetni.

Műszaki rajzokon leginkább a nap által előidézett megvilágítási viszonyokat tüntetjük fel, a napból kiinduló fénysugarakat parallel egyeneseknek tekintjük, az előidézett megvilágítást *parallel megvilágításnak* mondjuk. A fényforrás egy egyenesnek végtelenben gondolt pontja. A végtelenben gondolt fényforrást egy egyenessel adjuk meg, de meg kell még adni ezen az egyenesen a fénysugár haladási értelmét is, ezt az adott egyenes megnyilazásával tüntetjük fel. Parallel világításnál használt fénysugárirány legtöbbször egész speciális irány, ez az irány egy kocka csúcstengelyének iránya. A kocka, melynek csúcstengelyéről szó van, a két képsíkkal szemben speciális helyzetű, egyik lapja az első képsíkkal parallel, másik lapja a második képsíkkal parallel, a csúcstengely a kocka innenső, bal, felső csúcspontját összeköti a szemközt fekvő csúcsponttal. Az irányt megrajzolva, azt látjuk, hogy a fénysugár első és második képe az $x_{1,2}$ tengellyel 45°-os szöget alkot, ezért ezt a parallel megvilágítást *45°-os parallel megvilágításnak* mondjuk. Egyelőre mellékesen megjegyezzük, hogy ez a fénysugár egy képsíkkal sem alkot 45°-os szöget, a szögfeladatok tárgyalásánál majd megállapítjuk, hogy ez a szög 45°-nál kisebb.

Mindenekelőtt a térelemek árnyékszerkesztésével fogunk foglalkozni.

85. §. Pont árnyéka. Legyen adva centrális világítás mellett a fényforrás, L, továbbá a P pont, végül az **S** sík. Az L és P pontok egyenest határoznak meg, az egyenesnek az L ponttól a P pontig terjedő véges darabja a P ponthoz tartozó fénysugár, az egyenesnek LP irányban a P pont után következő végtelen szegmentuma a P pont *árnyéktere*. Pont árnyékáról csak akkor beszélhetünk, ha még megadunk egy árnyékfelfogó felületet, az árnyékfelfogó felület legyen az adott S sík. Ez a sík az LP egyenest egy pontban metszi, ez a metszéspont az egyenes különböző szakaszain lehet. Ha a metszéspont arra a szakaszra esik, melyet előbb a P pont árnyékterének mondottunk, akkor a metszéspont a P pont vetett árnyéka a síkon; ha a metszéspont az egyenes más szakaszára esik, akkor a pont vetett árnyékáról nem tárgyalhatunk, mert ekkor a fénysugár megszűnik fénysugár lenni, mielőtt a P ponthoz ér.

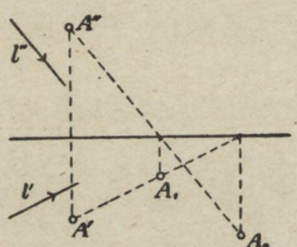
Parallel világítás mellett P pont árnyékát egy árnyékfelfogó felületen úgy szerkesztjük meg, hogy a fényforrást jellemző egyenessel az adott P pontra illeszkedő parallel egyenest vezetünk, ez az egyenes metszi egy első pontban az árnyékfelfogó felületet, ez a pont a P pont árnyéka, de csak akkor, ha a metszéspont az adott pont árnyékterének pontja.

Orthogonális parallel projekcióban két képsíkon pont árnyékáról csak akkor tárgyalhatunk, ha a pont egy az első térrészben fekvő pont és a fényforrás is első térrészben fekvő pont. Parallel világítás mellett tehát a fényforrást jellemző egyenes második vagy negyedik térrészben fekvő egyenes.

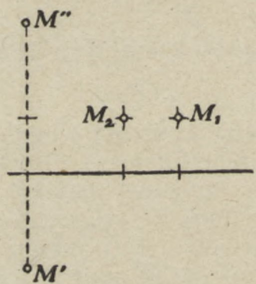
A legegyszerűbb árnyékszerkesztéseknél az árnyékfelfogó felület az első és a második képsík. Pontnak első képsíkra vetett árnyékát nyerjük, ha a pontra illeszkedő fénysugár első nyompontját, röviden a pont első árnyékát megszerkesztjük, megállapodunk abban, hogy egy A pont első árnyékát A_1-gyel jelöljük. Pont második árnyéka a pontra illeszkedő fénysugár második nyompontja, A_2. Egy pont első és második árnyéka közül csak az egyik érvényesül, mint árnyék; a két árnyék közül az érvényesül, mint vetett árnyék, mely árnyékpont az illető képsík pozitív felére esik. Így a 84. ábrában felvett pontnak csak az első árnyéka érvényesül, második árnyéka nincs, de azért rajzban legtöbbször mindkét árnyékot fogjuk feltüntetni.

45°-os parallel világítás mellett egy pontnak van első árnyéka, ha első rendezője nagyobb a második rendezőnél, van második árnyéka, ha második rendezője nagyobb az első rendezőnél. A pont két árnyéka összeesik, ha az x_{12} tengelyre veti árnyékát, 45°-os parallel világításnál ez akkor következik be, ha az árnyékvető pont két rendezője egyenlő, szóval első felező síkra illeszkedő pont. Első képsíkra illeszkedő pont első, második képsíkra illeszkedő pont második árnyéka önmaga.

Pont két árnyéka 45°-os parallel világítás mellett kizárólag körző használatával is szerkeszthető, ha az x_{12} tengelyt és a pont rendező vonalát megrajzoltnak gondoljuk. Vegyünk fel egy M pontot



84. ábra.

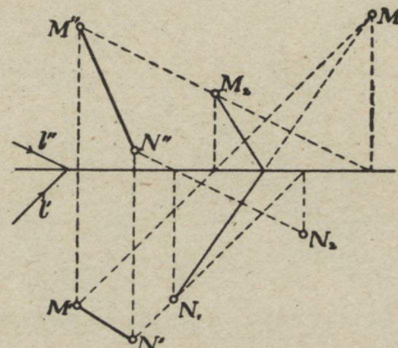


85. ábra.

(85. ábra), melynek második rendezője nagyobb az első rendezőnél. Körzőbe vesszük a két rendező közül a kisebbiket, ezt a M'' ponttól számítva, a rendező vonalra az x_{12} tengely felé felrakjuk, ugyanezen távolsággal a nyert pont körül körívet rajzolunk a rendező vonaltól jobbra, a körzőben lévő távolságot még a pont tengelyprojekciójától jobbra felrakjuk a tengelyre, most körzőbe vesszük a pont két rendezőjének különbségét és e távolsággal a tengelyen nyert pont körül a második képsík pozitív felén körívet rajzolunk, e körív és a már előbb rajzolt körív a második képsíkon egy pontban metszi egymást, e pont a felvett pont második árnyéka, a nem érvényesülő első árnyékot úgy szerkesztjük meg, hogy a második árnyékpontot és a tengelyen feltüntetett pontot egy négyzetoldal két végpontjának tekintjük, e jobbra megszerkesztett négyzet felső jobb csúcspontja lesz az adott pont első árnyéka.

Amikor egy pont első, illetőleg második árnyékát parallel világítás mellett megszerkesztettük, mondhatjuk, hogy az első, illetőleg második képsíkon megszerkesztettük a pont ferde parallel képét.

86. §. Az egyenes árnyéka. Egyenes árnyékán értjük az egyenesre illeszkedő pontok árnyékainak összességét. Centrális világítás mellett az egyenesre illeszkedő fénysugarak sugársort alkotnak, e sugársor síkját az egyenes *fénysíkjának* nevezzük. A fénysík metszésvonala az árnyékfelfogó felülettel az egyenes árnyéka. Orthogonális parallel projekcióban két képsíkon egy egyenesnek csak az első térnegyedben lévő részének van árnyéka. Egyenes első árnyéka, azaz árnyéka az első képsíkon, a fénysík első nyomvonalának egy része; második árnyéka a fénysík második nyomvonalának egy része. Egyenes árnyéka bármily árnyékfelfogó felületen abból a pontból indul ki, mely pontban az egyenes az árnyékfelfogó felületet metszi. Egyenes első árnyéka az egyenes első nyompontjából, második árnyéka az egyenes második nyompontjából indul ki. Egy egyenes első és második árnyékának van közös pontja, az a pont, melyben az első vagy második árnyék az x_{12} tengelyt metszi, mert e pont az egyenes fénysíkjának tengelypontja.



86. ábra.

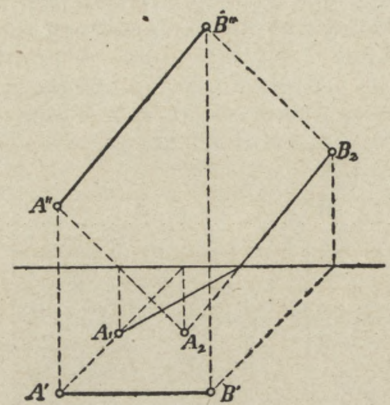
Valamely véges távolságnak első árnyéka a távolság egyenesének első árnyékára esik, és része az egyenesre illeszkedő fénysík első nyomvonalának, e rész végpontjai a távolság végpontjainak első árnyékai. A 86. ábrán két képével adott $\overline{MN}$ távolságnak képsíkokra vetett árnyékát nyerjük, ha mindkét végpontnak megszerkesztjük első és második árnyékát, M_1, N_1 és M_2, N_2 pontokat. $\overline{M_1N_1}$ egyenesdarab a távolság első, $\overline{M_2N_2}$ egyenesdarab a távolság második árnyéka. Az első árnyékból, mint árnyék csak az érvényesül, ami az első képsík pozitív felére esik, a második árnyékból csak az érvényesül, ami a második képsík pozitív felére esik.

Parallel egyenesek árnyékai ugyanazon árnyékfelfogó síkon parallel egyenesek, mert parallel egyenesekre illeszkedő fénysíkok parallel világítás mellett parallel síkok és parallel síkok ugyanazt a síkot parallel egyenesekben metszik.

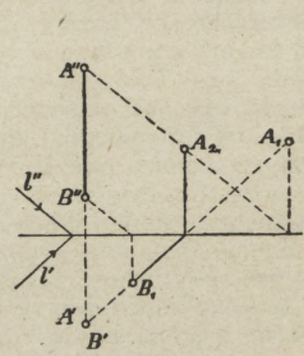
87. §. Különleges helyzetű egyenesek árnyékai. Parallel világítás mellett egy árnyékfelfogó síkkal parallel egyenes árnyéka az eredeti egyenessel parallel, mert az adott egyenesre illeszkedő fénysík az árnyékfelfogó síkot az egyenessel parallel egyenesben metszi, hiszen egyenes árnyéka az árnyékfelfogó síkon az egyenes és árnyékfelfogó sík közös pontjából indul ki, e pont a feltételezett viszonylagos helyzet mellett az adott egyenes végtelenben fekvő pontja.

Ennek alapján egy a *második képsíkkal parallel egyenes második árnyéka parallel az egyenes második képével;* mert az egyenes második képe az eredeti egyenessel parallel. (87. ábra.) Ugyanúgy első képsíkkal parallel egyenes első árnyéka az egyenes első képével parallel egyenes.

Első vetítő sugár első árnyéka fénysíkjának első nyomvonalára esik, de első vetítő sugárra illeszkedő sík első vetítő sík, első vetítő sugárra illeszkedő fénysík tartalmaz végtelen sok, a fénysugárral parallel egyenest, ezen egyenesek bármelyikének első képe a fénysík első nyomvonalával azonos egyenes, tehát *első vetítő sugár első árnyéka a vetítő sugár első képére illeszkedő és a fénysugár első képével parallel egyenes.* (88. ábra.) Az első vetítő sugár a második kép-



87. ábra.



88. ábra.

síkkal parallel egyenes, tehát második árnyéka a vetítő sugár második képével parallel, szóval az x_{12} tengelyre merőleges egyenes.

Az x_{12} tengellyel parallel egyenes első és második árnyéka az x_{12} tengellyel parallel, mert az x_{12} tengellyel parallel egyenes mindkét képsíkkal parallel.

45°-os parallel világítás mellett az első felezősíkkal parallel egyenes árnyéka mindkét képsíkon szintén az x_{12} tengellyel parallel egyenes, mert az egyenes fénysíkja az első felezősíkkal parallel sík.

Fénysugárral parallel egyenes vetett árnyéka pont.

88. §. Két kitérő egyenes árnyéka. Vegyünk fel két kitérő egyenesen egy-egy távolságot és szerkesszük meg e távolságok első árnyékait parallel világítás mellett. (89. ábra.) A szerkesztett árnyékok, mint az első képsík egyenesei metszik egymást egy pontban. E metszéspont a kitérő egyenesek egy-egy pontjának közös árnyéka. A metszéspontra illeszkedő fénysugár az adott egyenesek mindegyikét egy-egy pontban metszi, legyenek e pontok P, illetőleg O. E pontokra illeszkedő fénysugár haladási értelmét követve e pontokra nézve sorrendet nyerünk, egy első és egy második pontot. Azt fogjuk mondani, hogy az első pont árnyékot vet a második pontra. Szóval két kitérő egyenes esetében az egyik egyenes-

89. ábra.

nek egy pontja árnyékot vet a másik egyenes egy pontjára. A P és O pontokra illeszkedő egy fénysugár a két kitérő egyenesnek a fénysugárral parallel transzverzálisa.

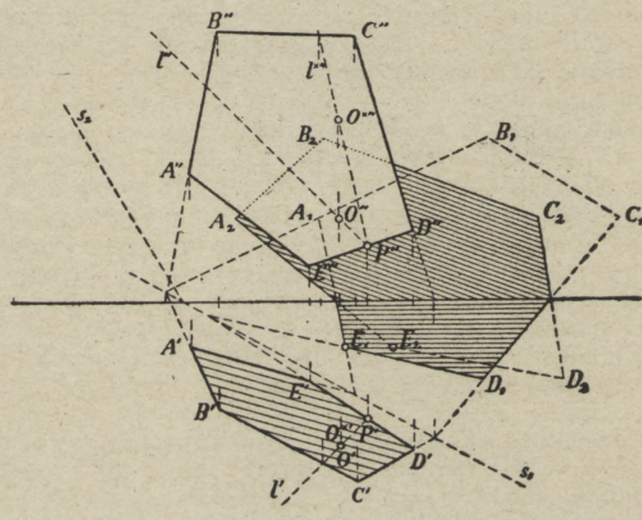
89. §. Sík árnyéka. A sík láthatósági viszonyainak tárgyalásánál a sík látható és nem látható oldalát különböztettük meg. Síkkal kapcsolatos árnyék szerkesztésénél a síknak az az oldala, melyet fénysugár ér, a síknak megvilágított oldala; másik oldalát fénysugár nem éri, a sík eme oldala a sík önárnyékban lévő oldala. Orthogonális parallel projekcióban két képsíkon megvilágított dűlt sík esetében mindkét képben a síknak megvilágított, illetőleg önárnyékban lévő oldalát látjuk, mert dűlt sík mindkét projekcióban ugyanazt az oldalát mutatja. Megvilágított feszített sík esetében a sík egyik képében annak megvilágított, másik képében annak önárnyékos oldalát mutatja, mert feszített síknak a két projekcióban két különböző oldalát látjuk. Ha az adott sík fénysík, vagyis a fénysugárral parallel sík, a sík egy oldalát sem éri fénysugár, a sík mindkét oldala önárnyékban van.

Tekintsünk el egyelőre a második képsíktól és állapitsuk meg egy sík első képsíkra vetett árnyékát. A sík első nyomvonala az első képsíkot két félképsíkra bontja, az első képsík egyik fele vetett árnyékban van, másik fele meg van világítva. Az első képsíknak vetett árnyékban lévő részét úgy állapítjuk meg, hogy egy, az első képsík fölött és a síkra illeszkedő pontnak megszerkesztjük vetett árnyékát, az első képsík ama fele, melyre e pont vetett árnyéka illeszkedik, az első képsíknak vetett árnyékban lévő része. Hasonlóan bíráljuk el síknak második képsíkra vetett árnyékát.

Fénysugárral parallel sík első, illetőleg második árnyéka az első, illetőleg második képsíkon a sík első, illetőleg második nyomvonala.

A gyakorlatban síknak látható önárnyékának és egy árnyékfelfogó felületen lévő vetett árnyékának feltüntetésében különbséget teszünk. Megállapodunk abban, hogy sík önárnyékban lévő részét valamivel világosabb tónusban tartjuk, mint vetett árnyékát valamely árnyékfelfogó felületen.

90. §. Síkidom árnyéka. Árnyékfelfogó felületen síkidom vetett árnyékán értjük a síkrészre illeszkedő pontok és határpontok vetett árnyékainak összességét. Amennyiben az árnyékfelfogó felület az első képsík, illetőleg második képsík, kapjuk a síkidom első, illetőleg második árnyékát. Egyenesvonalú *síkidom első árnyéka a síkidom oldalainak első árnyékai által határolt síkrész, második árnyéka a síkidom oldalainak második árnyékai által határolt síkrész.* A síkidom oldalaira illeszkedő fénysugarak hasábfelületet alkotnak, ezt a hasábfelületet a síkidom fényhasábjának mondjuk. A fényhasáb és első képsík síkmetszete a síkidom első árnyékának, a fényhasáb második nyompoligonja a síkidom második árnyékának árnyékhatára. A 90. ábrában az *ABCDE* síkötszög első és második árnyékát szerkesztettük meg és pedig úgy, hogy az ötszög minden egyes szögpontjának első és második árnyékát állapítottuk meg, a szögpontok árnyékainak megfelelő összekötése szolgáltatja az ötszög első, illetőleg második árnyékhatárát. Az ötszög első árnyékából csak az a rész érvényesül, amely rész az első képsík pozitív felére esik, a második árnyékból szintén csak az a rész érvényesül, amely rész a második képsík pozitív felére esik. Az ötszög síkja feszített s így a síkidom két képében annak különböző oldalát látjuk. Annak megállapítására, hogy az első projekcióban a síkidom megvilágított, avagy önárnyékos oldalát látjuk-e, figyelembe vesszük, hogy az A, B, C, D, E szögpontok a felírt sorrendben a síkidom első képében, a síkidom második képében, a síkidom első árnyékában és második árnyékában egy-egy körüljárási értelmet határoznak meg. Amennyiben a síkidom első képében és első árnyékában a körüljárás értelme egyezik, akkor az első projekcióban a síkidom megvilágított oldalát látjuk, ellenkező esetben az első projekcióban a síkidom önárnyékos oldalát látjuk. Ábránkban az ötszög első képében az önárnyékos oldalt látjuk, második képében megvilágított oldalát mutatja, mert



90. ábra.

síkja feszített. Ugyanazt az eredményt nyerjük, ha az ötszög második képében és második árnyékában a körüljárási értelmet állapítjuk meg.

Hogy egy síkidom valamelyik képében megvilágított, avagy önárnyékos oldalát mutatja-e, azt a síkidom vetett árnyékától függetlenül is megállapíthatjuk. E végett felvesszük a síkidom egy tetszőleges pontját, rajzunkban a P pontot, és tegyük fel, hogy a vizsgálat a síkidom *első képére* vonatkozik. Mindenekelőtt megzajzoljuk a P pontra illeszkedő fénysugarat és megszerkesztjük e fénysugár *első* födőegyenesét az ötszög síkjában, legyen a fénysugár l és födőegyenese $l^{\times}$. Most felveszünk az l egyenesen egy, mondjuk O pontot úgy, hogy az O pont az ötszög P pontját megelőzze a fénysugár haladási értelme szerint. Az O pont első födőpontja az ötszög síkjában mindenesetre az $l^{\times}$ egyenesre illeszkedő pont, legyen ez $O^{\times}$. Ha az első képsíkra nézve $O^{\times}$ takarja az O pontot, akkor az első projekcióban a síkidom önárnyékos oldalát látjuk, mert a síkidom síkja a fénysugárnak az O pont környezetében lévő részét eltakarja; ha pedig az O pont takarja az $O^{\times}$ pontot, akkor az első képben a síkidom megvilágított oldalát látjuk. –

Említettük, hogy a síkidom első árnyékának árnyékhatára a síkidom fényhasábjának első nyompoligonja. A síkidom és első árnyékának árnyékhatára ugyanazon fényhasáb két síkmetszete, tehát e síkmetszetek első képei között affin vonatkozás van. Az affinitás tengelye a síkidom síkjának első nyomvonala, mert e nyomvonal minden pontjának első árnyéka önmaga. Az affinitás iránya a fénysugár első képe. Ugyanúgy a síkidom második képe és a második képsíkra vetett árnyékának árnyékhatára affin vonatkozásban van, az affinitás tengelye a síkidom síkjának második nyomvonala, az affinitás iránya a fénysugár második képe.

Síkidom első és második árnyéka között szintén affin vonatkozás áll fenn. Az affinitás tengelye az x_{12} tengely, mert egy oldal első és második árnyéka mindig az x_{12} tengely egy pontjában metszi egymást. Az affinitás iránya a síkidom egy csúcspontjának két árnyékára illeszkedő egyenes, ez az egyenes oly fénysík egyesített két nyomvonala, mely fénysík a második felezősíkra merőleges.

91. §. Síklapú test árnyéka. *Síklapú test árnyékán értjük a határoló sokszögek, élek és csúcspontok árnyékainak összességét.* Síklapú test árnyékának tárgyalásánál tegyük fel, hogy az konvex polieder. Konvex poliedernél csak megvilágított és önárnyékban lévő határlapok szerepelnek, önmagára vetett árnyék nincs. Polieder árnyékszerkesztésénél első dolgunk annak megállapítása, hogy a polieder mely lapjai vannak megvilágítva, mely lapok vannak önárnyékban, e megállapítás természetszerűen minden határlap külső oldalára vonatkozik. Megvilágított lap minden éle megvilágított, önárnyékban lévő lapnak élei általában nincsenek megvilágítva, kivételt alkotnak az önárnyékban lévő lapnak oly élei, melyek megvilágított és önárnyékban lévő lapnak közös élei, ilyen élről azt mondjuk, hogy az a polieder önárnyékhatáréle. Egy él fénysíkja és a végtelenben fekvő sík a tért két részre bontja. Egy élben találkozó két határoló sokszög lehet ugyanabban a térrészben vagy mindegyik más térrészben fekszik. Első esetben az él *önárnyékhatárél.* Konvex poliedernél az önárnyékhatárélek egy összefüggő torzpoligon oldalai, e torzpoligon a síklapú test önárnyékhatára. *A test önárnyékhatára elválasztja a test megvilágított lapjait, éleit és csúcspontjait a test önárnyékban lévő lapjaitól, éleitől és csúcspontjaitól.*

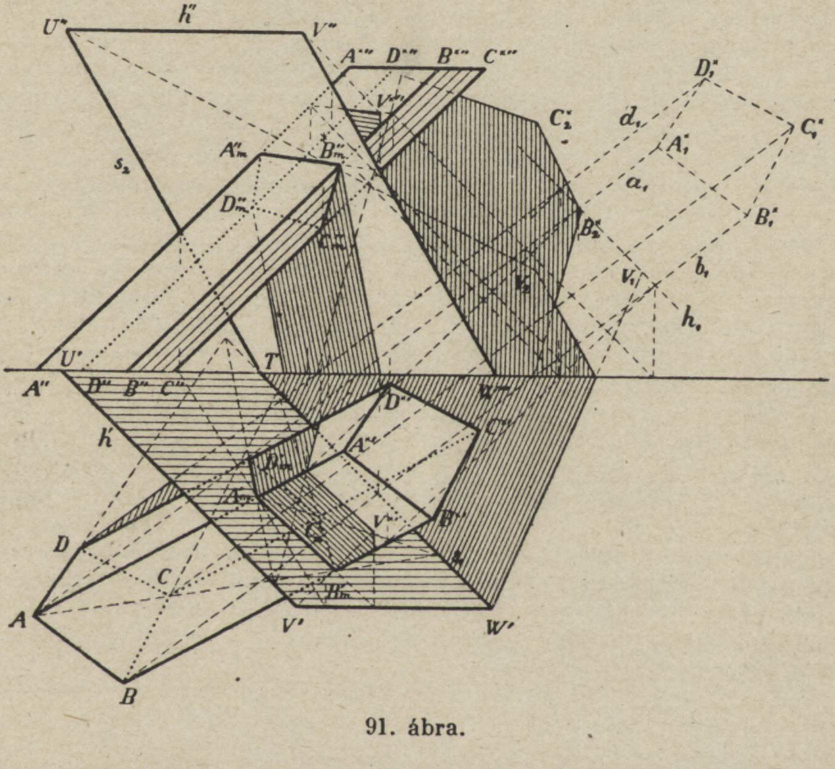
Az önárnyékhatárélekre illeszkedő fénysugarak hasábfelület alkotói, a hasáb a polieder fényhasábja. A fényhasáb nyompoligonja valamely árnyékfelfogó felületen a polieder e felületre vetett árnyékának árnyékhatára. Polieder vetett árnyékának szerkesztése lényegben nem más, mint a vetett árnyék árnyékhatárának megállapítása. Poliedernek az első képsíkra vetett árnyéka a polieder első árnyéka, második képsíkra vetett árnyéka a polieder második árnyéka. Ezen vetett árnyékokból mindenkor csak az érvényesül, ami az első, illetőleg második képsík pozitív felére esik.

Egy polieder összes árnyékainak szerkesztésén értjük a képsíkokra vetett árnyékok árnyékhatárainak megállapítását, továbbá a polieder minden egyes határlapjának külső oldaláról annak eldöntését, hogy a kérdéses oldal megvilágított, avagy önárnyékban lévő oldal.

Polieder összes árnyékainak szerkesztésénél a következő utat követjük: *a)* Megszerkesztjük a polieder minden csúcspontjának első árnyékát, az így nyert pontokat egyenesekkel úgy kötjük össze, hogy a nyert hálózat a polieder élvázának vetett árnyéka legyen. Az élváz első árnyékáról azt is mondhatjuk, hogy az a polieder ferde parallel projekciója. A ferde kép előállításánál használt irány a fénysugár. A polieder ferde vetületének képkörrajza a polieder vetett árnyékának árnyékhatára. *b)* Megállapítjuk a polieder azon éleit, melyeknek vetett árnyéka az árnyékhatár egy-egy oldalát adják, ez élek az önárnyékhatárélek. *c)* Az önárnyékhatárélek alapján megállapítjuk a polieder megvilágított és önárnyékban lévő lapjait, az önárnyékban lévő lapokat, amennyiben azok az első, illetőleg második képben láthatók, sötétebb tónusban tüntetjük fel, mint a megvilágított lapokat. *d)* Végül a polieder azon csúcspontjainak második árnyékát keressük, melyeknek első árnyéka az első képsík negatív felére esik és az első árnyék árnyékhatárának csúcspontjai. E pontok és az első árnyékhatár töréspontjai a második árnyékhatár csúcspontjai.

92. §. Megoldott árnyékszerkesztési feladatok. 1. Adva van egy ferde hasáb, vezérpoligonja az első képsíkban az $ABCD$ négyszög, födőlappoligonjának egy csúcspontja az A^x pont. Továbbá adva van az $S\,(s_1 s_2)$ feszített sík. A feszített sík határolva van az első és második nyomvonallal, továbbá egy első és második fővonallal, e fővonalak közös pontjának második képe az adott V'' pont. Az így nyert parallelogramma csúcspontjai legyenek T, U, V, W pontok. Szerkesztessék meg a hasáb és határolt sík síkmetszete és 45°-os parallel világítás mellett az összes árnyékok. (91. ábra.) Mindenekelőtt megrajzoljuk a hasáb oldaléleit és az $A^x B^x C^x D^x$ fedőlapot. A síkmetszet első képét megszerkesztjük azon affin vonatkozás alapján, mely fennáll a síkmetszet első képe és a vezérpoligon első képe között. Az affinitás tengelye a metszősík első nyomvonala, egy megfelelő pontpár, az A és A'_m, ahol A'_m az AA^x élnek, röviden a élnek a feszített síkkal való metszéspontjának első képe. A metszéspontot az a élnek a feszített síkban lévő második födőegyenesének felhasználásával szerkesztettük meg. A d él metszéspontjának első képét nyerjük, ha AD és s_1 metszéspontját összekötjük az A'_m ponttal, ez az egyenes metszi a d él első képét a D'_m pontban, ugyanúgy nyerjük az AC egyenes affin megfelelőjének felhasználásával a c él első képén a C'_m pontot, végül a BC egyenes affin megfelelőjével nyerjük a b él első képén a B'_m pontot. A síkmetszet második képét felvetítéssel nyerjük. Az árnyékszerkesztés előtt úgy az első projekcióban, mint a második projekcióban feltüntetjük a láthatósági viszonyokat az által, hogy a parallelogramma a hasáb által eltakart oldalait és a hasábnak nem látható éleit, továbbá a parallelogramma által eltakart élrészeit pontozva rajzoljuk.

Az árnyékszerkesztést úgy indítjuk meg, hogy a rajzban szereplő két alakzatnak, a parallelogrammának és a hasábnak, egy és ugyanazon képsíkra vetett árnyékát szerkesztjük meg, az ábrában mindkét alakzatnak az első képsíkra vetett árnyékát állapítottuk meg. A parallelogrammának az első képsíkra vetett árnyékának és a parallelogramma első képének körüljárási értelméből, mivel ezek nem egyező értelműek, kitűnik, hogy a parallelogramma az első projekcióban önárnyékos oldalát mutatja, míg a második képben a megvilágított oldalát láttatja, hiszen síkja feszített sík. A hasábnak az első képsíkra vetett árnyékának határoló oldalai a jelen felvétel mellett azt mondják, hogy az $ABB^xC^xD^xDA$ torzpoligon oldalai a hasábnak önárnyékhatárélei, tehát a hasábnak födőlapja és az a élben találkozó oldallapjai a hasábnak megvilágított lapjai, a többi lap külső oldala önárnyékban van. Ha az összes önárnyékban lévő részeket feltüntetjük, akkor nagyjából már eldöntöttnek mondhatjuk azt, hogy a parallelogramma mely határoló egyenesei fognak a ha-



91. ábra.

sábra vetett árnyék árnyékhatárának megállapításánál, továbbá a hasábnak mely önárnyékhatárélei fognak a parallogrammára vetett árnyék árnyékhatárának megállapításánál résztvenni. Hogy a két alakzat kölcsönösen egymásra vet árnyékot, az abból is kitűnik, hogy a két alakzatnak az első képsíkra vetett árnyéka részben födésben van.

Mindenekelőtt szerkesszük meg a parallelogrammának a hasábra vetett árnyékát. Legyen a parallelogramma UV oldala, röviden a h egyenes, a h egyenes első árnyéka h_1, ez metszi az a megvilágított él, továbbá a d és b önárnyékhatárélek első árnyékait. Minden ilyen metszéspont a h egyenes egy pontjának és a szóban lévő hasábél egy pontjának első képsíkra vetett árnyéka. Vegyük például h_1 és d_1 egyenesek metszéspontját, e pontra illeszkedő fénysugár metszi a h egyenest abban a pontban, mely pont a d élre veti árnyékát, a d

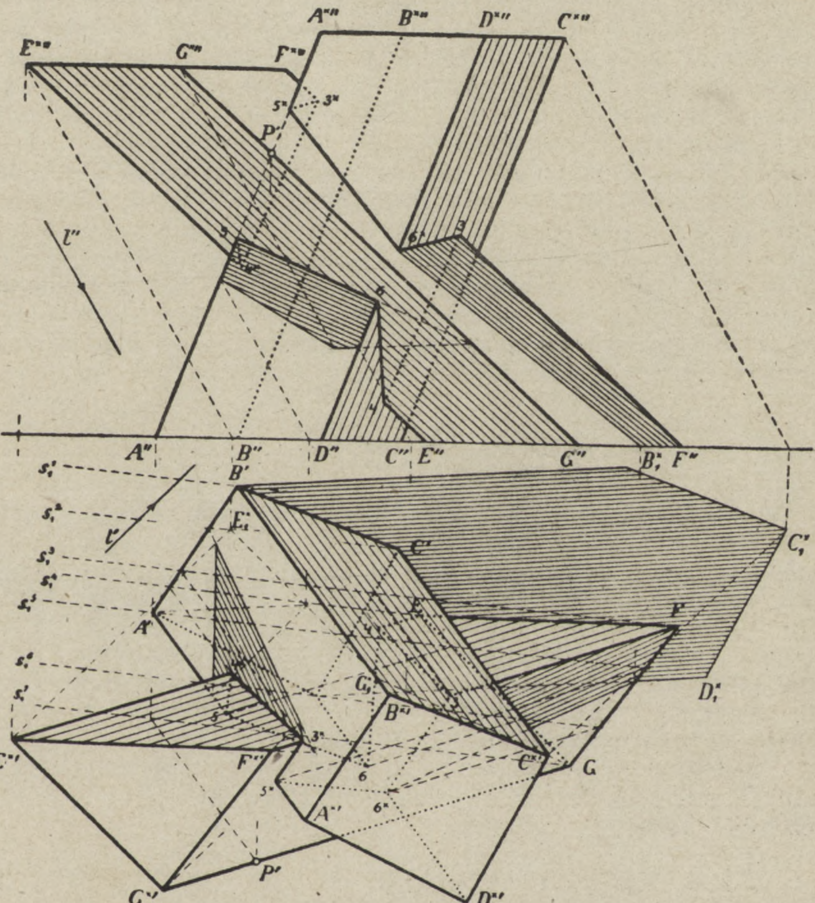
él és fénysugár közös pontja a hasábra vetett árnyékhatár egy pontja. (A metszés az első képsíkon, mivel nagyon hegyes metszésről van szó, további szerkesztésre alkalmatlan, azért megrajzoljuk e fénysugár második képét.) Hasonlóan nyerjük a h egyenesnek az a, majd b élre vetett árnyékát. A V ponton átmenő fénysugár kijelöli a h egyenes hasábra vetett árnyékának végpontját, ez $V^{\times}$. Ettől kezdve a VW egyenes vet árnyékot a hasábra, ennek az egyenesnek a b élre vetett árnyékát nyerjük, ha WV_1 és b_1 egyenesek közös pontjára fénysugarat illesztünk, e fénysugár első képe metszi a b' él első képét, itt végződik a parallelogrammának a hasábra vetett árnyéka az első projekcióban. De mivel minden egyenesnek egy síkra vetett árnyéka az egyenes és sík közös pontjára illeszkedik, a VW egyenesnek a hasáb ab lapjára vetett árnyékának egy pontja a VW egyenesnek és az ab lapnak metszéspontja, e pont pedig az A_mB_m és VW egyenesek illeszkedési pontja, ilyen módon ellenőrzés is áll rendelkezésünkre. Megjegyzendő, hogy a vetett árnyékból leolvashatjuk a V pontnak az ab lapra való árnyékvetését, így a V pontnak az ab lapra vetett árnyékát úgy is nyerhetjük, hogy a V pontra illeszkedő fénysugárnak az ab lappal való metszéspontját megszerkesztjük.

A hasábnak a parallelogramma síkjára vetett árnyéka csak a második képsíkon látható. A vetett árnyék árnyékhatárait a hasáb önárnyékhatáréleinek vetett árnyéka szolgáltatja, tehát a parallelogramma síkjára vetett árnyék megszerkesztettnek mondható, ha a b és d élnek a feszített síkra vetett árnyékát megállapítottuk. Kövessük a d élnek első képsíkra vetett árnyékát a D ponttól kezdődőleg, ez az árnyék a sík első nyomvonalán megtörik, a töréspont a d él síkra vetett árnyékának egy pontja, másik pontja a d él és sík metszéspontja, D_m. Ugyanúgy szerkesztjük meg a b élnek a síkra vetett árnyékát. Megemlítendő, hogy a d és b élnek a síkra vetett árnyékai parallel egyenesek, mert a hasáb oldalélei a térben parallel egyenesek.

Végül az összes egymásra vetett árnyékok után megszerkesztjük a két alakzatnak a második képsíkra vetett árnyékát. Ha azután a képiesség fokozására a vetett árnyékban lévő síkrészeket sötétebb tónussal látjuk el, mint az önárnyékban lévő részeket, akkor az árnyékszerkesztést befejeztük.

2. Adva van két ferde hasáb. Mindkét hasáb vezérpoligonja az első képsíkban van, az egyik $ABCD$, a másik EFG. Legyen a négyoldalú hasáb a élének végpontja $A^{\times}$, a háromoldalú hasáb e élének végpontja $E^{\times}$. (92. ábra.) Szerkesztessék meg a két hasáb áthatása és parallel világítás mellett az összes árnyék. Két hasáb áthatásának szerkesztéséhez az adott utasításnak megfelelően felveszünk a hasáb oldaléleivel parallel síkot, ezt nyerjük, ha a $P(P'P'')$ pontra illeszkedő és az oldalélekkel parallel egyeneseket vezetünk, ez egyenesek első nyompontjainak összekötő egyenese egy segédsíknak nyomvonala a vezérpoligonok közös síkján, az első képsíkon. Bármely, a segédsíkkal parallel sík, mindkét hasábból alkotókat metsz ki. Amennyiben az áthatási poligon csúcspontjait akarjuk nyerni, a segédsíkokat rendre az oldalélekre illeszkedően választjuk, de akkor egy-egy segédsík első nyomvonala illeszkedik a vezérpoligonok egy-egy csúcspontjára. Ábránkban a segédsíkok száma hét, az első nyomvonalak rendre $s_1^1, s_1^2, \ldots, s_1^7$. Mivel az első és második segédsík a

háromoldalú hasábot nem metszi, a b és c él az áthatásban nem vesz részt, ugyanúgy nem vesz részt az áthatásban a g él. A harmadik, negyedik, ötödik és hatodik segédsík révén nyerjük az áthatási poligon 3, 3^{x},... 6, 6^{x} csúcspontjait. Miután megrajzoltuk az áthatás oldalait és mindkét projekcióban feltüntettük a láthatósági viszonyokat, megszerkesztjük a két hasáb első képsíkra vetett árnyékát, majd kijelöljük a hasábok önárnyékban lévő lapjait. Az egy-



.92. ábra.

másra vetett árnyék megállapításánál megkeressük először a négyoldalú hasábnak a háromoldalú hasábra vetett árnyékát, a négyoldalú hasáb önárnyékhatártélei közül csak a d élnek vetett árnyéka okoz a háromoldalú hasábon árnyékhatárt. A d élnek a háromoldalú hasáb fg lapjára vetett árnyéka kiindul a 6^{x} pontból, mert ez a d élnek metszéspontja a kérdéses lappal és tart a d élhez tartozó fénysík és fg lap első nyomvonalainak közös pontjáig. Az első képsíkra vetett árnyékból kivehető, hogy a háromoldalú hasáb mely önárnyékhatárélei játszanak szerepet a négyoldalú hasábra vetett árnyék szerkesztésénél. Ezek: az f élnek F^x3^x darabja, az F^xE^x, az E^xG^x és végül a g él egy része. Az F^xE^x az ab lapra vetett árnyékát mint két sík metszésvonalát szerkesztettük meg, az egyik sík az F^xE^x él fénysíkja, a másik az ab lap, e síkok metszésvonalának egy pontja a síkok első nyomvonalainak közös pontja, egy másik pontja az F^xE^x egyenesnek az ab lappal való metszéspontja, ez a pont az F^xE^x és 3^x4^x egyenesek közös pontja. A két pont által meghatározott egyenesen az F^x, illetőleg E^x pontra illeszkedő fénysugár kimetszi az F^x, illetőleg E^x_a vetett árnyékát az ab lapon. Az E^xG^x élnek vetett árnyéka a négyoldalú hasábon az a él egy pontjában megtörik, a töréspontot nyerjük, ha a két él első képsíkra vetett árnyékának közös pontjára fénysugarat illesztünk, a fénysugár és a él közös pontja a keresett pont. Azután megszerkesztjük g élnek az ad lapra vetett árnyékát, a vetett árnyék egy pontja a g él és ad lap közös pontja, ez az a pont, melyben az 5 6 áthatási oldal a g egyenest metszi, a vetett árnyék egy másik pontja a g élnek d élre vetett árnyéka, ezt a pontot a két élnek az első képsíkra vetett árnyékából állapítjuk meg. A g élnek a hasábra vetett árnyékát megrajzolva, azon a G^x pontra illeszkedő fénysugár adja a G^x pontnak vetett árnyékát az ad lapon. Ha ezt a pontot összekötjük a vetett árnyéknak az a élen előbb megszerkesztett töréspontjával, akkor az összes egymásra vetett árnyékokat megszerkesztettük.

Metrikus feladatok.

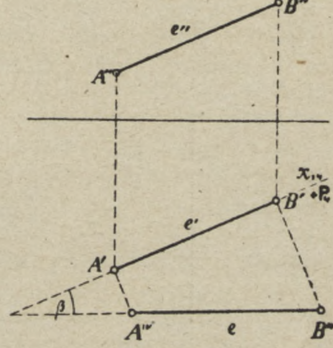
Az ábrázoló geometria metrikus feladatainak két csoportját különböztetjük meg. Az első csoportba tartoznak ama feladatok, melyekben a két adott térelem távolságát, illetőleg szögét szerkesztjük meg. A másik csoportba ama feladatok tartoznak, melyekben egy-egy oly térelemet kell megszerkeszteni, mely térelem adott térelemektől adott távolságban vagy adott távolságokban van, illetőleg adott térelemekkel adott szöget vagy adott szögeket alkot. A második csoportba tartozó feladatokból a legegyszerűbbeket az első csoportba tartozó feladatokkal együtt fogjuk megoldani.

Két térelem távolságát, ha azok egyáltalában viszonylagos helyzetüket jellemző távolságot meghatároznak, két pont távolságára vezetjük vissza.

93. §. Két pont távolsága. Legyen adva két pont, $A(A'A'')$ és $B(B'B'')$. A két pont a térben az $\overline{AB}$ távolságot határozza meg. A távolság első képe az $\overline{A'B'}$ és második képe az $\overline{A''B''}$ távolság. Az A, B, A', B' pontok egy trapéz csúcspontjai. E trapéz oldalai: *a)* $\overline{A'B'}$, a távolság első képe, *b)* $\overline{B'B}$, a B pont első távolsága, *c)* $\overline{BA}$, a keresett távolság, *d)* $\overline{AA'}$, az A pont első távolsága. E trapézben az $\overline{AA'}$ és $\overline{BB'}$ oldalak parallel oldalak és merőlegesek a trapéz $\overline{A'B'}$ oldalára. E trapéz felsorolt tulajdonságainál fogva megszerkeszthető. Az első képsíkban végzendő szerkesztést úgy rendezzük be, hogy a már ott látható trapézoldal, $\overline{A'B'}$, mellé megszerkeszthetjük a trapézt, a trapéznek $\overline{A'B'}$ oldallal szemközt fekvő oldala a távolság valódi nagysága. A szerkesztés ilyen berendezése úgy is értelmezhető, hogy a távolság negyedik képét szerkesztettük egy a távolság egyenesére illeszkedő és az első képsíkra merőleges új képsíkon. (93. ábra.)

A negyedik képsík tartalmazza az AB egyenest és tartalmazza az egyenes első képét, az $A'B'$ egyenest. Mivel egyenes és sík szöge ama szög, melyet az egyenes és az egyenes orthogonális projekciója bezár, az egyenes negyedik képének az $x_{1,4}$ tengellyel bezárt szöge az egyenes és első képsík hajlásszöge, röviden az egyenes első képsíkszöge, β_1. Ha az eredeti távolságot e-vel, első képének képhosszát e'-vel jelöljük, akkor az ábrából az eredeti távolság és annak képhossza közti relációt leolvashatjuk, e szerint

$$e' = e \cos \beta_1.$$



93. ábra.

Szóval a távolság orthogonális projekciójának képhossza függ azon szögtől, melyet a távolság egyenese a képsíkkal alkot, a képhossz annál nagyobb, minél kisebb a képsíkszög és annál kisebb, minél nagyobb a képsíkszög. Ha a távolság egyenese a képsíkkal parallel, akkor a távolság képhossza egyenlő az eredeti távolsággal; ha a távolság egyenese a képsíkra merőleges, akkor a távolság képhossza zérus. Tehát az első képsíkkal parallel egyenesen fekvő távolság első képe valódi nagyságban mutatkozik, ha ilyen távolság valódi nagyságát a nyert relációtól függetlenül kívánjuk megszerkeszteni, akkor az általános esetben szereplő trapéz oblongumba megy át, távolság és ennek képhossza a megszerkesztett oblongum szemközt fekvő oldalai, tehát egyenlők. Ezek alapján mondhatjuk, hogy általános helyzetű egyenesen lévő távolság valódi nagyságát nyerjük oly új képsíkon, mely képsík a távolság egyenesével parallel.

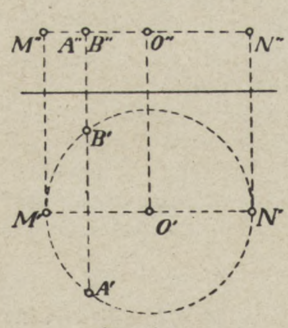
Mivel orthogonális parallel projekcióban képsíkkal parallel egyenesen fekvő távolság képhossza azon képsíkon, mellyel a távolság egyenese parallel, az eredeti távolsággal egyenlő, ebből következik, hogy háromszög, illetőleg síkidom képe a síkidom síkjával parallel képsíkon az eredeti háromszöggel, illetőleg síkidommal egybevágó, de akkor az eredeti síkidom bármely szöge e szög képével egyenlő. Tehát *illeszkedő két egyenes szöge mindig egyenlő az egyenesek képei által bezárt szöggel, ha az egyenesek az egyenesek összekötő síkjával parallel síkra merőlegesen vetítjük.*

94. §. Alakzat helyzetváltoztatása. Minden transzformációnál az eredeti alakzat viszonylagos helyzete az eredeti képsíkkal szemben nem változik. Új képsíkot feladatainkban csak azért vezettünk be, hogy az alakzat egy-egy eleme az új képsíkkal szemben speciális helyzetben legyen. Ha ezt a különleges helyzetet az eredeti képsíkokkal szemben kívánjuk elérni, az alakzatot helyzetváltoztatásnak kell alávetni, vagyis az eredeti alakzatot eredeti helyzetéből kimozdítjuk. A mozgás minden pillanatában a viszonylagos helyzet a két képsíkkal szemben más és más. Nyilvánvaló, hogy alakzatot sokféleképen mozgathatunk úgy, hogy az alakzat egy egyenese, illetőleg egy síkja az alakzat mozgásának egy pillanatában valamelyik képsíkkal szemben különleges helyzetben legyen.

Céljainknak megfelelő és konstruktív úton legkönnyebben követhető az alakzatnak ama mozgása, amikor azt a tér egy tetszőleges egyenese körül, *egy tengely körül forgatjuk.* A tengelykörüli rotációnál az alakzat minden pontja kört ír le. A kör helyzete a térben meg van határozva, ha ismerjük síkját, középpontját és sugarát. Pontot tengely körül forgatva, a pont által leírt kör síkja a pontra illeszkedő és tengelyre merőleges sík; középpontja, e sík és tengely közös pontja; sugara, a pont és középpont távolsága. A forgás tengelyére illeszkedő pontok a rotációnál helyben maradó pontok.

Mivel a rotációnál minden pont kört ír le, e mozgás konstruktív úton csak akkor követhető, ha egy-egy pont útját, egy-egy kört ábrázolni tudunk. Általános helyzetű síkban fekvő kör ábrázolásával csak később fogunk foglalkozni s így egyelőre a forgatás tengelyét a két képsíkkal szemben speciális helyzetben vesszük fel. Kezdetben feltesszük, hogy a forgatás tengelye valamelyik képsíkra merőleges. Az első képsíkra merőleges tengelyt, t_1, röviden *első tengelynek,* a második képsíkra merőleges tengelyt, t_2, röviden *második tengelynek* mondjuk. Egy első, illetőleg második tengely körül forgatott alakzat minden pontja oly körpályán mozog, melynek síkja az első, illetőleg második képsíkkal parallel, tehát legközelebbi feladatunk oly kör képének szerkesztése, melynek síkja valamelyik képsíkkal parallel.

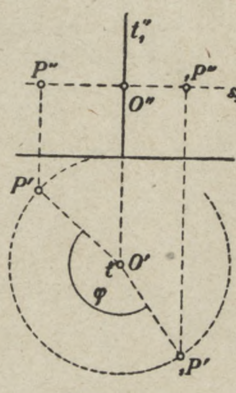
95. §. Első képsíkkal parallel síkban fekvő kör ábrázolása. Kör képén értjük a körvonalra illeszkedő pontok képeinek összességét. Legyen a kör síkja az első képsíkkal parallel, középpontja O és sugara r. A kör egy tetszőleges A pontjához tartozik az $\overline{OA}$ sugár, e sugár az első képsíkkal parallel, tehát az A pont első képének távolsága a középpont első képétől az $\overline{OA}$ távolsággal egyenlő. Vagyis a körpontok első képei a középpont első képétől mind r távolságban vannak; szóval a kör első képe kör, melynek középpontja a kör középpontjának első képe és sugara az adott kör sugarával egyenlő. (94. ábra.) A kör második képe, mivel síkja második vetítősík, e sík második nyomvonalának egy része. A kör második projekciója, az egyenes, illeszkedik a középpont második képére és parallel az x_{12} tengellyel. Körvonalra illeszkedő pont képe a kör képére illeszkedő pont. A körvonal első képén felvett tetszőleges pont második képét ott nyerjük, ahol az első képre illeszkedő rendező a kör második képét, az egyenest, metszi. A kör összes pontjainak második képeit megszerkesztve, azt tapasztaljuk, hogy azok egy vonaldarab pontjai, a vonaldarab végpontjai a középpont második képétől r távolságban vannak. A vonaldarab minden belső pontja a körvonal két pontjának második képe; a végpontok a körvonal azon pontjai-



94. ábra.

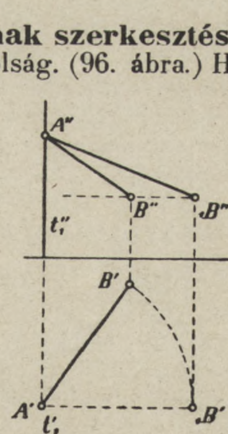
nak második képei, mely pontokhoz tartozó körsugarak a második képsíkkal parallelek.

96. §. Pont elforgatása első tengely körül. Legyen adva a P pont és egy az első képsíkra merőleges egyenes, t_1. (95. ábra.) Forgassuk el a P pontot φ szöggel a t_1 tengely körül és határozzuk meg az elforgatott pont első és második képét. A P pont által leírt kör síkjának második nyomvonala, mivel e sík a P pontra illeszkedő, első képsíkkal parallel sík, P''-re illeszkedő és x_{12} tengellyel parallel egyenes, s_2, erre az egyenesre illeszkedik az elforgatott P pont második képe. A t_1'' és s_2 közös pontja a kör középpontjának második képe, O''. A kör középpontjának első képe, O', a t_1' ponttal azonos pont. A kör sugarának valódi nagysága a P és O pontokkal határolt távolság, ahol $\overline{PO} = \overline{P'O'}$. Az első képsíkban, az O' pont körül, mint középpont körül, $O'P'$ távolsággal egyenlő körsugárral rajzolt kör a P pont által leírt kör első képe. A körvonal első képére illeszkedő egy-egy pont a forgatott P pont egy-egy helyzetének első képe. A forgatás mértéke az első képsíkon valódi nagyságban látszik, a φ szög azon körsugarakkal bezárt szög, melyet a P' pont felé menő körsugár és az elforgatott pont első képe felé menő körsugár alkotnak, mert a φ szög szárai az első képsíkkal parallel egyenesek. Az első tengely körül forgatott P pont egy helyzetének, röviden az elforgatott pontnak első képét ${}_1P'$ jellel, második képét ${}_1P''$ jellel jelöljük, ahol ${}_1P''$ az s_2 egyenes ama pontja, melyben a ${}_1P'$ ponton átmenő és az x_{12} tengelyre merőleges egyenes metszi.



95. ábra.

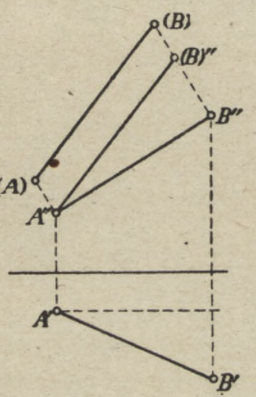
97. §. Adott távolság valódi nagyságának szerkesztése forgatással. Adva van az AB ($A'B'$, $A''B''$) távolság. (96. ábra.) Ha egy adott távolságot valamely tengely körül forgatunk, akkor a forgatott távolság a mozgás minden pillanatában az eredeti távolsággal egyenlő. Mivel egyelőre csak két pont távolságát akarjuk megszerkeszteni, a forgási tengelyt a távolság egyik végpontjára illeszkedően, valamely képsíkra merőlegesen választhatjuk. Vegyük az első tengelyt úgy fel, hogy az az adott távolság A pontjára illeszkedjék, akkor a távolság forgatásánál e pont helyben maradó pont, míg a B pont helyzetét állandóan változtatja. A B pontot addig kell az első tengely körül forgatni, míg az AB távolság a második képsíkkal parallel helyzetbe jut, e helyzetben a távolság második képe az eredeti távolsággal egyenlő. Mint mondottuk, a forgatásnál az A pont helyzetét nem változtatja, tehát a második képsíkkal parallel helyzetbe forgatott egyenes első képe az A pont első képére, A' pontra, illeszkedő és az x_{12} tengellyel



96. ábra.

parallel egyenes. A távolság B végpontja által leírt kör első képe kijelöli az elforgatott egyenes első képén az elforgatott B pont első képét, a ${}_1B'$ pontot. (Ilyen pont kettő van, a szerkesztésnél bármelyiket használhatjuk.) E ponton átmenő az x_{12} tengelyre merőleges egyenes kimetszi a B pont által leírt kör második képén az elforgatott B pont második képét, a ${}_1B''$ pontot. Az elforgatott távolság második képe a távolság valódi nagysága.

Amikor pontot tengely körül forgatunk, ugyanakkor forgatjuk a tengely körül azt a síkot, melyet a pont a forgási tengellyel meghatároz. Síkot a síkra illeszkedő tengely körül már akkor forgattunk, mikor az első és második képsíkot a szokott módon egyesítettük. Ilyen síkforgatást konstruktív úton követtünk akkor is, mikor egy az első képsíkra merőleges új képsíkot az első képsíkba forgattunk.



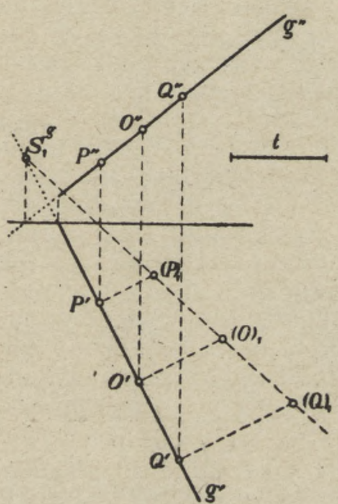
97. ábra.

Vegyünk fel megint két képével adott távolságot, AB ($A'B'$, $A''B''$) és szerkesszük meg az $ABB''A''$ trapézt a második képsíkban az $A''B''$ oldal mellett. (97. ábra.) E szerkesztés sztereometriailag úgy is magyarázható, hogy az AB egyenest második vetítősíkjának második nyomvonala körül a második képsíkba forgattuk. Mindannyiszor, ahányszor síkra illeszkedő pontot a síkra illeszkedő egyenes körül képsíkba vagy azzal parallel síkba forgatunk, a pontot új helyzetében ugyanazon betűvel jelöljük, de zárójelbe tesszük, a leforgatott egyenes tehát $(A)\,(B)$.

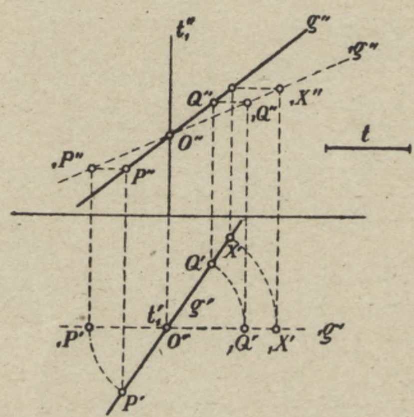
Ha ugyanazon ábrán az A'' ponton át a második képsíkban az AB egyenes leforgatottjával parallel egyenest rajzolunk, akkor ezen az egyenesen a trapéz parallel oldalai a keresett távolsággal egyenlő távolságot állapítanak meg. Az így nyert valódi távolság egy derékszögű háromszög átfogója, melynek egyik befogója a távolság második képe, másik befogója a távolság végpontjaihoz tartozó első rendezők különbsége. E planimetriai szerkesztés sztereometriailag is értelmezhető, nevezetesen az $A''\,(B)''$ egyenes az eredeti AB egyenes elforgatottja egy a második képsíkkal parallel helyzetű síkba, mely sík az AB távolság A pontjára illeszkedik; a forgatás tengelye az előbb említett sík ama egyenese, melyben e síkot az AB egyenes második vetítősíkja metszi.

98. §. Adott távolság ráméráse adott egyenesre. Adva van a $g\,(g', g'')$ egyenes, az egyenesre illeszkedő O pont és a t távolság. (98. ábra.) Szerkesszük meg az egyenes ama P és Q pontját, mely pontok az O ponttól az adott t távolságban vannak. A feladatot annyiféleképpen oldhatjuk meg, ahányféleképpen távolság valódi nagyságát tanultuk szerkeszteni. *a)* Forgassuk a g egyenest például első vetítősíkjának első nyomvonala körül, mint tengely körül, az első képsíkba. E célból beforgatjuk az egyenes O és egy tetszőleges másik pontját, amennyiben az egyenes első nyompontja hozzáférhető, második pontnak a forgatásánál ezt a helyben maradó pontot fogjuk választani. Az első képsíkba forgatott egyenesre a beforgatott O ponttól, az (O) ponttól számítva rámérjük jobbra és balra az adott távolságot, ezt közvetlenül tehetjük meg, mert az első képsíkban minden távolság valódi nagyságban látszik. A nyert (P) és (Q) pontokon át a g egyenes első képére merőlegesen rajzolt egyenesek kimetszik a g egyenes első képén a keresett pontok első képeit, ezekből nyerjük a rendezők megrajzolásával a pontok második képeit.

b) Forgassuk (99. ábra) a g egyenest egy az O pontra illeszkedő első tengely körül addig, míg a második képsíkkal parallel helyzetbe jut. Hogy ezt a forgatást elvégezhessük, felveszünk az egyenesen



98. ábra.

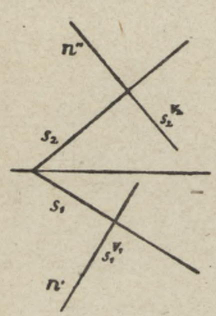


99. ábra.

egy tetszőleges X pontot és ezt elforgatjuk a tengelyre illeszkedő második képsíkkal parallel síkba. Az elforgatott egyenes második képén minden távolság valódi nagyságban mutatkozik, tehát a keresett pontok közvetlenül megállapíthatók a második képben, az elforgatott egyenes első képén nyerjük a keresett pontok első képeit levetítéssel, az így képekkel meghatározott pontokat ugyanazon szöggel visszaforgatjuk, mint amilyen szöggel az eredeti egyenest elforgattuk.

99. §. Távolság felezési pontja. Az előbbi feladatban az O pont a PQ távolság felezési pontja. Ha a g egyenesen a P és Q pontok adott pontok, a felezési pont szerkesztéséhez nem szükséges a PQ távolságot a képsíkba forgatni, vagy tengely körül az egyik képsíkkal parallel helyzetbe forgatni, a felezést közvetlenül a projekcióban elvégezhetjük. A távolság első képének felezési pontja a távolság felezési pontjának első képe, a távolság második képének felezési pontja a távolság felezési pontjának második képe. Általában, ha egy távolságot n egyenlő részre kell osztani, az n részre való osztást közvetlenül az egyenes projekciójában végezhetjük.

100. §. Egyenes és sík merőleges helyzetben. Egyenesre merőleges síkot egy speciális esetben már szerkesztettünk, és pedig akkor, mikor egy, a két képsíkkal szemben speciális helyzetű egyenesre merőleges új képsíkot vezettünk be. E szerint az első képsíkra illeszkedő vagy az első képsíkkal parallel egyenesre merőleges sík első vetítősík, melynek első nyomvonala az egyenes első képére merőleges. E megjegyzés alapján tudunk nyomvonalaival adott síkra merőleges egyenest szerkeszteni. Legyen adva egy általános helyzetű sík, első nyomvonala s_1, második nyomvonala s_2 (100. ábra). Vegyünk fel a sík első nyomvonalára merőleges V_1 vetítő síkot, e sík első nyomvonala az adott sík első nyomvonalára merőleges, második nyomvonala a tengelyre merőleges. Az adott sík első nyomvonalára merőleges sík minden egyenese az s_1 egyenessel derékszöget alkot. Hasonlóan vegyünk fel az adott sík második nyomvonalára merőleges V_2 síkot. A V_2 sík minden egyenese az s_2 egyenessel derékszöget alkot A V_1 és V_2 síkok közös egyenese, n, derékszöget alkot az adott sík első és derékszöget alkot az adott sík második nyomvonalával. Az n egyenes tehát az adott sík két különböző irányú egyenesével derékszöget alkot, de akkor az n egyenes az adott sík minden egyenesével derékszöget alkot, szóval az adott síkra merőleges. Az n egyenes első képe a V_1 sík első nyomvonala, mert V_1 az n egyenes első vetítősíkja; hasonlóan az n egyenes második képe a V_2 sík második nyomvonala, mert V_2 az n egyenes második vetítősíkja. Ilyen módon szerkesztettünk az adott síkra *egy* merőleges egyenest, ennek az egyenesnek első képe merőleges a sík első, és második képe merőleges a sík második nyomvonalára. Mivel pedig egy síkra merőleges egyenesek a térben parallel egyenesek és parallel egyenesek egynevű képei parallelek, mondhatjuk, hogy *általános helyzetű síkra merőleges minden egyenes, első képe merőleges a sík első nyomvonalára, második képe merőleges a sík második nyomvonalára.*

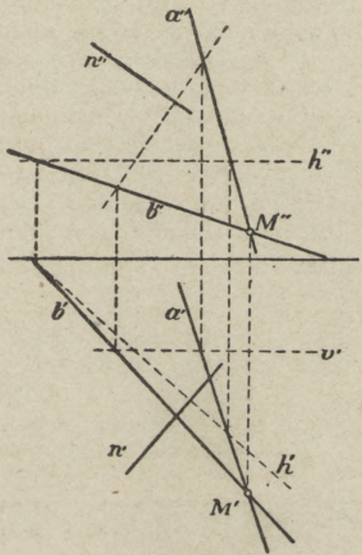


100. ábra.

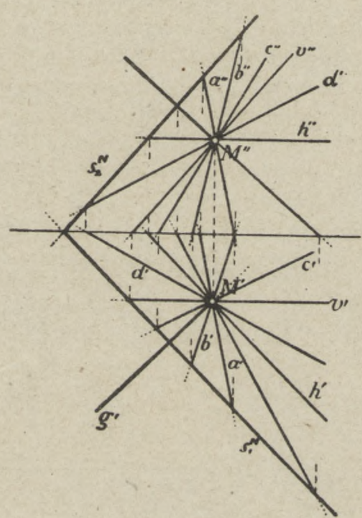
Síkra merőleges egyenes szerkesztéséből nyerjük egyenesre merőleges sík szerkesztését. Általános helyzetű egyenesre merőleges sík első nyomvonala az egyenes első képére, második nyomvonala az egyenes második képére merőleges. Egyenes és sík most megállapított merőlegességi kritériuma általánosítható, e szerint *síkra merőleges egyenes bármely képsíkon lévő orthogonális projekciója merőleges a sík ugyanazon képsíkon lévő nyomvonalára.*

Orthogonális parallel projekcióban két képsíkon egyenes és sík merőleges helyzetének megállapított kritériuma a merőlegesség szükséges kelléke, de nem mindig elégséges. Nem elégséges akkor, ha a sík első és második nyomvonala nem két különböző irányú egyenes. Ilyen síkok a tengellyel parallel síkok. Tengellyel parallel síkra merőleges egyenes első és második képe a tengelyre merőleges, profil egyenes, profil egyenes első és második képével nincs meghatározva, ekkor a síkra merőleges egyenest egy újabb képével kell kiegészíteni, amihez a síknak az új képsíkon lévő nyomvonalának előzetes szerkesztése szükséges.

101. §. Két metsző egyenes által adott síkra merőleges egyenes szerkesztése. Legyen adva két metsző egyenes *a* és *b* (101. ábra). A metsző egyenesek által adott sík egy első fővonalának első képe a sík első nyomvonalával parallel egyenes, de a sík első nyomvonala a síkra merőleges egyenes első képére merőleges, tehát a síkra merőleges egyenes első képe merőleges a sík első fővonalának első képére. Ugyanúgy megállapíthatjuk, hogy a metsző egyenesek által adott síkra merőleges egyenes második képe merőleges a sík egy második fővonalának második képére.



101. ábra.



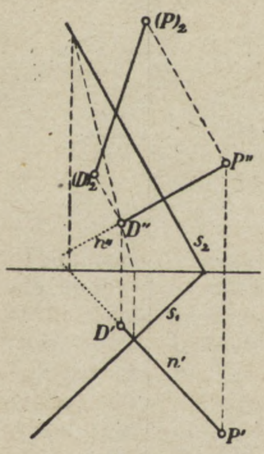
102. ábra.

102. §. Egymásra merőleges egyenesek. Legyen *g* az első képsíkkal parallel egyenes, akkor, amint azt már megállapitottuk, az egyenesre merőleges sík első vetítősík, nyomvonala merőleges az egyenes első képére. E V_1 sík minden egyenese a *g* egyenesre merőleges, minden egyenesének első képe a V_1 sík első nyomvonala, tehát minden egyenesének első képe merőleges az adott egyenes első képére. Másrészt a *g* egyenesre tetszőleges merőleges egyenes parallel egy az egyenesre merőleges síkkal, de akkor ez a *g* egyenesre merőleges tetszőleges egyenes parallel egy a *g* egyenesre merőleges sík egy egyenesével, utóbbi képe a *g* egyenes első képével derékszöget alkot és parallel egyenesek egynevű képei parallelek, tehát a *g* egyenesre tetszőleges merőleges egyenes első képe merőleges a *g* egyenes első képére. Szóval ha valamely derékszög egyik szára egy képsíkkal parallel, akkor a derékszög képe ugyanazon képsíkon derékszög.

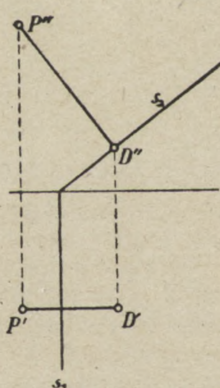
Tegyük egész általánosságban vizsgálat tárgyává, hogy mikor lesz derékszög orthogonális projekciója derékszög. Legyen a derékszög egyik szára *g* mindkét képsíkkal szemben általános helyzetű (102. ábra), és legyen a *g* egyenes egy tetszőleges pontja *M*. Az *M* pontra illeszkedő és g egyenesre merőleges egyenesek egy sugársor sugarai, e sugársor centruma az M pont, síkja az M pontra illeszkedő és g egyenesre merőleges sík, **N**. Tekintetbe véve azt, hogy *a)* a g egyenesre merőleges egyenesek három méretű sokaságából kiválasztott tetszőleges egyenes mindig parallel a fenti sugársor valamelyik egyenesével, *b)* és parallel szárú szögek képei parallel szárú szögek, tehát egyenlők, elégséges ama derékszögek képeinek vizsgálata, melyeket a g egyenes a sugársor sugaraival bezár.

Az M pontra és **N** síkra illeszkedő minden egyenes a g egyenessel derékszöget alkot, ez egyenesek első képei a g egyenes első képével általában nem alkotnak derékszöget, tehát általában derékszög képe nem derékszög. Az **N** síkban az M centrummal bíró sugársornak csak egy oly sugara van, melynek első képe a g egyenes első képével derékszöget alkot, ez az egyenes az **N** sík M pontjára illeszkedő első fővonal első képe. Ámde sík első fővonala az első képsíkkal parallel, tehát az **N** sík első fővonalai és ezekkel parallel egyenesek kizárólag a tér ama g egyenesre merőleges egyenesei, melyek közül bármelyiknek első képe a g egyenes első képével derékszöget alkot. Tehát derékszög orthogonális projekciója csak akkor derékszög, ha a derékszög egyik szára a képsíkkal parallel.

103. §. Pont és sík távolsága. Adva van az **S** (s_1, s_2) sík és a $P(P', P'')$ pont (103. ábra). Az **S** sík minden pontja az adott P ponttal egy-egy távolságot határoz meg. E távolságok között van egy legkisebb, a P pontnak az **S** sík azon pontjától való távolsága, mely pontban a síkot a P pontra illeszkedő, **S** síkra merőleges egyenes metszi, ez a legkisebb távolság a pont és sík távolsága. E szerint adott pont és adott sík távolságának szerkesztését a következő lépésekben végezzük: *a)* megrajzoljuk a P pontra illeszkedő és az adott síkra merőleges n egyenest. Az n egyenes első képe P' pontra illeszkedő és s_1 egyenesre merőleges egyenes, az n egyenes második képe P'' pontra illeszkedő és s_2 egyenesre merőleges egyenes. *b)* Megszerkesztjük az n egyenes és **S** sík metszéspontját. A szerkesztést az n egyenes **S** síkon lévő első födőegyenesének meghatározásával végeztük. A metszéspont D (D', D''). *c)* Végül megállapítjuk a $\overline{PD}$ távolság valódi nagyságát. A rajzban a $\overline{PD}$ távolságot a távolság második vetítősíkjának második nyomvonala körül a második képsíkba forgattuk.



1 03. ábra.

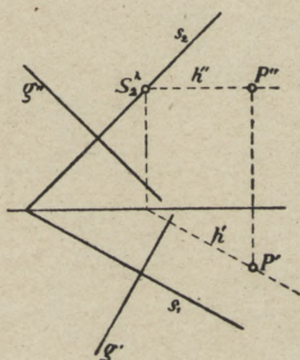


104. ábra.

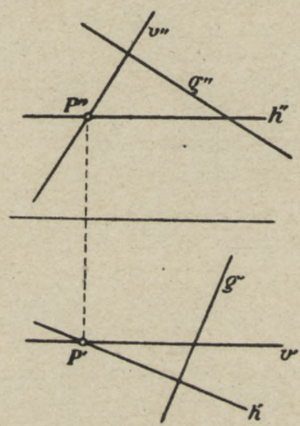
Legyen az **S** sík második képsíkra merőleges sík és szerkeszszük meg az **S** (s_1, s_2) és $P(P', P'')$ pont távolságát. Amennyiben a szerkesztést az előbbi utasítás szerint elvégezzük (104. ábra), azt nyerjük, hogy a távolság egyenese a második képsíkkal parallel. A távolság második képe a pont második képének távolsága a sík második nyomvonalától és e távolság egyúttal a pont és sík valódi távolságával is egyenlő.

Pont és vetítősík távolságának szerkesztése lényegesen egyszerűbb, mint pontnak oly síktól való távolságának szerkesztése, mely sík a két képsíkkal szemben általános helyzetű. Ezt tudva, pont és sík távolságának szerkesztésénél ezt az előnyös helyzetet új képsík bevezetésével adott esetben előállítjuk.

104. §. Pontra illeszkedő, egyenesre merőleges sík szerkesztése. Adva van a $P(P', P'')$ pont és a $g(g', g'')$ egyenes (105. ábra).. Szerkesszünk a P pontra illeszkedő és a g egyenesre merőleges síkot. Megszerkesztjük a keresett sík ama első fővonalát, mely az adott pontra illeszkedik. Az első fővonal első képe illesz-



105. ábra.



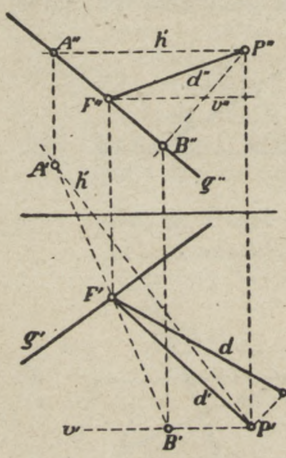
106. ábra.

kedik P' pontra és merőleges az adott egyenes első képére, mert a keresett sík első nyomvonala mindenesetre az adott egyenes első képére merőleges. Az első fővonal második képe a P'' pontra illeszkedik és parallel az x_{12} tengellyel. E fővonal második nyompontja a keresett normálsík második nyomvonalának egy pontja, e nyompontra illeszkedő és g'' egyenesre merőleges egyenes a meghatározandó sík második nyomvonala. A második nyomvonal tengelypontján át, a g' egyenesre merőleges egyenes a keresett sík első nyomvonala. Hasonlóan végezhettük volna a szerkesztést egy, a P pontra illeszkedő második fővonallal.

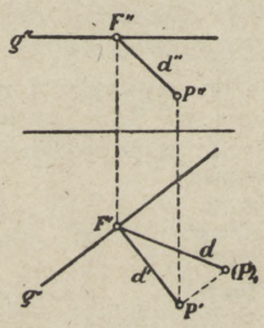
Amennyiben a P pontra illeszkedő és a g egyenesre merőleges sík nyomvonalai a rajz síkjából kieső egyenesek volnának, akkor a normálsíkot két illeszkedő egyenessel határozzuk meg. Az egyik egyenes a keresett síknak P pontra illeszkedő első fővonala, a másik egyenes a keresett síknak P pontra illeszkedő második fővonala (106. ábra).

105. §. Pont és egyenes távolsága. Pont és egyenes távolságát két pont távolságára vezetjük vissza, az egyik pont az adott pont, a másik pont az adott pontból az adott egyenesre merőleges, metsző egyenes talppontja. Ponton átmenő, egyenesre merőleges egyenesek sugársort alkotnak, melynek centruma az adott pont, síkja az adott pontra illeszkedő, az adott egyenesre merőleges sík. E sík és adott egyenes közös pontja az adott ponttal adja a keresett távolságot. Tehát pont és egyenes távolságát (107. ábra) a következő lépésekben végezzük: *a)* Megszerkesztjük az adott pontra illeszkedő, adott egyenesre merőleges síkot. *b)* Meghatározzuk e sík és adott egyenes metszéspontját. *c)* A metszéspont és adott pont által meghatározott távolság a keresett távolság.

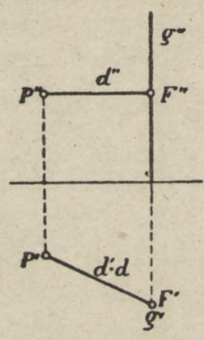
Pont és egyenes távolságát, ha az egyenes valamely képsíkkal parallel, úgy szerkesztjük, mint az általános esetben, de a szerkesztés egyszerűbb (108. ábra). Legyen a $g(g', g'')$ egyenes az első képsíkkal parallel, akkor a $P(P', P'')$ ponton átmenő, adott egyenesre illeszkedő és rája merőleges n egyenes első képét közvetlenül megrajzolhatjuk. T. i. az n' és g egyenes derékszöget alkotnak,



107. ábra.



108. ábra.



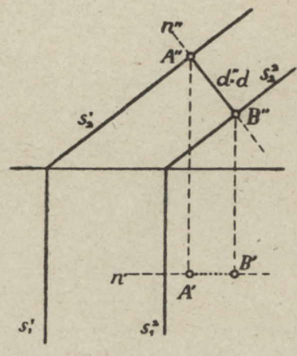
109. ábra.

melynek egyik szára, g, az első képsíkkal parallel, de ekkor derékszög képe derékszög, vagyis n' merőleges g' egyenesre, e két egyenes metszéspontja az adott pontra illeszkedő és adott egyenesre merőleges sík g .egyenesen lévő metszéspontjának első képe, F'. A szerkesztés további menete az ábrából leolvasható.

Pont és egyenes távolságát a legegyszerűbben akkor szerkeszthetjük meg, ha az egyenes valamely képsíkra merőleges. Legyen a $g(g', g'')$ egyenes az első képsíkra merőleges (109. ábra). Ekkor az adott $P(P', P'')$ pontra illeszkedő, az adott egyenest merőlegesen metsző egyenes második képét közvetlenül megrajzolhatjuk az előbbiek szerint, mert az adott egyenes a második képsíkkal parallel. A távolság első képe a P' és g' pontok távolsága. A távolság az első képében valódi nagyságban látszik, mert a távolság egyenese egy az első képsíkkal parallel egyenes, hiszen a második képe az x_{12} tengellyel parallel egyenes.

106. §. Két sík távolsága. Két sík távolságáról csak akkor beszélhetünk, ha a két sík parallel. Parallel síkok távolságán értjük az egyik sík bármely pontjának távolságát a másik síktól. Mivel a távolság független az egyik sík választott pontjától, mondhatjuk, hogy adott siktól adott távolságban fekvő pontok mértani helye két sík. E síkokat úgy szerkesztjük, hogy az adott síkra merőleges egyenesre, ennek talppontjától számítva mindkét értelemben felrakjuk az adott távolságot, az így nyert pontokra illeszkedő, adott síkkal parallel síkok ama pontok mértani helye, melyek az adott síktól adott távolságban vannak.

Parallel síkok távolságát pont és sík távolságára vezettük vissza. Pont és sík távolságát akkor szerkesztettük a legegyszerűbben, amikor a sík valamely képsíkra nézve vetítősík volt. Ebből következik, hogy parallel síkok távolságát akkor nyerjük a legegyszerűbben, ha azok vetítősíkok valamely képsíkra. Legyen pl. a két parallel sík második vetítősík (110. ábra). E két sík távolsága a síkok második nyomvonalainak távolsága.

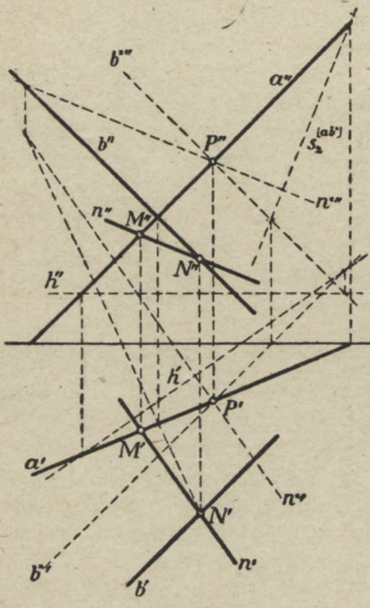


110. ábra.

107. §. Egyenes és sík távolsága. Egyenes és sík távolságáról csak akkor tárgyalhatunk, ha azok parallel helyzetben vannak. Egyenes és vele parallel sík távolságán értjük az egyenes egy tetszőleges pontjának távolságát a síktól. A feladatot tehát visszavezettük pont és sík távolságának szerkesztésére.

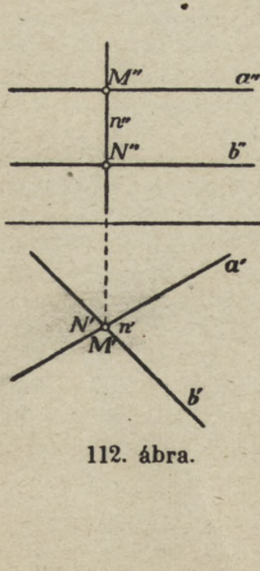
108. §. Két parallel egyenes távolsága. Parallel egyenesek távolságán értjük az egyik egyenes bármely pontjának távolságát a másik egyenestől, szóval parallel egyenesek távolságának szerkesztése lényegben nem más, mint pont és egyenes távolságának szerkesztése.

109. §. Kitérő egyenesek normális transzverzálisa, kitérő egyenesek távolsága. Két kitérő egyenes, *a* és *b*, tetszőleges transzverzálisa a kitérő egyenesek mindegyikét egy-egy pontban metszi, e két pont távolsága transzverzálisról transzverzálisra más és más. Az így megállapított távolságok között van egy legkisebb, a legkisebb távolság azon a transzverzálison van, mely az adott kitérő egyenesek mindegyikére merőleges. Ezt a transzverzálist az adott kitérő egyenesek normális transzverzálisának mondjuk. Mindenekelőtt kimutatjuk, hogy két kitérő egyenesnek van normális transzverzálisa. Az *a* egyenesre merőleges egyenesek az *a* egyenesre tetszőleges merőleges síkkal parallel egyenesek, szóval az *a* egyenesre tetszőleges merőleges egyenes végtelenben fekvő pontja illeszkedik az *a* egyenesre tetszőleges merőleges sík végtelenben fekvő egyenesére. Ezt a részleges eredményt úgy is fogalmazhatjuk, hogy az *a* egyenesre merőleges sík végtelenben fekvő egyenesére illeszkedő egyenes az *a* egyenesre merőleges. Ugyanúgy a *b* egyenesre merőleges sík végtelenben fekvő egyenesére illeszkedő egyenes a *b* egyenesre merőleges. A két végtelenben fekvő egyenes közös pontjára illeszkedő minden egyenes az *a* és *b* egyenesre merőleges. A végtelenben fekvő egyenesek közös pontjára illeszkedő transzverzális a keresett transzverzális. A normális transzverzális exisztenciájának kimutatása után áttérhetünk e transzverzális szerkesztésére. Mindenekelőtt megállapítjuk a transzverzális irányát, az irányt nyerhetjük ama meggondolásokkal, melyekkel a normális transzverzális exisztenciáját kimutattuk, de a szerkesztésnél más utat követünk. Ha meggondoljuk, hogy a normális transzverzálisra, az n egyenesre, merőleges sík az a és b egyenesekkel parallel, az irány szerkesztésére a következő utasítást nyerjük: szerkesztünk az a és b egyenesekkel párhuzamos síkot, ezt a legegyszerűbben úgy nyerjük, hogy az a egyenesre illeszkedő és b egyenessel parallel, $b^{\times}$, egyenest vezetünk, a, $b^{\times}$ egyenesek összekötő síkja a keresett sík, e síkra merőleges $n^{\times}$ egyenes a normális transzverzális iránya (111. ábra). Az $n^{\times}$ irányú transzverzálist úgy szerkesztjük meg, amint azt a 61. pont alatt tárgyaltuk, e szerint vezetünk az a egyenesre illeszkedő és $n^{\times}$ egyenessel parallel egyenest, legyen ez $n^{\times}$, ez egyenes és a egyenes összekötő síkjának metszéspontja a b egyenessel a normális transzverzális egy pontja, N. Az N pontra illeszkedő és $n^{\times}$ egyenessel parallel egyenes a normális transzverzális, ennek a egyenessel való metszéspontja legyen M. Az M és N pontok távolsága a kitérő egyenesek távolsága.

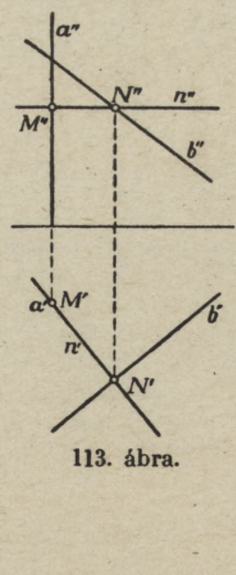


111. ábra.

Két kitérő egyenes normális transzverzálisának szerkesztése egyszerűbb, ha az adott egyenesek a képsíkokkal szemben különleges helyzetűek. *a)* Legyenek az a és b egyenesek az első képsíkkal parallel egyenesek, akkor a kitérő egyenesekkel parallel sík az első képsík; erre merőleges egyenes első vetítősugár, ez a transzverzális iránya; a transzverzális első képe az a' és b' egyenesek közös pontja, második képe az utóbbi pontra illeszkedő első vetítősugár második képe (112. ábra). A transzverzálison a kitérő egyenesek által kijelölt pontok távolsága, a kitérő egyenesek távolsága, a második projekcióban valódi nagyságban látszik, mert a transzverzális a második képsíkkal parallel. *b)* Legyen a kitérő egyenesek közül az egyik, a, az



112. ábra.



113. ábra.

első képsíkra merőleges, b általános helyzetű (113. ábra). A normális transzverzális, n, mindkét egyenesre illeszkedő és mindkettőre merőleges. Az a egyenesre illeszkedő egyenes első képe az a' pontra illeszkedő egyenes. Az a egyenes az n egyenesre merőleges, tehát a mi esetünkben n egy, az első képsíkkal parallel egyenes. Az n egyenes a b egyenessel derékszöget alkot, melynek egyik szára az első képsíkkal parallel, tehát képe az első képsíkon derékszög. E szerint az n egyenes első képe a b egyenes első képével derékszöget alkot, vagyis az n' egyenes illeszkedik az a' pontra és merőleges a b' egyenesre. n' és b' közös pontja, N', a transzverzális és b egyenes közös pontjának első képe, e pont második képe a b'' egyenesre illeszkedő pont, N'', az n egyenes második képe e pontra illeszkedő és x_{12} tengellyel parallel egyenes, mert n egyenes az első képsíkkal parallel egyenes, és végül ugyanazon oknál fogva a két kitérő egyenes távolsága az első képsíkon valódi nagyságban látszik $\overline{M'N'} = \overline{MN}$.

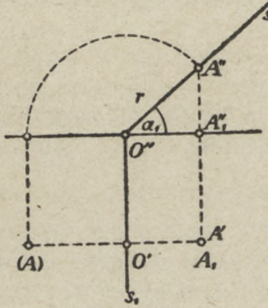
110 §. Szögfeladatok. *Két térelem szögét mindig két metsző egyenes szögére vezetjük vissza.* a) *Két kitérő egyenes szögén értjük azt a szöget, melyet a tér egy tetszőleges pontjára illeszkedő és az adott egyenesekkel parallel egyenesek alkotnak.* b) *Egyenes és sík szöge az a szög, melyet az egyenes és ez egyenesnek a síkon lévő orthogonális projekciója bezár.* c) *Két sík szögén értjük ama két egyenes szögét mely egyenesekben egy, az adott két sík közös egyenesére merőleges sík az adott síkokat metszi.*

Két egyenes általában két szöget alkot, mindkét szög a két egyenes szöge, a két szög közül az egyik a másiknak mellékszöge, ezért szög szerkesztésénél az egyik szög ismerete elégséges.

Két egyenes szögének képe általában az eredeti szöggel nem egyenlő, de az eddigiek alapján tudjuk, hogy két egyenes szöge valódi nagyságban látszik valamely képsíkon, ha a szöget bezáró egyenesek a képsíkra illeszkedő egyenesek, vagy a képsíkkal parallel egyenesek. Tehát projekcióval *adott szög valódi nagyságát nyerjük* a) *oly új képsíkon, mely, képsík az egyenesek összekötő síkjával parallel,* b) *ha a két egyenes összekötő síkját az egyenesekkel együtt a képsíkkal egyesített vagy a képsíkkal parallel helyzetbe hozzuk.*

Amennyiben két egyenes szögét az *a)* alatti eljárással kívánjuk megszerkeszteni, e szerkesztéshez szükséges tudnivalókkal rendelkezünk, mert a sík transzformációjánál már elintéztük azt a kérdést, hogy miképpen kell adott síkkal parallel új képsíkot bevezetni. Ha pedig a *b)* alatti eljárással kívánunk célhoz érni, foglalkoznunk kell síknak képsíkkal való egyesítésével, illetőleg síknak képsíkkal parallel helyzetbe való hozatalával. Síknak képsíkkal való egyesítésének módja legkönnyebben akkor követhető, ha a síkot nyomvonala körül a képsíkba forgatjuk; képsíkkal parallel helyzetbe legegyszerűbb módon úgy hozhatjuk, hogy a síkot egy, a síkra illeszkedő, képsíkkal parallel helyzetű egyenes körül, a sík fővonala körül, a képsíkkal parallel helyzetbe forgatjuk.

111. §. Síknak leforgatása képsíkba. Vegyünk fel a második képsíkra merőleges $S(s_1, s_2)$ síkot (114. ábra). Sík képsíkba forgatását elintézettnek akkor mondhatjuk, ha egy a síkra illeszkedő tetszőleges pont képsíkba forgatottjának helyzetét megszerkesztettük. A felvett síkot második nyomvonala körül beforgathatjuk a második képsíkba. Második vetítősíknak a második képsíkba való forgatását elintézettnek mondhatjuk, mert a második vetítősík új képsíknak tekinthető, melyet a második nyomvonal körül, az új tengely körül való forgatással a második képsíkkal egyesítünk, ezt pedig a transzformáció tárgyalásánál már elvégeztük. Egy a síkra illeszkedő pont negyedik képe az új képsíkon a pont beforgatottja a második képsíkba. Új feladattal állunk szemben, ha a második vetítősíkot első nyomvonala körül az első képsíkba kívánjuk forgatni. Az adott sík első nyomvonala a második képsíkra merőleges, vagyis a szóban lévő forgatásnál második tengely. Legyen az adott síkra illeszkedő pont A (A', A''). Ha az S síkot első nyomvonala körül forgatjuk, akkor e síkra illeszkedő A pont az s_1 körül, mint második tengely körül, forog, a pont e forgatásnál kört ír le. Tulajdonképpeni feladatunk a forgatott pont ama momentán helyzetének megállapítása, amikor az az első képsíkba jut. Az A pont által leírt kör első és második képét megrajzolva, az eddigiek alapján közvetlenül megállapíthatjuk a kör ama pontját, melyben az első képsíkot metszi, e pont az A pont leforgatottja, (A). A szerkesztés rövid menetének kidomborítása végett a következő jelöléseket vezessük be: Az S síkra illeszkedő A pont első képe, mint az első képsík pontja, legyen A_1, e pont második képe, az A_1'' pont, az A pont tengelyprojekciójával azonos pont. Az A pont által leírt kör középpontja legyen $O(O', O'')$. A kör sugara $\overline{OA} = \overline{O''A''} = r$. A kör síkja az adott síkot egy első esésvonalban metszi. Az első esésvonal az A és O pontokra illeszkedő egyenes. Ez első esésvonal első képére illeszkedik az A pont első képe, A', a kör középpontja, $O \equiv O'$, végül az A pont leforgatottja, (A), ahol $\overline{O(A)}$ távolság az r távolsággal egyenlő. A leforgatott A pontra nézve a következő szerkesztésbeli utasítást nyerjük: *a)* megrajzoljuk az A pontra illeszkedő első esésvonal első képét, *b)* megszerkesztjük az A pont által leírt kör sugarát, e sugár, az $\overline{O''A''}$ távolság az $O''A''A_1''$ derékszögű háromszög átfogója, melynek egyik befogója a pont első képének távolsága a sík első nyomvonalától, mert $\overline{O''A_1''} = \overline{O'A'}$, másik befogója, $\overline{A''A_1''}$, az A pont második rendezője, *c)* a megrajzolt esésvonal első képére a sík nyomvonalától számítva felmérjük a kör sugarát, a nyert pont lesz az A pont leforgatottja, (A).

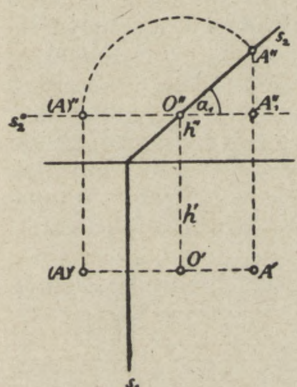


114. ábra.

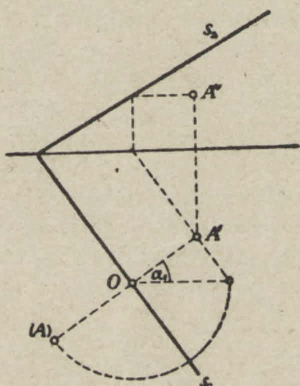
Megjegyzendő, hogy az $A''O''A_1''$ háromszögben, melynek átfogója az A pont által leírt kör sugara, az O'' csúcspont mellett fekvő hegyesszöge az adott S sík és első képsík hajlásszöge, a sík első képsíkszöge, α_1. Ha ugyanis a sík első képsíkszögét meg akarjuk szerkeszteni, akkor az adott sík és első képsík közös egyenesére, az első nyomvonalra, merőleges sík metszi az adott síkot első esésvonalban, az első képsíkot az esésvonal első képében, esésvonal és e vonal első képe által bezárt szög a sík első képsíkszöge. Úgy az esésvonal, valamint e vonal első képe a második képsíkkal parallel, tehát ez egyenesek második képei által bezárt szög a sík első képsíkszögének valódi nagysága.

Tulajdonképpen síknak első képsíkszöge két szög, az egyik az előbb tárgyalt hegyesszög, a másik ennek mellékszöge. A két képsíkszögnek megfelelően a síkot első nyomvonala körüli forgatással kétféleképpen forgathatjuk az első képsíkba, forgathatjuk a hegyesszög körül és forgathatjuk a tompaszög körül a képsíkba.

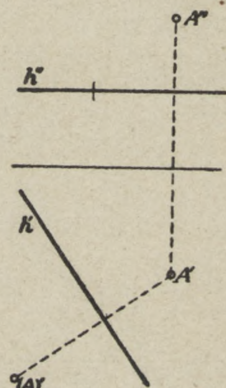
Vegyünk fel megint második vetítő síkot, egy a síkra illeszkedő A pontot és a sík egy első fővonalát, a h egyenest (115. ábra). Ha most az A pontot a h fővonal körül addig forgatjuk, míg az a h egyenesre illeszkedő, első képsíkkal parallel helyzetű síkba jut, akkor az első képsíkkal parallel síkba forgatott pont első képe, $(A)'$, az A' ponton átmenő és h' egyenesre merőleges egyenesen van és ezen az egyenesen az $(A)'$ pontnak távolsága a h' egyenestől megint



115. ábra.



116. ábra.



117. ábra.

egy derékszögű háromszög átfogója, e háromszög egyik befogója a pont első képének távolsága a fővonal első képétől, másik befogója a pont távolsága attól a síktól, melybe a pontot forgattuk.

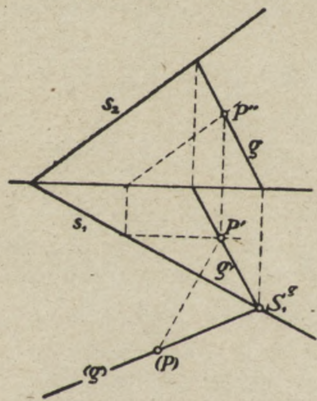
Az előzők alapján a két képsíkkal szemben általános helyzetű síkot is beforgathatunk *a)* a sík nyomvonala körül a képsíkba, *b)* a sík fővonala körül a képsíkkal parallel helyzetű síkba.

a) Legyen a sík első nyomvonala, s_1, a síkra illeszkedő pont $A(A', A'')$ (116. ábra). Az A pont első képsíkba forgatottja, (A), illeszkedik az A' ponton átmenő és az első nyomvonalra merőleges egyenesre, vagyis az A pontra illeszkedő első esésvonal első képére; legyen az esésvonal és első nyomvonal közös pontja O, akkor (A) távolsága O-tól egy derékszögű háromszög átfogója, a háromszög egyik befogója a pont első képének távolsága az első nyomvonaltól, másik befogója az A pont második rendezője. A derékszögű háromszöget, ha egyáltalában megrajzoljuk, megrajzoljuk az egyik vagy másik befogó mellett. Ha az $A'O$ befogó mellett rajzoljuk, mondhatjuk, hogy az AOA' háromszöget a háromszög síkjának első nyomvonala körül beforgattuk az első képsíkba. A háromszögnek O csúcspontja melletti szöge a sík első képsíkszöge.

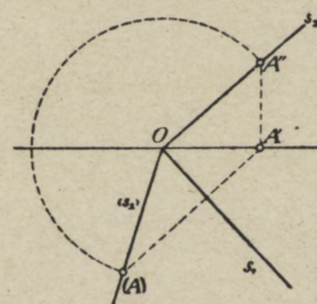
b) (117. ábra.) Legyen adva egy az első képsíkkal parallel

$h(h', h'')$ egyenes és egy tetszőleges $A(A', A'')$ pont. Az A pont és h egyenes által meghatározott síkot forgassuk be a h egyenes körül a h egyenesre illeszkedő, első képsíkkal parallel helyzetű síkba. E sík nyomvonala a második képsíkon a h'' egyenessel azonos egyenes. Az A pont az első képsíkkal parallel síkba forgatottjának első képe az A' pontra illeszkedő és h' egyenesre merőleges egyenesen van. Ettől az egyenestől való távolsága pedig egy derékszögű háromszög átfogója, melynek egyik befogója az A' pontnak a h' egyenestől való távolsága, másik befogója az A'' pontnak távolsága a h'' egyenestől.

112. §. Síkra illeszkedő egyenes leforgatása. Adva van az $S(s_1, s_2)$ sík és a síkra illeszkedő $g(g', g'')$ egyenes (118. ábra). Ha az adott síkot első nyomvonala körül az első képsíkba forgatjuk, akkor a síkra illeszkedő minden elemet beforgatunk az első képsíkba, vagyis a síkra illeszkedő g egyenes leforgatottja az első képsík egy meghatározott egyenese. A leforgatott egyenes helyzetét két pontjának leforgatottja határozza meg. Az egyik pont lehetőleg az egyenes első nyompontja, mert ennek leforgatottja önmaga, a másik pont az egyenesre illeszkedő tetszőleges $P(P', P'')$ pont. A P pont leforgatottjának összekötő egyenese a g egyenes első nyompontjával a g egyenes leforgatottja, (g). Az ábrában a síkot a tompaszögű képsíkszöggel forgattuk.



118. ábra.

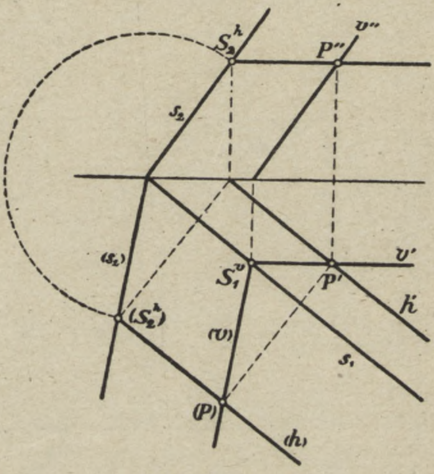


119. ábra.

113. §. Sík második nyomvonalának leforgatása az első képsíkba. Adva van az $S(s_1, s_2)$ sík (119. ábra). Forgassuk e síkot az első nyomvonal körül az első képsíkba, akkor a sík második nyomvonalának leforgatottja meghatározott helyzetbe jut. A második nyomvonal leforgatottja a sík tengelypontján, a T ponton, átmenő egyenes, mert a sík tengelypontja a második nyomvonal első nyompontja. Az s_2 nyomvonal egy tetszőleges $A(A', A'')$ pontjának leforgatottja meghatározható a pont leforgatásával kapcsolatos derékszögű háromszög szerkesztése nélkül. Az A pont leforgatottja az A' ponton átmenő és a sík első nyomvonalára merőleges egyenesen van. Az A pont és a sík tengelypontja által meghatározott távolság leforgatottja az eredeti távolsággal egyenlő, de e távolság valódi nagysága a $\overline{TA''}$ távolság. Vagyis az A pont első képsíkba forgatottja ama első képsíkban fekvő kör egy pontja, mely körnek középpontja a sík tengelypontja és sugara $\overline{TA''}$. E kör és az A pont első képén átmenő, első nyomvonalra merőleges egyenes közös pontja a keresett leforgatott pont, (A). A leforgatott második nyomvonal, $(s_2) \equiv T(A)$.

114. §. Sík első és második fővonalának leforgatása az első képsíkba. Vegyük fel az $\mathbf{S}(s_1, s_2)$ sík egy h első és egy v második fővonalát (120 ábra).

A sík első fővonalának leforgatásánál megszerkesztjük az előbbi pont szerint második nyompontjának leforgatását. A leforgatott nyomponton átmenő, első nyomvonallal parallel egyenes a keresett leforgatott első fővonal. A második fővonal leforgatottjának iránya a leforgatott második nyomvonal irányával azonos és első nyompontjának leforgatottja önmaga. Az ábrából leolvashatjuk azt is, hogy miként lehet síkra illeszkedő pont leforgatottjának szerkesztésénél a pontra illeszkedő első vagy második fővonalat felhasználni.

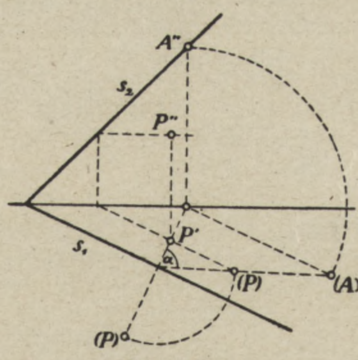


120. ábra.

115. §. Sík felállítása. Sík felállításán értjük a sík tetszőleges elemének képsíkba forgatottjából ezen elem első és második képének megszerkesztését. A sík minden elemét felállíthatjuk, ha pontot tudunk felállítani. Mivel pontot kétféleképpen tanultunk leforgatni, ennek megfelelően a felállítás is kétféleképpen végezhető.

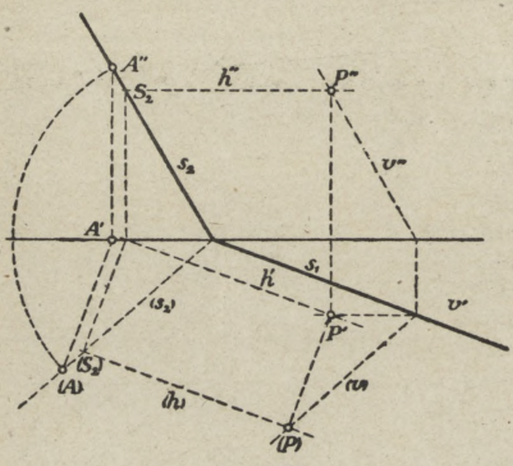
Legyen az adott sík az $\mathbf{S}(s_1, s_2)$ sík és e síkra illeszkedő pont első képsíkba forgatottja (P).

a) (121. ábra.) A pont első képe egy a (P) ponton átmenő és a sík első nyomvonalára merőleges egyenesen van. A pont első képének az első nyomvonaltól való távolsága egy derékszögű háromszög egyik befogója. A pont leforgatásának szerkesztésénél ismeretes volt a derékszögű háromszög két befogója, a felállításnál a derékszögű háromszögnek csak az átfogója mérhető le közvetlenül, az átfogó a (P) pont és s_1 távolsága. A derékszögű háromszög megszerkesztéséhez két alkatrész szükséges, a még hiányzó alkatrész a sík első képsíkszöge, ez a képsíkszög a pont leforgatásánál használt derékszögű háromszög egyik szöge. Tehát mindenekelőtt megszer-



121. ábra.

kesztjük a sík első képsíkszögét, majd egy derékszögű háromszöget, melynek átfogója adott és egyik szöge a képsíkszög. E derékszögű háromszögnek a képsíkszög melletti befogója a pont első képének a sík első nyomvonalától mért távolsága, másik befogója a pont második rendezője. A szerkesztés berendezése az ábrából leolvasható.



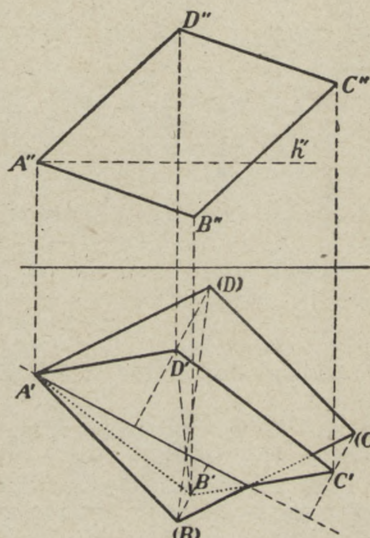
122. ábra.

b) (122. ábra.) A pontot felállíthatjuk a pontra illeszkedő első vagy második fővonal segítségével. Megszerkesztjük ismeretes módon a sík második nyomvonalának leforgatottját. A leforgatott ponton át vezetjük a sík egy első fővonalának leforgatottját, a (h) egyenest. A sík első nyomvonalával párhuzamosan rajzolt (h) egyenes metszi az (s_2) egyenest (S_2) pontban. Az S_2 pont, mint a sík második nyomvonalára illeszkedő pont, első képe az x_{12} tengely egy pontja, tehát a (P) pontra illeszkedő első fővonal második nyompontjának első képe az x_{12} tengely ama pontja, melyben az (S_2) ponton átmenő és s_1-re merőleges egyenes metszi. Ebből meghatározható a fővonal első és második képe, majd rajta a felállított P pont első és második képe. A P pont leforgatottjára illeszkedő második fővonal leforgatottja a sík második nyomvonalának leforgatottjával parallel egyenes, ahol ez metszi a sík első nyomvonalát, e pont a második fővonal első nyompontja. A második fővonal első és második képe az ismeretes első nyompontja alapján megrajzolható, ezen nyerjük a felállított P pont első és második képét.

116. §. A leforgatott síkbeli rendszer és a síkbeli rendszer első képe közötti vonatkozás. Két egyesített síkbeli rendszert nyerünk, ha a síkbeli rendszer elemeinek első képeit, majd a síkbeli rendszer elemeinek első képsíkba forgatottjait megszerkesztjük. Az egyesített síkbeli rendszerek elemeit vonatkoztatjuk egymásra, ha a síkbeli rendszer egy elemének első képét és ugyanazon elem leforgatottját megfelelő elempárnak minősítjük. Megfelelő egyenesek metszéspontjai a sík első nyomvonalára illeszkedő pontok, e pontok az egymásra vonatkoztatott síkbeli rendszerek önmaguknak megfelelő pontjai, vagyis az önmaguknak megfelelő pontok egy egyenes pontsor pontjai. Megfelelő pontok összekötő egyenesei a sík első nyomvonalára merőleges egyenesek, szóval a megfelelő pontok összekötő egyenesei parallel egyenesek. Az egyesített síkbeli rendszerek közötti vonatkozás tehát affinitás, az affinitás tengelye a sík első nyomvonala, az affinitás sugarai az affinitás tengelyére merőlegesek, az affinitás orthogonális affinitás.

Egyesített affin síkbeli rendszereket akkor is nyerünk, ha a síkot egy első fővonala körül az első képsíkkal parallel helyzetű síkba forgatjuk. Ekkor a síkbeli rendszer elemeinek első képei és ezek leforgatottjainak első képei orthogonális affin vonatkozásban vannak, ha egy elem első képe és ugyanazon elem leforgatottjának első képe egy megfelelő elempár. Az affinitás tengelye ama első fővonal első képe, mely körül a síkot az első képsíkkal parallel helyzetű síkba forgattuk.

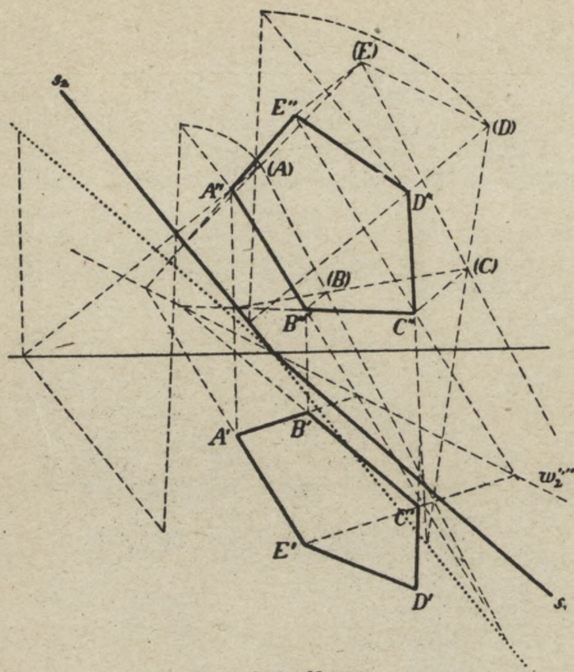
A most megállapított affin vonatkozásokat előnyösen felhasználhatjuk két képével megadott síkalakzat valódi alakjának és nagyságának szerkesztésénél, és felhasználhatjuk síkalakzat képének szerkesztésénél is, ha síkalakzat síkjának helyzete a két képsíkkal szemben adott.



123. ábra.

117. §. Síkidom valódi alakjának és nagyságának szerkesztése. Legyen adva az $ABCD$ ($A'B'C'D'$, $A''B''C''D''$) parallelogramma (123. ábra.) Ha e parallelogramma valódi alakját és nagyságát meg akarjuk szerkeszteni, úgy síkját valamely képsíkba vagy képsíkkal parallel helyzetű síkba forgatjuk, a leforgatott parallelogramma csúcspontok, illetőleg parallelogramma oldalak adják a keresett alakzatot. Az ábrában felvettük a parallelogramma síkjának az A csúcspontra illeszkedő első fővonalát, e fővonal körül a parallelogramma síkját az első képsíkkal parallel helyzetű síkba forgatjuk. A B csúcspont leforgatottjának első képét egy pont leforgatásával kapcsolatos derékszögű háromszöggel intéztük el, a C és D pontok leforgatottjait azon affin vonatkozás alapján szerkesztettük meg, mely vonatkozás fennáll a parallelogramma első képe és a parallelogramma első képsíkkal parallel helyzetű síkba forgatottjának első képe között.

118. §. Adott síkidom képeinek szerkesztése. Szerkesztessék pl. az adott $S(s_1, s_2)$ sík egy $ABCDE$ szabályos ötszögének két képe (124. ábra). Gondoljuk az ötszög síkját a sík második nyomvonala körül a második képsíkba forgatva, és legyen az ötszög AB oldalának a második képsíkba forgatottja az $(A)(B)$. Mindenekelőtt megszerkesztjük a leforgatott szabályos ötszög hiányzó csúcspontjait, megállapítjuk az ötszög egy csúcspontjának, mondjuk az A csúcspont felállítottjának második és első képét, úgy, ahogy ezt a 115. pontban elvégeztük. Az ötszög többi csúcspontjának második képét azon affin vonatkozás alapján határozzuk meg, mely fennáll az ötszög második képsíkba forgatottja és az ötszög második képe között. Miután az ötszög második képét megszerkesztettük, az



124. ábra.

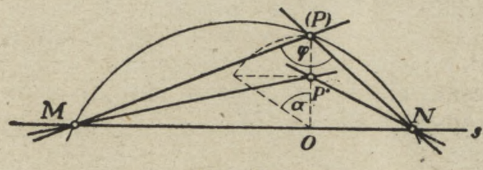
ötszög első képe ama affin vonatkozás alapján szerkeszthető meg, melyet megállapítottunk síkalakzat első és második képe között az 54. E. pontban.

119. §. Szög képe és szög valódi nagysága. Ha adva van orthogonális parallel projekcióban két képsíkon egy szög két képe, úgy az előzők alapján e szög valódi nagyságát megszerkeszthetjük. A 110. pontban azt mondottuk, hogy szög képe általában különbözik a szög eredeti nagyságától, ezt fogjuk a következőkben némileg részletezni. Mivel általában két egyenes két szöget alkot, ezeket a szögeket egymástól meg kell különböztetni. *E pontban két egyenes szögén ama két félsugár által bezárt szöget értjük, mely félsugarakra az egyenesek nyompontjai illeszkednek.* Egyelőre kizárjuk azt az esetet, hogy a szög egyik szára képsíkra illeszkedő vagy képsíkkal parallel egyenes. Ha pedig a csúcspont képsíkra illeszkedő pont és a szöget bezáró egyenesek egyike sem képsíkra illeszkedő egyenes, ezt végleg kizárhatjuk, mert az ilyen szöget mindig helyettesíthetjük az eredetivel egyenlő parallelszárú szöggel, melynek csúcspontja nem a képsíkra illeszkedő pont. Továbbá megállapodunk abban, hogy a sík képsíkszögén mindig a hegyesszöget értjük.

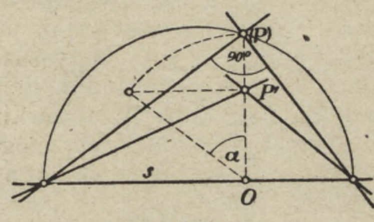
Legyen a sík nyomvonala az s egyenes, ezen a szög szárainak nyompontjai M, illetőleg N, a szög csúcspontja P, a csúcspont leforgatottja (P), orthogonális képe P', a csúcspont felállításánál a P pont által leírt kör középpontja O.

a) Legyen a PM és PN szögszárak által bezárt szög, φ, megadott nagyságú tompaszög (125. ábra). E feltételek mellett a leforgatott csúcspont ama körív egy pontja, melynek minden pontjából az MN távolság φ szög alatt látszik, e körív félkörívnél kisebb. Ha a csúcspont leforgatottja a körív (P) pontja, akkor e pont képe a $(P)\,O$ szegmentum egy belső pontja vagy valamelyik határpontja. A csúcspont leforgatottja és képe mindig meghatározza a sík képsíkszögét, az α szöget. Ha P' a $(P)\,O$ szegmentum belső pontja, akkor φ szög képe az eredetinél nagyobb; ha $P' \equiv (P)$, akkor a szög képe az eredetivel egyenlő, ugyanakkor a sík képsíkszöge $0°$; ha $P' \equiv O$, akkor a szög képe $180°$, a sík képsíkszöge $90°$. Vagyis tompaszög képe, ha síkja a képsíkkal szemben általános helyzetű, az eredetinél mindig nagyobb; ha síkja a képsíkkal azonos vagy vele parallel, akkor a tompaszög képe az eredetivel egyenlő.

b) Legyen a *PM* és *PN* szögszárak által bezárt szög, φ, derékszög (126. ábra). Ekkor az előbbi eredmények a derékszög képére is érvényesek, e szerint derékszög képe, ha síkja a képsíkkal szem-



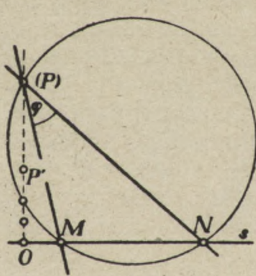
125. ábra.



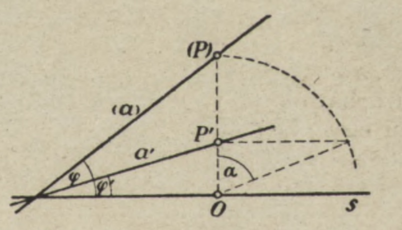
126 ábra.

ben általános helyzetű, az eredetinél mindig nagyobb; ha síkja a képsíkkal azonos vagy vele parallel, akkor a derékszög képe derékszög.

c) Legyen a *PM* és *PN* szögszárak által bezárt szög, φ, megadott nagyságú hegyesszög (127. ábra). E feltételek mellett ama körív egy pontja a leforgatott csúcspont, melynek minden pontjából az *MN* távolság φ szög alatt látszik, e körív félkörívnél nagyobb. Míg előbb a *P* pont forgatásánál leírt kör középpontja az *MN* távolság egy belső pontja volt, addig most az *O* pont az *MN* távolság külső pontja is lehet. Legyen az *O* pont az *MN* véges szegmentum külső pontja, akkor az *O* pontra illeszkedő és *s* egyenesre merőleges egyenes a kört két pontban metszi, e metszéspontok közül legyen az egyenestől távolabb fekvő pont a *P* pont leforgatottja.



127. ábra.



128. ábra.

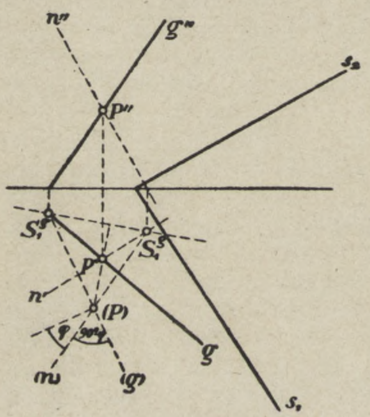
A csúcspont első képe a $(P)\,O$ szegmentum bármely pontja lehet. Ha a *P* pont képe, *P'*, a kör belsejében van, akkor a hegyesszög képe az eredetinél nagyobb, ha *P'* pont a $(P)\,O$ egyenes és kör másik metszéspontja, akkor a hegyesszög képe az eredetivel egyenlő, végül ha a *P'* pont a körön kívül fekvő pont, akkor a hegyesszög képe az eredetinél kisebb.*

* Két egymást a körön belül metsző húr által bezárt szög a körre nézve belső szög; két egymást a körön kívül metsző húr által bezárt szög a körre nézve külső szög. A belső szöget a szög szárai és ezek meghosszabbításai közé zárt ívek összegének fele méri. A külső szöget a szög szárai közé zárt ívek különbségének fele méri. Ebből következik, hogy a belső szög mindig nagyobb, mint a szárak közé eső ívhez tartozó kerületi szög, a külső szög mindig kisebb, mint a szárak közé eső nagyobb ívhez tartozó kerületi szög.

d) Legyen a szög egyik szára a sík nyomvonalával azonos egyenes, másik szára legyen a képsíkba forgatott helyzetben, (a) (128. ábra). Vegyük figyelembe az a és s egyenesek által bezárt szögek közül a hegyesszöget, e hegyesszög képe az eredetinél általában kisebb, mert az a szár képe az (a) és s közé eső egyenes. Ha a szög egyik szára a sík nyomvonalával azonos egyenes vagy a nyomvonallal parallel egyenes, akkor a most megejtett vizsgálat alapján kimondhatjuk, hogy hegyesszög képe az eredetinél mindig kisebb, derékszög képe mindig derékszög, tompaszög képe az eredetinél mindig nagyobb. Továbbá kimondhatjuk azt is ez esetben, hogy a derékszögtől különböző szög csak akkor mutatkozik valódi nagyságban, ha mindkét szára a képsíkra illeszkedő vagy a képsíkkal parallel egyenes.

Az *a), b), c), d)* alatti vizsgálatok arra képesítenek, hogy bármely szög képére következtetéseket vonhassunk.

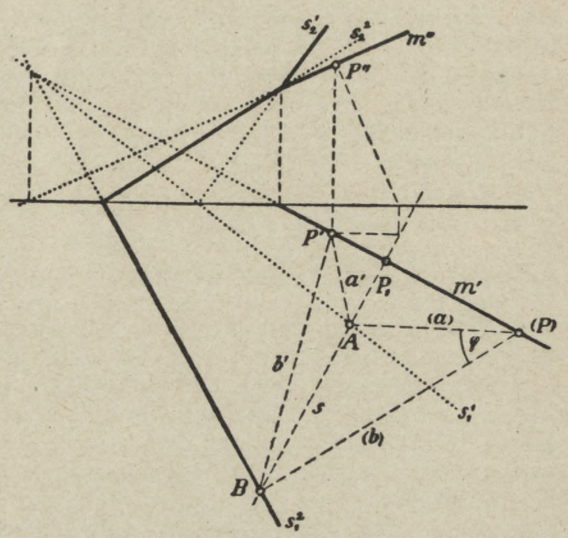
120. §. Egyenes és sík szöge. Legyen adva a $g(g', g'')$ egyenes és az $S(s_1, s_2)$ sík (129. ábra). Ha a két adott térelem szögét keressük, előbb a g egyenesnek orthogonális projekcióját kell meghatározni az S síkon. E végett felveszünk a g egyenesre illeszkedő P pontot, e ponton átmenő és az S síkra merőleges n egyenes metszéspontja az S síkkal, továbbá a g egyenes és S sík metszéspontja meghatározza a g egyenes vetületét az S síkon, a vetület és adott egyenes szöge volna az adott két térelem szöge. A g és n egyenesek metszéspontjai az S síkkal és a P pont egy derékszögű háromszög három csúcspontja, e háromszög egyik hegyesszöge a keresett szög. Kevesebb fáradsággal jár a szög pótszögének meghatározása, e szög a g és n egyenesek által bezárt szög, ezt a szöget szerkesztettük meg az ábrában valódi nagyságban, ez $90° - \varphi$, ha φ-vel jelöljük a keresett szöget. Amennyiben a g és n egyenesek összekötő síkjának nyomvonala a rajz területéből kiesik, a metsző egyenesek által meghatározott síkot a sík egy első fővonala körül az első képsíkkal parallel helyzetű síkba forgatjuk. A beforgatott egyenesek első képei által bezárt szög a keresett szög pótszöge.



129. ábra.

121. §. Két sík szöge. Adva van az $S^1(s_1^1, s_2^1)$ és az $S^2(s_1^2, s_2^2)$ sík. Meghatározandó a két sík szöge (130. ábra).

a) Mindenekelőtt megszerkesztjük a két sík metszésvonalát, az m egyenest. A két sík közös egyenesén felvett $P(P'P'')$ ponton át, erre az egyenesre merőleges N síkot szerkesztünk, a sík első nyomvonala legyen s_1. A két sík közös egyenesére merőleges sík, röviden normálsík, az első síkot az a, a második síkot a b egyenesben metszi. Az a egyenes első nyompontja az s_1 és s_1^1 egyenesek közös pontja, az A pont; az a egyenes egy másik pontja a P pont, mert a P pont az eddig szereplő három sík közös pontja. Hasonlóan nyerjük a b egyenest, legyen ennek első nyompontja B. A P pontra illeszkedő a és b egyeneseket, mint a normálsík egyeneseit, a sík első nyomvonala körül az első képsíkba forgatjuk, a leforgatott egyenesek szöge a keresett szög. Amennyiben csak a két sík szöge érdekel, úgy a szerkesztésből látható, hogy az a és b egyenesek képeinek rajzolása felesleges.



130. ábra.

b) Két sík szögének valódi nagysága az *a)* alatti szerkesztés alapján más úton is nyerhető. Megtartva az előbbi jelöléseket, látjuk, hogy az APB pontok által meghatározott háromszög AB alappal szemközt fekvő szöge a két sík szöge. Az APB háromszög megszerkeszthető oldalaiból. Nevezetesen a két sík metszésvonalának első képére merőlegesen rajzolt tetszőleges egyenes az adott síkok első nyomvonalait az A, illetőleg B pontban metszi, az AP oldal valódi nagyságát nyerjük, ha az adott síkok metszésvonalát az első adott sík első nyomvonala körül az első képsíkba forgatjuk, az A pont és a leforgatott metszésvonal közti távolság a keresett oldal valódi nagysága, mert AP egyenes a térben az m egyenesre merőleges. Hasonlóan nyerjük a BP oldal valódi nagyságát, az m egyenest, a két sík közös egyenesét a második sík első nyomvonala körül szintén az első képsíkba forgatjuk, a B pont és a leforgatott metszésvonal közti távolság a keresett oldal. A háromszög harmadik oldala, AB, mint az első képsíkra illeszkedő távolság, valódi nagyságban látszik. A három oldalból megszerkesztett háromszög AB oldallal szemközt fekvő szöge a keresett szög.

c) Az APB háromszög megszerkeszthető még az AB alapból, ez alaphoz tartozó magasságból és e magasság talppontjából. A normálsík első nyomvonalán az AB alap közvetlenül nyerhető, míg ez alaphoz tartozó magasság talppontja az AB egyenes ama pontja, melyben a két sík közös egyenesének első képét metszi, legyen ez a pont P_1. A PP_1 magasság, mint a normálsík egyenese, merőleges a két sík közös egyenesére, tehát nagyságra nézve egyenlő a P_1 pontnak a két sík közös egyenesétől mért távolsággal. Az m egyenes és a P_1 pont az m egyenes első vetítősíkjára illeszkedő elemek, ha tehát ezt a síkot első nyomvonala körül a benne lévő egyenessel az első képsíkba forgatjuk, akkor a P_1 pontnak a távolsága a leforgatott m egyenestől a keresett magasság valódi nagysága. Az APB háromszög a most megállapított alkatrészekből megszerkeszthető, e háromszögben az AB alappal szemben fekvő szög a két sík szöge.

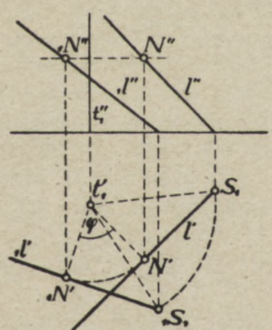
d) Két sík szögét úgy is szerkeszthetjük meg, hogy a tér egy tetszőleges pontján át az adott síkok mindegyikére egy-egy merőleges egyenest bocsátunk, a két merőleges által bezárt szög az adott síkok szögével egyenlő. Két sík szögének e szerkesztését csak akkor fogjuk használni, ha kizárólag csak a két sík szögét keressük.

Két sík szöge valamely képsíkon közvetlenül látszik, ha mindkét sík ugyanazon képsíkra nézve vetítősík. A két sík szöge a síkokra merőleges képsíkon lévő nyomvonalak által bezárt szög. Két sík merőleges lesz valamely képsíkra, ha azok közös egyenese a képsíkra merőleges.

Térelemek forgatása képsíkra merőleges tengely körül.

Az eddig tárgyalt metrikus feladatok lényegesen egyszerűbben megoldhatók, ha a feladatban szereplő térelemek a képsíkkal szemben speciális helyzetben vannak. Eddig térelem és képsík speciális helyzetét elértük azáltal, hogy meghatározott terv szerint új képsíkokat vezettünk be. A speciális helyzetet nyertük egyes esetekben úgy is, hogy az alakzatot egy első, ill. második tengely körül forgattuk. Eddig pontot, a forgatás tengelyére illeszkedő egyenest és a forgatás tengelyére illeszkedő síkot forgattunk.

122. §. Tengelyre nem illeszkedő egyenes forgatása. Adva van az $l(l', l'')$ egyenes és egy első tengely $t_1(t_1', t_1'')$. (131. ábra.) Forgassuk az l egyenest t_1 tengely körül φ szöggel. Mindenekelőtt hangsúlyoznunk kell, hogy egyenes tengely körüli forgatásánál az adott egyenes és tengely viszonylagos helyzete nem változik, tehát tengely és adott egyenes normális transzverzálisának elforgatottja az elforgatott egyenes és tengely normális transzverzálisa. Ha az adott egyenest φ szöggel elforgatjuk, akkor a tengely és adott egyenes normális transzverzálisát is φ szöggel forgattuk el. Az adott egyenest φ szöggel elforgatjuk, ha annak két pontját φ szöggel elforgatjuk. Az egyik pont a tengely és adott egyenes normális transzverzálisának az adott egyenesre illeszkedő pontja, az ábrában az N pont. Ha az N pontot φ szöggel elforgattuk, akkor az elforgatott egyenes első képét megrajzolhatjuk, mert t_1' és ${}_1N'$ pontok összekötő egyenese az elforgatott normális transzverzális első képe, melyre az elforgatott egyenes első képe merőleges. Az elforgatott egyenes második képének meghatározásához szükséges az egyenes egy tetszőleges pontjának elforgatottja. Az ábrában az egyenes első nyompontját forgattuk. Az első nyompont forgása által leírt kör az elforgatott egyenes első képét két pontban metszi, e pontok közül az egyik az elforgatott első nyompont és pedig az a pont, melynek elforgatása ugyanazon szöggel történt, mint az egyenes elforgatása. E pont

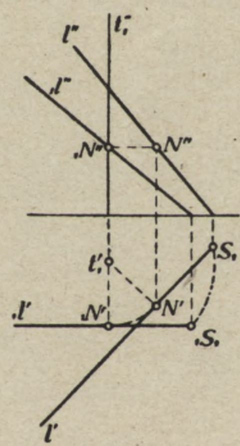


131. ábra.

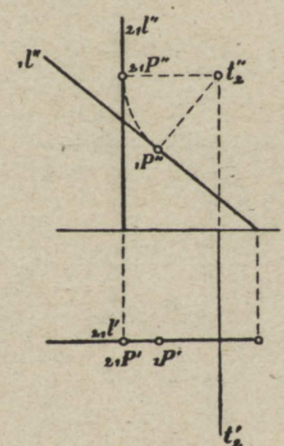
második képe az elforgatott N pont második képével meghatározza az egyenes elforgatottjának második képét.

Megjegyzendő, hogy egyenest egy első tengely körül forgatva az egyenes és tengely, ill. az egyenes és első képsík viszonylagos helyzete a mozgás minden pillanatában ugyanaz. Vagyis az elforgatott egyenes minden helyzetében a tengellyel, ill. az első képsíkkal ugyanazt a szöget zárja be, mint amilyen szöget az egyenes eredeti helyzetében a tengellyel, ill. első képsíkkal bezárt. Továbbá az eredeti egyenes első nyompontjának elforgatottja az elforgatott egyenes első nyompontja. Az első tengely körül forgatott egyenes a forgás minden pillanatában a második képsíkkal más és más szöget alkot; a második nyompont elforgatottja általában nem lesz az első tengely körül forgatott egyenes második nyompontja, a második nyompont forgás közben a második képsíkból kilép.

123. §. Egyenes forgatása képsíkkal parallel helyzetbe. Az előzők szerint egyenest első tengely körül forgatva annak helyzete a második képsíkkal szemben változik. Ábrázoljuk két képével adott l egyenes első tengely körül forgatott ama helyzetét, midőn az elforgatott egyenes a második képsíkkal parallel. (132. ábra.) Ekkor az elforgatott egyenes és tengely normális transzverzálisa második vetítősugár, tehát az elforgatott egyenes kívánt helyzetét nyerjük, ha a normális transzverzálist addig forgatjuk, míg második vetítősugár lesz, vagyis míg t_1' és ${}_1N'$ összekötő egyenese az x_{12} tengelyre merőleges lesz. Az eredeti N pont és ennek elforgatottja méri az első képsíkban azt a szöget, mellyel az eredeti egyenest el kell forgatni, hogy az egyenes a kívánt helyzetbe kerüljön.



132. ábra.

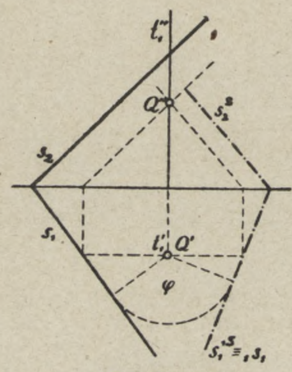


133. ábra.

124. §. Egyenes forgatása képsíkra merőleges helyzetbe. (133. ábra.) Ha egy az első képsíkra tetszőleges merőleges egyenest második tengely körül forgatunk, akkor az a mozgás minden pillanatában a második képsíkkal parallel. Ebből következik, hogy csak a második képsíkkal parallel helyzetű egyenest lehet egy második tengely körül addig forgatni, míg az az első képsíkra merőleges helyzetbe jut. Második képsíkra merőleges tengely és első képsíkra merőleges egyenes normális transzverzálisa az x_{12} tengellyel parallel egyenes.

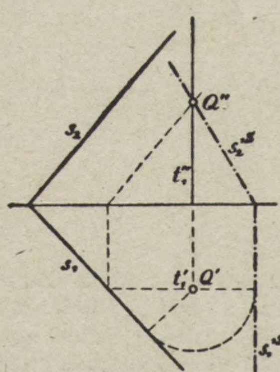
Két képsíkkal szemben általános helyzetű egyenes egy tengely körüli forgatással képsíkra merőleges helyzetbe nem hozható. Ha azt akarjuk, hogy az l egyenes az első képsíkra merőleges legyen, akkor először egy első tengely körül elforgatjuk addig, míg a második képsíkkal parallel helyzetbe jut, azután elforgatjuk az első tengely körül elforgatott egyenest egy második tengely körül addig, míg az első képsíkra merőleges helyzetbe jut. A 133. ábrában fel van tüntetve a második képsíkkal parallel helyzetbe hozott egyenesnek második tengely körüli forgatása a kívánt helyzetbe.

125. §. Tengelyre nem illeszkedő sík forgatása. Adva van az $S(s_1, s_2)$ sík és egy első tengely $t_1(t_1', t_1'')$. (134. ábra.) Forgassuk az S síkot t_1 körül φ szöggel. A feladatot megoldottuk, ha az adott síkra illeszkedő három pontot, vagy a síkra illeszkedő egy pontot és e síkra illeszkedő, de az utóbbi pontra nem illeszkedő egyenest a tengely körül φ szöggel elforgattuk. Adott sík esetében a síkra illeszkedő pontok közül az egyik pont legyen az a pont, mely pont a tengelyre illeszkedő pont. E pont elforgatottját külön nem is kell megszerkeszteni, mert e pont a sík forgatásánál helybenmaradó pont. Az ábrában e pont a Q pont. Első tengely körül forgatott sík első nyomvonalának, ill. első fővonalának elforgatottja az elforgatott sík első nyomvonala, ill. első fővonala. Ezért sík forgatásánál a sík első nyomvonalát, ill. első fővonalát forgatjuk. Az ábrában a φ szöggel elforgatott első nyomvonal és a helybenmaradó Q pont meghatározza az elforgatott síkot. Az elforgatott sík második nyomvonalát a Q pontra illeszkedő második fővonal felhasználásával szerkesztettük.



134. ábra.

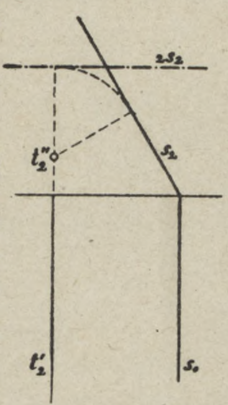
Megjegyzendő, hogy a síkot egy első tengely körül forgatva a sík és tengely, ill. a sík és első képsík viszonylagos helyzete a mozgás minden pillanatában ugyanaz, szóval a sík minden helyzetében a tengellyel ill. az első képsíkkal bezárt szög ugyanaz. Az első tengely körül forgatott sík a forgás minden pillanatában a második képsíkkal más és más szöget alkot. Az elforgatott második nyomvonal az elforgatott sík egy általános helyzetű egyenese lesz.



135. ábra.

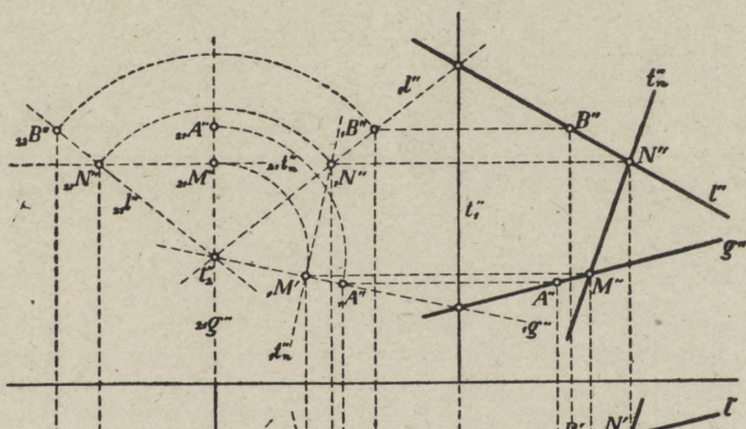
126. §. Sík forgatása képsíkra merőleges helyzetbe. Legyen adva az S (s_1, s_2) sík (135. ábra), ha e síkot egy felvett első tengely körül a második képsíkra merőleges helyzetbe kívánjuk forgatni, akkor az elforgatott sík első nyomvonala az $x_{1,2}$ tengelyre merőleges. Tehát a sík második képsíkra merőleges helyzetét nyerjük, ha a sík első nyomvonalát, ill. első fővonalát az $x_{1,2}$ tengelyre merőleges helyzetbe forgatjuk, az elforgatott nyomvonal és a forgatás tengelyére illeszkedő Q pont meghatározza a sík új helyzetét.

127. §. Sík forgatása képsíkkal parallel helyzetbe. Két képsíkkal szemben általános helyzetű sík valamely képsíkkal parallel helyzetbe egy tengely körüli forgatással nem forgatható, mert első képsíkkal parallel helyzetű síkot egy első tengely körül forgatva a forgatott sík az eredeti síkkal azonos marad, ha pedig ugyanazt a síkot egy második tengely körül forgatjuk, akkor a sík a forgatás minden pillanatában második vetítősík. Ebből következik, hogy síkot egy tengely körül képsíkkal parallel helyzetbe csak akkor forgathatunk, ha a sík vetítősík. Első vetítősík egy első tengely körül forgatható a második képsíkkal parallel helyzetbe, második vetítősík egy második tengely körül forgatható az első képsíkkal parallel helyzetbe. Mindkét esetben a forgatás tengelyével egynevű nyomvonalat addig forgatjuk, míg az az x_{12} tengellyel parallel helyzetbe jut. A 136. ábrában második vetítősíkot forgattunk az első képsíkkal parallel helyzetbe.



136. ábra.

128. §. A forgatás alkalmazása. A transzformáció egyes feladatok megoldásánál előnyöket nyujtott. Ezekhez az előnyökhöz oly új képsík bevezetése által jutottunk, mely képsík a feladatban szereplő egyenesre merő-



137. ábra.

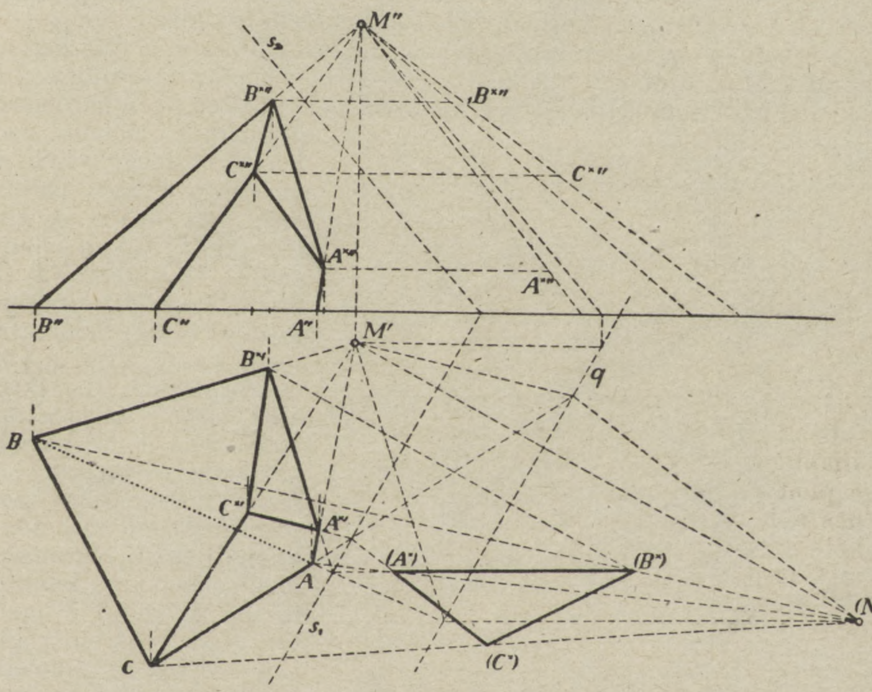
leges, illetve parallel helyzetű, avagy a feladatban szereplő síkkal parallel, illetve merőleges helyzetű volt. Egyenes és sík képsíkkal szemben eme speciális helyzeteinek előállítása mindenkor első és második tengely körüli forgatással is elérhető, tehát a transzformáció alkalmazásával nyert előnyöket tengely körüli forgatás alkalmazásával is biztosíthatjuk, de akkor a feladatban szereplő összes elemeket mindig ugyanazon szöggel ugyanazon értelemben kell elforgatni, hogy az adott elemek viszonylagos helyzete ne változzék.

Példaképpen szerkesszük meg két kitérő egyenes normális transzverzálisát. A normális transzverzálist akkor szerkeszthetjük legegyszerűbben, ha a kitérő egyenesek közül az egyik valamely képsíkra merőleges. Amennyiben mindkét kitérő egyenes a két képsíkkal szemben általános helyzetű, úgy az adott egyenesek helyzetváltoztatásával fogjuk a kitérő egyeneseknek a feladat megoldása szempontjából előnyös helyzetét előállítani. Legyen a két kitérő egyenes $g(g', g'')$ és $l(l', l'')$. (137. ábra.) Az adott egyeneseket egy első, majd egy második tengely körül forgatjuk egy-egy szöggel úgy, hogy a két forgatás után a g egyenes az első képsíkra merőleges legyen. Az ábrában az adott egyeneseket először egy első tengely körül forgattuk, az első tengelyt úgy választottuk, hogy az a kitérő egyenesek első födőpontjaira illeszkedő egyenes legyen. Az így választott első tengely körül az egyeneseket addig forgattuk, míg g egyenes a második képsíkkal parallel helyzetbe jutott. Az adott egyeneseket ebből a helyzetből egy második tengely körül forgattuk, a forgatás tengelyét úgy választottuk, hogy az az elforgatott egyenesek második födőpontjaira illeszkedő egyenes legyen, e második tengely körül forgattuk az adott egyeneseket addig, míg g egyenes az első képsíkra merőleges helyzetbe jutott. Ekkor megszerkesztettük a normális transzverzális első és második képét, az első kép a ${}_{21}g$ egyenes pontszerű első képéből a kétszeresen forgatott ${}_{21}l$ egyenes első képére bocsátott merőleges, e merőleges megállapítja a normális transzverzális metszéspontját az ${}_{21}l$ egyenessel, e pont második képére illeszkedő és az $x_{1\,2}$ tengellyel parallel egyenes a keresett egyenes második képe, a második kép megállapítja a kétszeresen elforgatott g egyenesen a transzverzális és g egyenes metszéspontját. Ha a normális transzverzális metszéspontjai az adott egyenesekkel M, ill. N, úgy eddig e pontok kétszeres elforgatottjait nyertük, ezek ${}_{21}N$, ill. ${}_{21}M$. E pontok kétszeres visszaforgatásából nyert pontok összekötő egyenese a keresett normális transzverzális.

Gúla- és hasábmodellek készítése.

129. §. Alakzat modellje. Az előző pontokban tárgyalt ábrázoló geometriai ismeretek arra képesítenek, hogy egy alakzatnak a tervező mérnök által készített két, ill. három képe alapján, amenynyiben az alakzat síklapok által határolt alakzat, az alakzaton szereplő térelemek viszonylagos helyzetét megállapítsuk. Az alakzat részeinek ismeretes viszonylagos helyzete lehetővé teszi az alakzat modelljének készítését. Az alakzat modelljén értjük az eredeti alakzatnak bizonyos méretarány szerinti hű mását. Minden modell valamilyen anyagból készül, ez az anyag vagy azonos avval az anyaggal, melyből az eredeti alakzat készül, vagy más. Utóbbi esetben oly anyagot veszünk igénybe, mely könnyen megmunkálható. Síklapú alakzat modelljét legkönnyebben papirosból állítjuk elő oly módon, hogy megszerkesztjük az alakzat hálózatát. Mint tudjuk, az alakzat hálózata síkidomokból tevődik össze, egy-egy síkidom nem más, mint a síklapú alakzat egy-egy határoló síkrészének valódi nagysága.

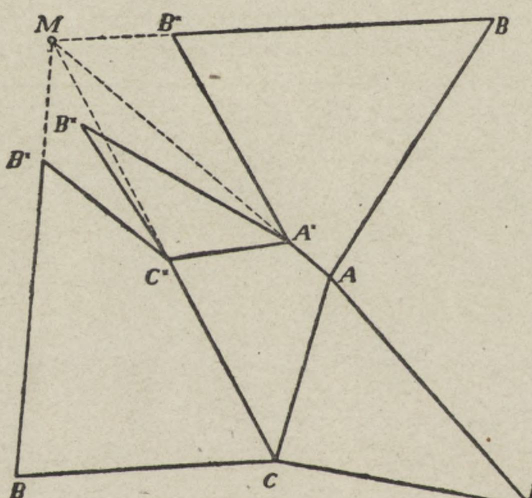
130. §. Síkkal elmetszett gúla hálózata. Legyen adva egy háromoldalú gúla. Csúcspontja $M(M', M'')$, vezérpoligonja az ABC háromszög az első képsíkban. (138. *a)* ábra.) Szerkesztessék meg e háromoldalú gúla ama részének hálózata, melyet a gúlából egyrészt az első képsík, másrészt a nyomvonalaival adott $S(s_1, s_2)$ sík határol. Mindenekelőtt megszerkesztjük a gúla és az adott sík



138 *a*. ábra.

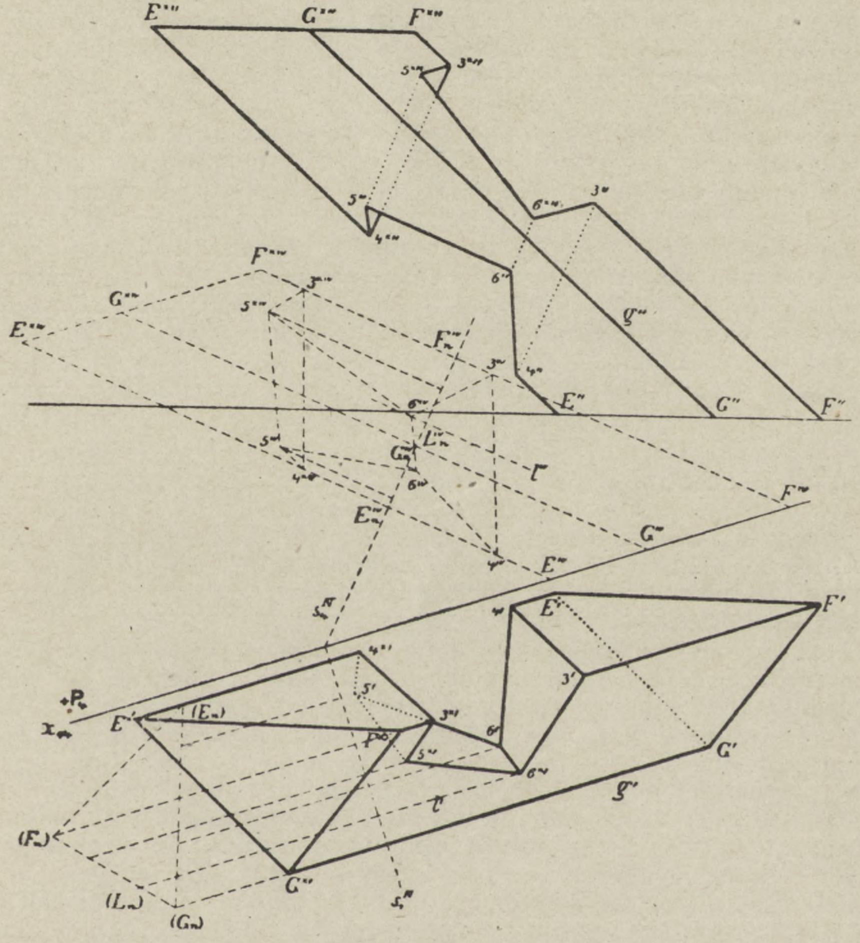
síkmetszetét. A síkmetszet első képét az ábrában centrális kollineációval állapítottuk meg, második képét felvetítéssel nyertük, a síkmetszet csúcspontjai legyenek rendre $A^{\times}$, $B^{\times}$, $C^{\times}$. Mivel a hálózatban az $A^{\times}B^{\times}C^{\times}$ födőlap valódi nagyságára van szükségünk, a födőlap síkját annak első nyomvonala körül az első képsíkba forgatjuk. Itt megjegyezzük, hogy a leforgatott födőlap és a gúla első nyompoligonja egy centrális kollineációban megfelelő idomok. Ennek igazolására előrebocsátjuk, hogy síkidomnak síkjának nyomvonala körül történt leforgatottja mindig az eredeti síkidom ferde parallel képének is tekinthető. T. i. a síkra illeszkedő pontok a sík leforgatásánál oly köríveket írnak le, mely körívekhez tartozó húrok mindig merőlegesek a sík és képsík ama szögfelező síkjára, mely szög körül a sík forgatását végeztük. E szerint mondhatjuk, hogy a gúla síkmetszetét a tér két különböző pontjából vetítjük az első képsíkra. Az egyik pont a gúla csúcspontja, ekkor a síkmetszet képe a gúla vezérpoligonja; a másik pont az előbbi szögfelező síkra merőleges egyenes végtelenben fekvő pontja, ekkor a síkmetszet képe a síkmetszet leforgatottja. De akkor a 63. §. 2. pontjára való hivatkozással kijelenthetjük, hogy a vezérpoligon és a síkmetszet leforgatottja megfelelő alakzatok abban a centrális kollineációban, melynek tengelye a metszősík első nyomvonala, centruma a két vetítési centrum összekötő egyenesének első nyompontja, egyik ellentengelye a gúla csúcspontjára illeszkedő és metsző síkkal parallel sík első nyomvonala, q. E kollineáció centrumát még úgy is nyerhetjük, hogy a gúla csúcspontját a rajta keresztülmenő és a metsző síkkal parallel sík első nyomvonala körül az első képsíkba forgatjuk.

A síkmetszet valódi nagyságának meghatározása után áttérhetünk az alakzat hálózatának szerkesztésére. Mindenekelőtt kifejtjük a gúla oldallapjait. A gúla oldallapjai háromszögek, minden ilyen háromszöget három oldalából szerkesztünk meg. (138. *b)* ábra.) Így az *MBC* háromszög *BC* oldala az első képsíkban valódi nagyságban látszik, az *MB*, ill. *MC* élek valódi nagyságát az ábrában úgy határoztuk meg, hogy egy a gúla csúcspontjára illeszkedő első tengely körül a második képsíkkal parallel helyzetbe forgattuk. Az *MBC* háromszög most már megszerkeszthető. A kifejtett *MBC* háromszög mellé hasonlóan kifejtjük az *MCA*, majd e mellé az *MAB* háromszöget. Ugyanakkor az oldalélek kifejtésében megállapítjuk a síkmetszet csúcspontjainak helyét azáltal, hogy az egyes oldaléleken azon távolságok valódi nagyságát szerkesztjük meg, mely távolságok egy-egy végpontja a síkmetszet poligon egy-egy csúcspontja, a másik végpont közös, ez a gúla csúcspontja. Az oldallapokból készített hálózatot még kiegészítjük azáltal, hogy valamelyik kifejtett alapél mellé lemásoljuk a vezérpoligont, továbbá valamely kifejtett födőlapél mellé lemásoljuk a síkmetszet valódi nagyságát, de mindkét esetben arra ügyelünk, hogy a hálózat zárásánál az egynevű pontok azonos pontok legyenek.



138 *b.* ábra.

131. §. Hasáb hálózata. A 92. ábrában (99. old.) két, az első képsíkon álló hasáb áthatását szerkesztettük meg. A 139. ábrában látható hasáb az áthatásban szereplő háromoldalú hasáb az áthatás közös testrészének elhagyásával. Szerkesszük meg e hasáb és az áthatási poligon kifejtését. A hasáb oldallapjainak hálózata egymás mellé illesztett parallelogrammákból áll, a kifejtett oldalélek parallel egyenesek, ha a kifejtett oldallapokat az oldalélek mentén kapcsoljuk egymáshoz. A kifejtett oldalélek viszonylagos helyzetét jellemzi két-két szomszédos oldalél távolsága. Két szomszédos oldalél távol-

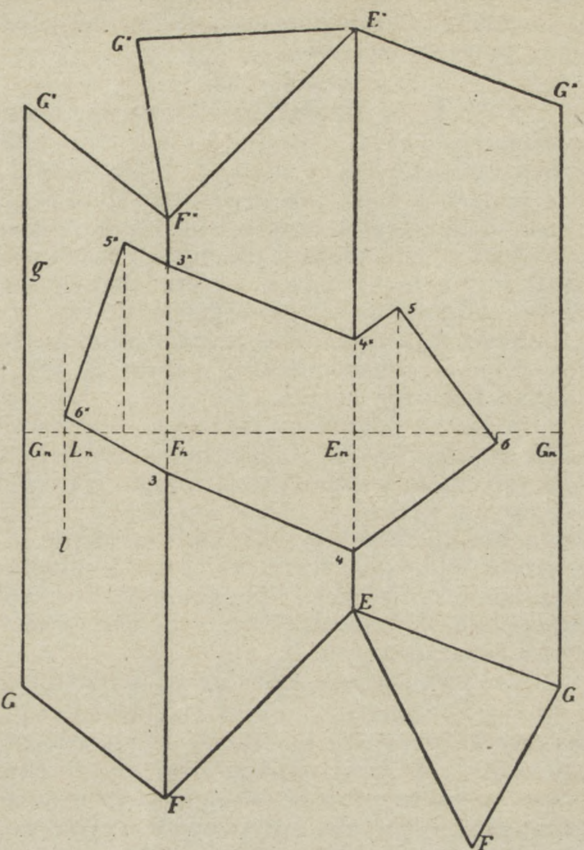


139. ábra.

sága az oldalélekre illeszkedő ama pontok távolsága, mely pontokban az oldaléleket ez élekre merőleges sík metszi, tehát az összes szomszédos oldalélek távolságait nyerjük, ha a hasábot az oldalélekre merőleges **N** síkkal metsszük és a síkmetszet oldalainak valódi nagyságát megszerkesztjük. A hasáb oldaléleire merőleges síkkal való síkmetszete a hasáb egy normálmetszete. Egy hasáb normálmetszetének kifejtése egy egyenesbe esik, az élek kifejtésére merőleges egyenesbe, mert a normálmetszet egy oldala a térben a hasáb oldalélére merőleges. A normálmetszet valódi alakjának meghatározása végett a hasábot és a normálmetszősíkot transzformáljuk úgy, hogy a normálmetszősík az új képsíkra nézve vetítősík legyen, ugyanakkor az új képsík a hasáb alkotóival parallel sík lesz, tehát a negyedik képsíkon az alkotókon fekvő minden távolság valódi nagyságban látszik. A normálmetszet csúcspontjainak negyedik képei az **N** sík negyedik nyomvonalának a hasáb oldaléleinek negyedik képeivel való metszéspontok. E pontokat az **N** sík első nyomvonala körül az első képsíkba forgatjuk, egy leforgatott pont a pontra illeszkedő oldalél első képére illeszkedő pont lesz, mert a leforgatott pont mindig illeszkedik a pont első képére illeszkedő és a sík első nyomvonalára merőleges egyenesre, már pedig a jelen esetben ez az egyenes az oldalél első képe. A leforgatott pontnak az **N** sík első nyomvonalától való távolságát az **N** sík negyedik nyomvonalán közvetlenül lemérhetjük, e távolság a sík új tengelypontjának távolsága a kérdéses pont negyedik képétől. Az ábrában a normálmetszet valódi nagysága az $(E_n)\,(F_n)\,(G_n)$ háromszög. E háromszög oldalait rendre egymásután egy egyenesre felrakjuk, így nyerjük a 140. ábrában a G_n, F_n és E_n pontok kifejtését, ha a hasáb oldallapjaiból összetett felületrészt a g él mentén történt felhasítás után a rajzlap síkjába kifejtettnek gondoljuk. Az egyes oldalélek kifejtése a kifejtett normálmetszet csúcspontokon átmenő és a kifejtett normálmetszet egyenesére merőleges egyenesek. A kifejtésben a g él végpontjait úgy nyerjük, hogy a $\overline{G_nG}$ és $\overline{G_nG^x}$ távolságokat a g él kifejtésére a kifejtett G_n ponttól számítva felrakjuk. E távolságok valódi nagyságai a g él negyedik képében közvetlenül lemérhetők. A távolságok felrakásánál természetesen a pontok térbeli viszonylagos helyzetét figyelembe kell venni. Hasonlóan nyerjük az F, E, ill. F^x, E^x pontok kifejtését. Az oldallapok kifejtéséhez hozzácsatoljuk az alaplap és födőlap kifejtését.

Amennyiben az áthatási poligon csúcspontjait kívánjuk nyerni a kifejtésben, úgy e pontokra illeszkedő alkotók kifejtését kell megállapítani. Az ábrában a 6^x pont kifejtésének szerkesztését mutattuk be. Legyen a 6^x ponton átmenő alkotó l, ez az alkotó a GF oldallap egy alkotója, ha első képét kellően meghosszabbítjuk, úgy a normálmetszet leforgatásában az (L_n) pont az l alkotó és **N** sík metszéspontjának leforgatottja. Ha a $(G_n)\,(L_n)$ távolságot a normálmetszet kifejtésében a G_n ponttól számítva felmérjük és e pontban a normálmetszet kifejtésére merőlegest állítunk, úgy ez lesz az l alkotó kifejtése. Az alkotón az áthatási poligon csúcspontjának kifejtését ugyanúgy nyerjük, mint előbb az oldalélek végpontjainak kifejtését.

Kiegészítésképpen megjegyezzük, hogyha egy, pl. az első képsíkon álló hasáb síkmetszetének valódi nagyságát akarjuk meghatározni, akkor e síkmetszetnek az első képsíkba forgatottja az eredeti síkmetszetnek ferde parallel projekciója, a projiciáló sugár iránya a sík és első képsík szögfelező síkjára merőleges egyenes. De ugyanakkor a hasáb vezérpoligonja az első képsíkban szintén az eredeti síkmetszet ferde parallel képe az első képsíkon, a vetítés iránya a hasáb alkotója. Mivel a vezérpoligon és a síkmetszet leforgatottja az eredeti síkmetszet egy-egy ferde képe ugyanazon a síkon, a két alakzat egy axiális affinitásban megfelelő alakzatok. Az affinitás tengelye a metsző sík első nyomvonala, mert ez egyenes minden pontja önmagának megfelelő, az affinitás iránya ama sík első nyomvonala, mely sík végtelenben fekvő egyenesének egyik pontja a hasáb alkotóinak közös végtelenben fekvő pontja, másik pontja a metsző sík képsíkszögét felező síkra merőleges egyenes végtelenben fekvő pontja. Tehát egy hasáb fenti helyzete mellett a síkmetszet valódi nagyságát úgy fogjuk megszerkeszteni, hogy a síkmetszet egy csúcspontjának megkeressük a két képét, majd ezt a pontot a metsző sík első nyomvonala körül az első képsíkba forgatjuk a szokott módon, a leforgatott pont és az eredeti pontra illeszkedő hasábél első nyompontja megfelelő pontok a tárgyalt axiális affinitásban. E meghatározott affinitásban a vezérpoligon megfelelője a síkmetszet leforgatottja.



140. ábra.

Szabályos poliederek.

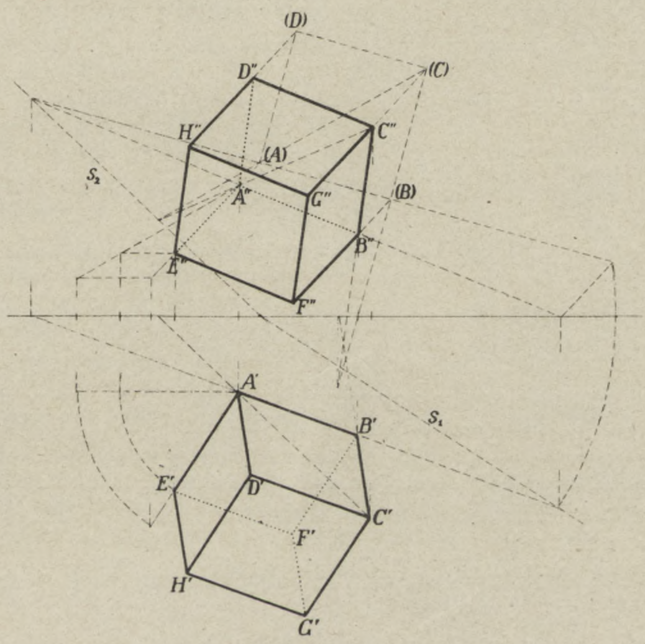
Visszapillantást vetve az orthogonális parallel projekcióban két képsíkon tárgyalt feladatokra, mondhatjuk, hogy úgy a térelemekre, mint a síklapú alakzatokra vonatkozó oly feladatokat oldottunk meg, melyekben főképen a térelemek, ill. síklapú alakzatok ismeretes képeiből pusztán e *képek által már meghatározott elemek, ill. alakzatok szerkesztése* szerepelt. Geometriai ismereteink némi kiegészítése után azokat a feladatokat fogjuk megoldani, melyekben térelemnek, síkalakzatnak, poliedernek képeit kell megszerkeszteni különösképpen adott vagy ismeretes, vagy még csak meghatározandó *metrikus relációk* alapján. Ilyen feladat pl. egy metrikus szempontból meghatározott polieder két képének szerkesztése, ha a polieder viszonylagos helyzete mindkét képsíkkal szemben adott. Ide tartoznak e fejezetben tárgyalandó szabályos poliederek ábrázolásai is. Szabályos poliedert csak akkor ábrázolhatunk, ha *a)* kimutatjuk exisztenciáját, *b)* megállapítjuk tulajdonságait és *c)* a két képsíkkal szemben viszonylagos helyzete ismeretes.

132. §. A szabályos hexaeder vagy kocka. A kocka exisztenciáját avval mutatjuk ki, hogy megszerkesztjük. Felveszünk a térben egy tetszőleges síkot, e síkban rajzolt négyzet csúcspontjaira illeszkedően a síkra merőlegeseket állítunk, e merőlegesekre rendre felmérjük a négyzet csúcspontjaitól számítva ugyanazon értelemben a négyzet oldalhosszát, a nyert végpontok megint egy négyzet csúcspontjai; e négyzet oldalai, az eredeti négyzet oldalai és a négyzet síkjára állított merőleges egyenesek egy szabályos polieder élei. A polieder hat egybevágó négyzet által határolt síklapú test, melynek minden csúcspontjában három él fut össze, minden élszöge, minden lapszöge derékszög.

A kocka négy-négy éle egymással parallel, a négy élből kettő-kettő szemköztfekvő. A határlapok közül kettő-kettő parallel síkokban van, ezek szemköztfekvő lapok. Három lap közös csúcspontjával szemköztfekvő a többi lap közös csúcspontja. Szemköztfekvő lapok középpontjainak összekötő egyenese a kocka egy laptengelye, a három laptengely közül kettő-kettő mindig merőleges egymásra. Szemköztfekvő élek középpontjainak összekötő egyenesei a kocka éltengelyei és szemköztfekvő csúcspontokra illeszkedő egyenesek a kocka csúcstengelyei.

Legyen a kocka élhossza a, a határoló négyzetek diagonálisa b és egy csúcstengely hossza c, akkor $b = a\sqrt{2}$, $c = a\sqrt{3}$. Egy csúcstengely végpontjaira illeszkedő élek a csúcstengellyel egyenlő szöget zárnak be, mert minden szög oly derékszögű háromszög egyik szöge, mely háromszög átfogója a csúcstengely és a szög melletti befogója a kocka éle. Egy csúcstengelyre nem illeszkedő él a csúcstengellyel ugyanazt a szöget alkotja, mint a csúcstengelyre illeszkedő él, mert minden ilyen él a csúcstengelyre illeszkedő valamely kockaéllel parallel. A csúcstengely az összes kockalapokkal ugyanazt a szöget alkotja, mert minden ilyen szög oly derékszögű háromszög egy szöge, melyben e szög melletti befogó b, az átfogó c. A csúcstengely egyik végpontjából annak másik végpontjába úgy juthatunk, hogy egy mozgó ponttal három különböző irányú él mentén haladunk. Ilyen három él törtvonalat állapít meg, e törtvonalnak orthogonális projekciója a végpontokat összekötő csúcstengelyre maga a csúcstengely, a törtvonal minden egyes darabjának képhossza a csúcstengelyen a csúcstengely harmadrésze, mert a kocka élei és az éleknek a tengellyel alkotott szögei egyenlők. A laptengelyek, csúcstengelyek és éltengelyek közös pontja a kocka középpontja. A középpont távolsága egy laptól $\frac{a}{2}$, egy csúcstól $\frac{c}{2}$, egy éltől $\frac{b}{2}$.

133. §. A kocka ábrázolása. 1. *Szerkesztessék egy mindkét képsíkkal szemben általános helyzetű kocka.* Legyen a kocka egy határlapjának síkja az $\mathbf{S}(s_1, s_2)$ feszített sík, e síkban kell szerkeszteni egy négyzetet. (141. ábra.) E végett gondoljuk a síkot második nyomvonala körül a második képsíkba forgatva, leforgatásban megrajzoljuk az $ABCD$ négyzetet és felállítjuk, így nyerjük a kocka A, B, C, D csúcspontjainak első és második képeit. E pontokon át a síkra merőlegeseket állítunk és az A pontra illeszkedő egyenesre felrakjuk a kocka élhosszát, e felmérést úgy végeztük a rajzban, hogy az egyenest az A pontra illeszkedő első tengely körül a második képsíkkal parallel helyzetbe forgattuk. Így nyerjük az E pontot. Ha az első projekcióban az $\overline{AE}$ él képhosszát a síkra merőleges egyenesek első képeire AE értelemben felrakjuk és hasonlóan járunk el a második projekcióban, akkor az F, G, H csúcspontok első és második képeit szerkesztettük meg. A nyert csúcspontok alapján megrajzol-

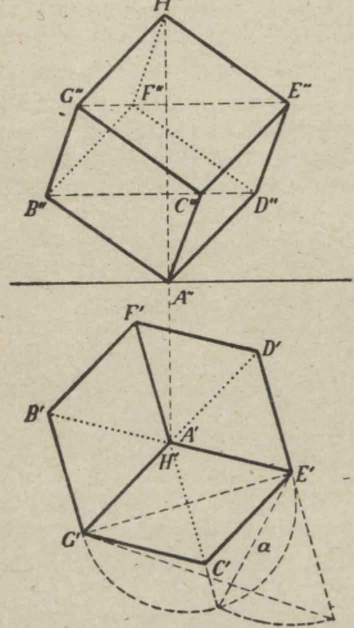


141. ábra.

hatjuk a kocka első és második képét, egy-egy projekcióban a látható éleket teljes, a nem látható éleket pontozva rajzoljuk.

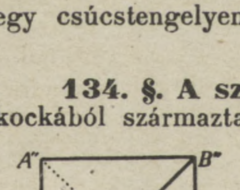
2. *Szerkesztessék oly kocka két képe, melynek egy csúcstengelye az első képsíkra merőleges.* Legyenek az első képsíkra merőleges csúcstengely végpontjai A és H, és legyen az A pont az első képsíkra illeszkedő pont. Az A pontból kiinduló élek végpontjai legyenek rendre B, C és D, e pontok vetületi pontjai a csúcstengelyen azonos pontok, tehát e három pont összekötő síkja az első képsíkkal parallel sík, e három pont által meghatározott háromszög egyenlőoldalú háromszög, egy oldal hossza egy kockalap diagonálisa. A kocka első képének szerkesztését a most megállapított tulajdonságú háromszög első képének rajzolásával kezdjük. (142. ábra.) A háromszög első képe szabályos háromszög, egy oldala $a\sqrt{2}$. Amennyiben a kocka élének valódi nagysága ismeretes, úgy $a\sqrt{2}$ egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogója, melynek befogója a. A háromszög

képének középpontja az A csúcs első képe, mert az A csúcsból kiinduló három él képhossza egyenlő, t. i. a három, térben egyenlő él az első képsíkkal ugyanazt a szöget alkotja, a csúcstengellyel bezárt szög pótszögét. A kocka H csúcspontjából kiinduló élek végpontjai szintén szabályos háromszög csúcspontjai. E háromszög első képe az előbbi háromszög első képével egybevágó háromszög, az első projekcióban a két háromszög koncentrikus, de az egyik a másikkal szemben 180°-kal van elforgatva, mert az A és H csúcspontból kiinduló élek közül kettő-kettő parallel és ellenkező irányú. A jelen esetben a kocka megrajzolt első képéből megállapíthatjuk, hogy első képkörrajza szabályos hatszög. A hatszög egy oldala, vagyis köréje írt körének sugara ama derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasság, melynek oldalai rendre: a, $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$. A kocka második képének szerkesztésénél kiindulunk az A és H pontok második képeiből. Az AH egyenes első vetítősugár, tehát második képe megrajzolható, az A pont második képe az x_{12} tengely pontja, a H pont második rendezője a csúcstengellyel egyenlő, tehát $a\sqrt{3}$. A második projekcióban a hiányzó hat csúcspontból három-három egy-egy az x_{12} tengellyel parallel egyenesen van, a két parallel egyenes az $A''H''$ távolságot három egyenlő részre osztja, mert egy élnek egy csúcstengelyen lévő orthogonális vetületének hossza $\frac{a}{3}\sqrt{3}$.



142. ábra.

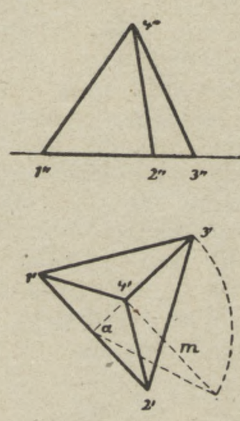
134. §. A szabályos tetraeder. A szabályos tetraedert a kockából származtathatjuk. Vegyünk fel egy kockát úgy, hogy két-két lapja az első, illetőleg második, illetőleg harmadik képsíkkal parallel helyzetben legyen. A kocka ilyen helyzete mellett beszélhetünk alaplapról, födőlapról, homloklapokról és oldallapokról. A födőlap egy átlójának és az alaplap az előbbi átlóra merőleges átlójának két-két végpontja egy szabályos tetraeder négy csúcspontja. (143. ábra.) E szerint a tetraeder határolva van négy egybevágó szabályos háromszöggel, van négy csúcspontja és hat éle, egy csúcsban három él fut össze. Lappal szemben csúcs, éllel szemben rája merőleges él fekszik. Ha a kocka éle a, akkor a tetraeder éle $a\sqrt{2}$. A kocka laptengelyei a tetraeder éltengelyei, két szemközt fekvő él távolsága szintén a. A kocka



143. ábra.

csúcstengelyei a tetraeder magasság vonalai. A tetraeder magassága $\frac{2a}{3}\sqrt{3}$. A kocka középpontja a tetraeder középpontja, vagy magasságpontja. A középpontnak a távolsága egy csúcsponttól $\frac{a}{2}\sqrt{3}$, egy tetraederlaptól $\frac{a}{6}\sqrt{3}$.

135. §. A szabályos tetraeder ábrázolása. 1. *Szerkesztessék egy tetraeder, melynek egyik lapja az első képsíkban van.* Legyen egy az első képsíkban rajzolt szabályos haromszög a tetraeder egyik határoló háromszöge, ekkor már ismerjük a tetraeder három csúcspontját mindkét projekcióban, ezek 1(1′, 1″), 2(2′, 2″), 3(3′, 3″). (144. ábra.) A tetraeder negyedik csúcspontjának első képe a már rajzolt háromszög középpontja, mert e csúcsban összefutó három él képhossza egyenlő, t. i. ezek az élek az első képsíkra merőleges tetraeder magassággal egyenlő szöget alkotnak és egy-egy ilyen él végpontja az első képsíkban fekvő háromszög egy-egy csúcspontja. Ha a tetraeder 124 háromszögét az 12 körül az első képsíkba forgatjuk, akkor a 4 pont leforgatottja a 3 ponttal azonos pont lesz. Ennek figyelembe vételével megszerkeszthető a 4 pontnak első távolsága, e távolság egy derékszögű háromszög egyik befogója, melynek átfogója egy határlap magassága, a rajzban 3′ pontnak az 1′2′ egyenestől való távolsága, másik befogója pedig a 4′ pontnak az 1′2′ egyenestől való távolsága. E derékszögű háromszögnek a keresett befogóval szemköztfekvő szöge a tetraeder egy lapszöge. A tetraeder második képének szerkesztése, mivel minden csúcspontjának első távolságát ismerjük, most már elvégezhető

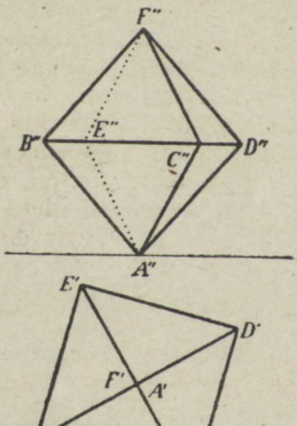


144. ábra.

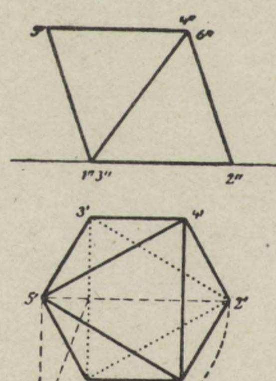
Amennyiben a tetraedert a két képsíkkal szemben általános helyzetben kívánjuk ábrázolni, úgy felveszünk egy síkot mindkét képsíkkal szemben általános helyzetben, e síkban szerkesztünk szabályos háromszöget, a háromszög középpontján át a síkra merőlegest állítunk és e merőlegesre felmérjük a középponttól számítva a tetraeder magasságát.

136. §. A szabályos oktaeder. A szabályos oktaedert a kockából származtatjuk. A kocka egy csúcspontjában összefutó három lapjának középpontjai szabályos háromszög csúcspontjai, e háromszög az előállítandó szabályos oktaeder egy határoló háromszöge. A kockalapok középpontjaiból ilyen módon nyert háromszögek egybevágó szabályos háromszögek. Az oktaeder e szerint határolva van nyolc egybevágó szabályos háromszöggel, van hat csúcspontja és tizenkét éle. Az oktaeder egy élének hossza egyenlő a kocka határlapdiagonálisának felével. Az oktaeder három csúcstengelye kölcsönösen egymásra merőleges, egy csúcstengely a származtatásnál felhasznált kocka élével egyenlő. Két csúcstengely összekötő síkja az oktaeder négy élét tartalmazza, a négy él négyzetet alkot, e négyzet síkja az oktaedert két négyoldalú szabályos gúlára bontja, melynek magassága az alapnégyzet féldiagonálisa. Az eredeti kocka csúcstengelye az oktaeder laptengelye. Az oktaeder egy laptengelyének hossza a kocka csúcstengelyének harmadrésze. A hexaeder középpontja az oktaeder középpontja.

137. §. Az oktaeder ábrázolása. 1. *Szerkesztessék az első képsíkra merőleges csúcstengelyű oktaeder.* Oktaedert, melynek csúcstengelye az első képsíkra merőleges, úgy szerkesztünk, hogy a másik két tengely összekötő síkjában fekvő ama négyzetének első képét szerkesztjük, melyet e síkban fekvő oktaederélek alkotnak. E négyzet első képe valódi nagyságban látszik, mert síkja az első képsíkkal parallel. Legyen e négyzet első képe $B'C'D'E'$. (145. ábra.) Az oktaeder AF csúcstengelyének első képe az első képsíkban rajzolt négyzet középpontja, tehát e pont az oktaeder hiányzó két csúcspontjának első képe. Az oktaeder második képének szerkesztésénél mindenekelőtt megrajzoljuk az A és F pontnak a második képét. Ha az oktaeder A csúcspontja az első képsíkra illeszkedő pont, úgy e pont második képe az A' pontra illeszkedő rendező és az x_{12} tengely metszéspontja. Az F csúcspont második képét megszerkeszthetjük, ha ismerjük a csúcstengely valódi hosszát, ezt az oktaeder első képében közvetlenül lemérhetjük, mert az oktaeder összes csúcstengelyei egyenlők. Az első projekcióban $C'E'$ vagy $B'D'$ a csúcstengely valódi hossza, mindkettő a térben az első képsíkkal parallel. A megszerkesztett F'' pont után a hiányzó csúcspontok második képeit úgy nyerjük, hogy az $\overline{A''F''}$ távolságot merőlegesen felezzük és az így nyert x_{12} tengellyel parallel egyenesre a keresett pontok első képeit felvetítjük.



145. ábra.


146. ábra.

Amennyiben mindkét képsíkkal szemben általános helyzetű oktaedert akarunk ábrázolni, úgy az előzők alapján a következőképpen járunk el: Felveszünk egy általános helyzetű síkot, e síkban szerkesztünk négyzetet, a négyzet középpontján át a síkra merőlegest állítunk és e merőlegesre a középponttól számítva felmérjük a négyzet diagonálisának felét mindkét értelemben, e két pont és a négyzet négy csúcspontja az oktaeder csúcspontjai.

2. *Szerkesztessék egy lapjával az első képsíkra állított oktaeder két képe.* Az oktaeder ismeretes élhossza alapján szerkesztünk az első képsíkban szabályos háromszöget, melynek oldala az adott élhossz. (146. ábra.) Az oktaeder származtatása alapján mondhatjuk,

hogy laptengelye merőleges az oktaeder ama két lapjára, mely két lap középpontjainak összekötő egyenese a laptengely. E szerint az első képsíkban rajzolt szabályos háromszög középpontja az első képsíkra merőleges laptengely első képe. Mivel minden laptengely az oktaeder középpontjára illeszkedő egyenes, az első képsíkban rajzolt szabályos háromszög középpontja az oktaeder középpontjának első képe. E megjegyzés alapján megrajzolhatjuk az oktaeder csúcstengelyeinek első képeit, ezek az 1'O', 2'O', 3'O' egyenesek. Minden csúcstengelynek felezési pontja az oktaeder középpontja és távolság felezési pontjának vetülete a távolság képének felezési pontja, ebből következik, hogy a 4, 5, 6 oktaeder csúcspontok első képei és az 1, 2, 3 csúcspontok első képei egy szabályos hatszög csúcspontjai. Tehát az első képsíkra merőleges laptengelyű oktaeder első képkörrajza szabályos hatszög. Az oktaeder második képének szerkesztésére csak a laptengely valódi hosszát kell ismerni, mert az oktaeder csúcspontjai részben az első képsíkban, részben az első képsíkkal parallel síkban vannak, a két sík távolsága a laptengely. A laptengely hosszának szerkesztése végett gondoljuk az 135 háromszöget síkjának első nyomvonala körül az első képsíkba forgatva, akkor ennek beforgatottja az 1'2'3' háromszög, az 5 pont leforgatottja a 2 pont, tehát az 5 pontnak második rendezője annak a derékszögű háromszögnek egyik befogója, melynek átfogója egy határoló háromszög magassága és másik befogója az 5' pontnak az 1'3' egyenestől való távolsága. Mivel a 25 csúcstengely a második képsíkkal parallel, az 5 pont második képét még úgyis szerkeszthetjük meg, hogy megállapítjuk a csúcstengely valódi hosszát, e hossz, mint láttuk, egy egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogója, melynek befogója az oktaeder élhossza. A megszerkesztett csúcstengelyhosszal a 2'' pont körül körívet rajzolunk, ahol e körív az 5 pont rendezőjét metszi, ott nyerjük az 5 pont második képét. Még egy módon nyerhetjük az 5, illetőleg 6 pont második rendezőjét. T. i. az 1, 3, 4, 6 pontok a térben egy négyzetnek csúcspontjai, e négyzetnek két oldala a második képsíkkal parallel, tehát 16, illetőleg 34 él a második képben valódi nagyságban látszik, vagyis ha az oktaeder élhosszával az 1 pont második képe körül körívet rajzolunk, úgy e körív a 4 pont rendezőjét a 4 pont második képében metszi.

Az oktaeder második képe a felvett helyzet mellett mutatja az oktaeder képét, ha annak éltengelye a képsíkra merőleges. Ekkor, amint az az ábrából közvetlenül leolvasható, az oktaeder második képkörrajza rhombus, melynek egyik átlója az oktaeder élhossza, másik átlója az oktaeder csúcstengelye.

A további szabályos poliederek tárgyalása előtt megemlítjük az eddig tárgyalt szabályos testek nevezetes síkmetszeteit. A tetraedernek három síkmetszete négyzet, a négyzetsíkmetszet síkja a tetraeder középpontjára illeszkedő és két kitérő éllel parallel sík. Ilyen sík a kitérő élekre illeszkedő összes éleket felezi. A kocka esetében a kocka középpontjára illeszkedő és egy csúcstengelyre merőleges sík síkmetszete szabályos hatszög, ez közvetlenül belátható, ha a 142. ábrában a középpontra illeszkedő és az első képsíkkal parallel síkkal metszük a hexaedert. A szabályos hatszög egy-egy csúcspontja egy-egy kockaél felezési pontja. Az oktaeder esetében is nyerhetünk szabályos hatszögmetszetet. Az oktaeder laptengelyét merőlegesen felező sík az oktaedert szabályos hatszögben metszi, erről legkönnyebben a 146. ábra felhasználásával győződhetünk meg, ha a metsző síkot a középpontra illeszkedően az első képsíkkal parallel helyzetben vesszük fel.

138. §. A szabályos dodekaeder. A szabályos dodekaeder exisztenciájának kimutatását segédtételek előrebocsátásával fogjuk előkészíteni.

a) Látni fogjuk, hogy a szabályos dodekaeder egybevágó szabályos ötszögekkel határolt polieder, azért itt megemlítjük a szabályos ötszög ama tulajdonságait, melyekre a dodekaeder ábrázolásánál szükségünk lesz.

A szabályos ötszögnek van öt egyenlő diagonálisa. Legyen az ötszög egy oldala a, diagonálisa d. Egy diagonális az ötszöget két részre osztja, az egyik rész egyenlőszárú trapez, a másik rész egyenlőszárú háromszög. Az egyenlőszárú trapez húrnégyszög. Minden húrnégyszögben az átlók szorzata egyenlő a szemköztfekvő oldalak szorzatainak összegével, tehát a jelen esetben

$$d^2 = a^2 + ad.$$

Ez az összefüggés lehetővé teszi az oldalból az átlónak, illetőleg az átlóból az oldalnak szerkesztését, mert

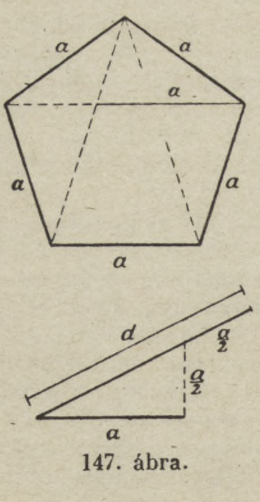
$$d = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5}),$$

$$a = -\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + a^2} = \frac{d}{2}(-1 + \sqrt{5}).$$

Fenti összefüggésben lévő távolságokról azt szoktuk mondani, hogy az egyik távolság a másiknak aranymetszete.

Minden szabályos ötszögben egy átló a szabályos ötszög egy oldalával parallel. Átló és vele parallel oldal egymástól való távolsága

$$m = a \cos 18° = \frac{a}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

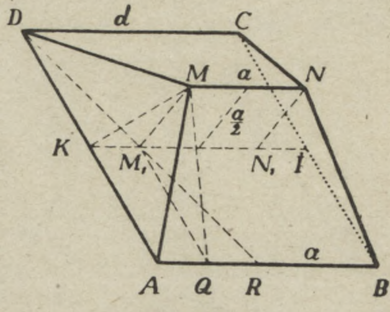


147. ábra.

Még megemlítjük, hogy az ötszög egy átlója az ötszög egy másik átlóját két szegmentumra bontja, e szegmentumok közül az egyik az ötszög oldalával egyenlő.

Adott oldalból szabályos ötszöget úgy szerkesztünk, hogy megszerkesztve (147. ábra) az ötszög diagonálisát, az ötszögoldalból és diagonálisból rajzolunk egyenlőszárú háromszöget, melynek alapja az ötszög oldal. Az egyenlőszárú háromszög csúcspontja a szabályos ötszögnek az alappal szemköztfekvő csúcspontja, a hiányzó csúcspontokat egyenlőszárú háromszögek szerkesztésével nyerjük.

b) A szabályos ötszög tulajdonságai alapján oly prizmatoid sajátosságait fogjuk megállapítani, melynek minden éle a szabályos ötszög valamely alkatrészével egyenlő. A tárgyalandó prizmatoid alaplapja négyzet, a négyzet egy oldala a szabályos ötszög diagonálisa. A prizmatoid födőlapja helyett egyenest választunk, az egyenes az alapsíkkal parallel, tőle $\frac{a}{2}$ távolságban van (a a szabályos ötszög egy oldala), az egyenes orthogonális vetülete az alapsíkon a négyzet szemköztfekvő oldalait felező egyenes, az egyenesen lévő prizmatoid élhossza a és felezési pontjának vetülete az alapsíkon a négyzet középpontja. Az így szerkesztett prizmatoidél két végpontja legyen M és N. Az alapnégyzet négy csúcspontja A, B, C, D, továbbá M és N kimerítik a prizmatoid csúcspontjait. A prizmatoid e szerkesztéséből következik, hogy az MN élben találkozó két oldallap egybevágó egyenlőszárú trapéz, a további két oldallap egybevágó egyenlőszárú háromszög.



148. ábra.

1. Kimutatjuk, hogy az M és N csúcspontokban összefutó prizmatoidélek élhossza a. A 148. ábrában az előbbi utasítások szerint megrajzoltuk a prizmatoid egy képét, ahol KI az alapnégyzet oldalfelezője, M_1N_1 az MN él vetülete, Q az M_1 vetülete az AB egyenesen, R pont az AB egyenesen a B ponttól a távolságban fekvő pont. E jelölések szerint

$$\overline{MA}^2 = \overline{MM_1}^2 + \overline{M_1A}^2 = \overline{MM_1}^2 + \overline{M_1K}^2 + \overline{KA}^2 =$$
$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2} - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = a^2,$$

ha d-t helyettesítjük a-ban kifejezett értékével.

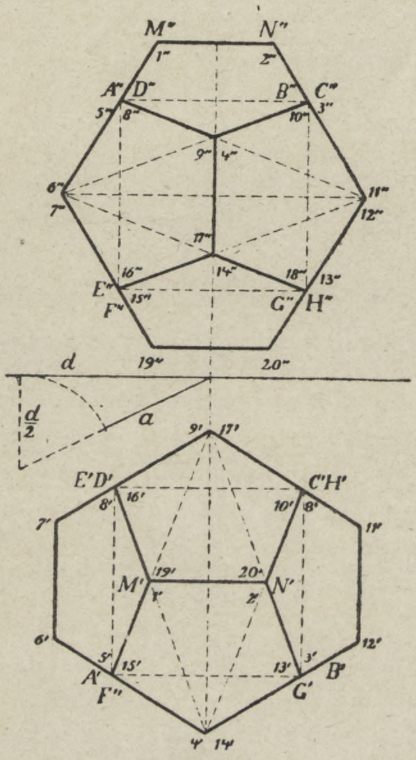
Evvel bebizonyítottuk, hogy az MA oldalélben összefutó két lap közül az egyik a d átlójú szabályos ötszög átlós metszetével nyert trapézzel, a másik ugyanazon szabályos ötszög átlós metszetével nyert háromszöggel kongruens. Szóval, ha az MA élben összefutó oldallapokat egy síkban úgy illesztjük össze, hogy $AD \equiv AB$, akkor a két alakzat együttvéve szabályos ötszöget alkot.

2. Az MA élben összefutó oldallapok a prizmatoid alaplapjával bezárt szögek közül az egyik az MQM_1 derékszögű háromszögben a Q mellett fekvő szög, a másik az MKM_1 derékszögű háromszögben a K mellett fekvő szög. Ha e szögek tangenseinek szorzatát alkotjuk, e szorzatból kitűnik, hogy e szögek pótszögek.

3. Az MR egyenes, amennyiben az $AMNB$ trapezt egy háromszöggel szabályos ötszöggé kiegészítjük, az ötszög egy átlója. Bebizonyítjuk, hogy az MD oldalél és az MR átló merőleges vetülete az alapsíkon egy egyenesbe esik. Mert M_1 a DR egyenesre illeszkedő pont. T. i.

$$\triangle\, DKM_1 \sim \triangle\, DAR.$$

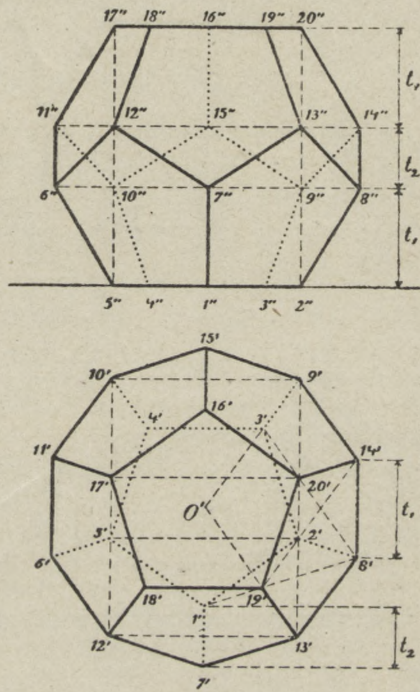
Az előre bocsátott tételek alapján szabályos dodekaedert úgy állítunk elő, hogy egy kocka minden egyes lapjára állítunk a kocka oldallapjával egybevágó alaplapú olyan prizmatoidot, mint amilyen prizmatoidot *b)* alatt szerkesztettünk. Legyen a kocka egy-egy lapja az első, illetőleg második képsíkkal parallel. A kocka *ABCD* födőlapjára helyezett prizmatoid csúcspontjai *A, B, C, D, M, N.* (149. ábra.) A kocka oldallapjaira illesztett prizmatoidokat úgy helyezzük el, hogy az *MN* élnek megfelelő él mindig kitérő helyzetben legyen a födőlapra illesztett prizmatoid *MN* élével, míg az alaplapra illesztett prizmatoid *MN* éle a födőlapra illesztett prizmatoid *MN* élével legyen parallel. Ilyen módon a prizmatoid egy oldallap háromszögéhez csatlakozik az alapél mentén egy másik prizmatoid oldallaptrapeze és megfordítva. A kocka egy élében csatlakozó háromszög és trapéz egy síkban fekvő alakzatok, mert ez alakzatok síkjainak szögei az élben találkozó kockalapokkal, *b. 2.)* szerint pótszögek és a kocka lapszöge 90°. E szerint a kocka minden élére illeszkedik egy sík, a 12 sík által határolt polieder a szabályos dodekaeder. A szabályos dodekaeder határolva van 12 egybevágó szabályos ötszöggel, van 20 csúcsa, minden csúcsban három él fut össze, éleinek száma 30. A dodekaeder származtatása alapján mondhatjuk, hogy szemköztfekvő élei, szemköztfekvő lapjai parallelek. A dodekaeder előállításánál használt kocka, röviden a dodekaederbe írt kocka, éle egy-egy oldallapötszög diagonálisa, ebből következik, hogy minden dodekaedernek van 5 beírt kockája. A beírt kockák laptengelyei a dodekaederre nézve éltengelyek, a kockák csúcstengelyei a dodekaeder csúcstengelyei, a kockák közös középpontja a dodekaeder középpontja.



149. ábra.

139. §. A szabályos dodekaeder ábrázolása. 1. *Szerkesztessék meg a dodekaeder képe éltengelyre merőleges képsíkon.* A dodekaeder előállításának követhetőségére nyujtott 149. ábra a szerkesztés minden részletére ad felvilágosítást. Mindenekelőtt szerkesztünk a dodekaeder adott élhosszával szabályos ötszöget, az ötszög diagonálisa a beírt kocka élhossza. Egy beírt kockát úgy helyezünk el, hogy egy lapja avval a képsíkkal legyen parallel, melyre merőleges éltengelyű dodekaedert kívánunk ábrázolni. A szerkesztés további részletezése mellőzhető, még csak azt jegyezzük meg, hogy a 149. ábrában *b. 3.)* szerint 8', 1', 4' pontok egy egyenesre illeszkedő pontok

2. *Szerkesztessék meg a dodekaeder első és második képe, ha a dodekaeder egyik lapja az első képsíkban van.* Megrajzoljuk az első képsíkban fekvő szabályos ötszöget, mely valódi nagyságban látszik, (150. ábra.) Az ötszög középpontja a dodekaeder középpontjának első képe O', e szerint az alapötszög csúcspontjaira illeszkedő csúcstengelyek első képei megrajzolhatók, ilyen csúcstengely hiányzó végpontjának első képe O' ponttól ugyanakkora távolságban van, mint az alapsokszög egy csúcspontjának távolsága az O' ponttól. Az alapötszög és az első képsíkkal parallel helyzetű síkban fekvő határoló ötszög csúcspontjainak első képei egy szabályos tízszög csúcspontjai. Az alapötszög 1, 2 és 2, 3 éléhez csatlakozik egy-egy szabályos ötszög. Gondoljuk az első ötszöget az 1, 2 él körül, a második ötszöget a 2, 3 él körül az első képsíkba forgatva és legyen a 2 ponton átmenő, de még megszerkesztendő harmadik él végpontja a 8 pont, akkor e pont leforgatottja az első ötszög leforgatása után a 3′ ponttal, a második ötszög leforgatása után az 1′ ponttal azonos pont lesz. A 8 pont mindkét ötszög leforgatásánál egy-egy kört ír le, e körök első képei egyenesek, az egyik egyenes a 3′ pontra illeszkedő és 1′2′ egyenesre merőleges, a másik egyenes az 1′ pontra illeszkedő és 2′3′ egyenesre merőleges, a két egyenes metszéspontja a 8 pont első képe, 8′. Hasonlóan járhatunk el az összes hiányzó csúcspontok első képeinek szerkesztésénél, így azt nyerjük, hogy a dodekaeder hiányzó csúcspontjainak első képei szintén egy szabályos tízszög csúcspontjai. A két tízszög perspektív helyzetben van, a perspektivitás centruma az O' pont. Ezek alapján a dodekaeder egész első képe megrajzolható. Az első projekcióban szereplő két tízszög köré rajzolt körsugarak összefüggésének megállapítása végett vegyük tekintetbe a csúcspontoknak az ábrában feltüntetett számozása mellett az O', 19′, 14′, 9′ és O', 13′, 8′, 3′ csúcspontú parallelogrammákat. Ekkor $\overline{O'19'}=\overline{9'14'}$ és $\overline{O'13'}=\overline{3'8'}$ vagyis a belső kör sugara, $O'3'$, illetőleg külső kör sugara, $O'9'$, a 2′3′9′14′8′ ötszög egy oldala, illetőleg ugyanazon ötszögnek az előbb említett oldallal parallel átlója. A térben az oldal az átlónak aranymetszete és mivel e távolságok parallel egyeneseken vannak és parallel vetítésnél e reláció nem változik, mondhatjuk, hogy a körsugarak közül az egyik a másiknak aranymetszete.



150. ábra.

A dodekaeder első képének szerkesztéséből egyúttal az is kitűnik, hogy öt-öt csúcspontnak első távolsága egyenlő. Ha meghatároztuk egy csoportba tartozó egyik csúcspontnak első távolságát, akkor a dodekaeder második képe már megszerkeszthető. A kérdéses távolságok a dodekaeder első képében közvetlenül lemérhetők. Tudjuk a dodekaeder származtatásából, hogy a dodekaederen vannak egymásra merőleges kitérő élek.

Vizsgáljuk meg két egymásra merőleges profil egyenesre felmért ugyanazon távolság képhosszait. Legyen az egyik profil egyenes g, első képsíkszöge β_1, akkor a g egyenesre felmért e távolság első, illetőleg második képhossza

$$e'_g = e \cos \beta_1, \text{ illetőleg } e''_g = e \sin \beta_1.$$

A g egyenesre merőleges l profil egyenes első képsíkszöge akkor $90°—\beta_1$, erre az egyenesre felmért e távolság első, illetőleg második képhossza

$$e'_l = e \sin \beta_1, \text{ illetőleg } e''_l = e \cos \beta_1.$$

Vagyis

$$e'_g = e''_l \text{ és } e'_l = e''_g,$$

szóval az egyik egyenesre felmért távolság első képe egyenlő a másik egyenesre felmért távolság második képével.

Az ábrázolt dodekaeder 1 és 7, továbbá 8 és 14 csúcspontok összekötő egyenesei egymásra merőleges profil egyenesek, tehát a fenti tételre való hivatkozással $\overline{8'14'}$ egyenlő $\overline{1''7''}$ és $\overline{1'7'}$ egyenlő $\overline{8''14''}$. Az eredményt úgy is fogalmazhatjuk, hogy az első képkörrajz egy oldala, t_1, a 8 pontnak első távolsága; ha az első projekcióban szereplő körök sugarainak különbsége t_2, akkor a 14 pontnak első távolsága t_1+t_2 és az első képsíkkal parallel síkban fekvő dodekaederötszög egy csúcspontjának első távolsága $2t_1+t_2$.

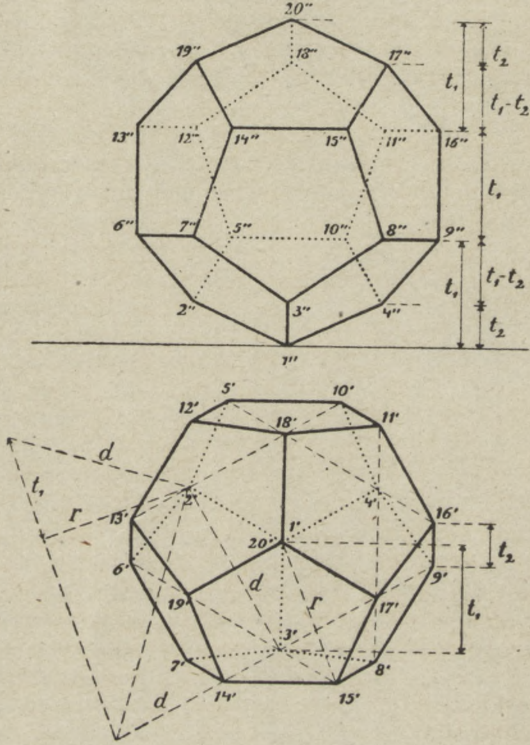
A 8, illetőleg 14 pontnak első távolságát azon az alapon is szerkeszthetjük meg, hogy ismerjük a pont első képét és a pont leforgatottját az első képsíkban, mert ha a 8, 14, 9, 3, 2 ötszöget síkjának első nyomvonala körül az első képsíkba forgatjuk, akkor a 8 pont leforgatottja az 1' ponttal és a 14 pont leforgatottja az 5' ponttal azonos pont.

Még megemlítjük, hogy a dodekaederbe írt kocka felhasználásával is lehet egyes dodekaeder csúcspontok első távolságait meghatározni.

3. *Szerkesztessék a dodekaeder két képe, ha csúcstengelye az első képsíkra merőleges.* Legyen az első képsíkra merőleges csúcstengely az 1 és 20 csúcspontok összekötő egyenese és válasszuk az 1 csúcspontot az első képsíkban. (151. ábra.) Az 1 és 20 pontból kiinduló élek végpontjainak első képei szabályos hatszög csúcspontjai, a hatszög köré írt kör középpontja az 1' pont, e körbe írt szabályos háromszög egy oldala egy határoló szabályos ötszög diagonálisa, e diagonális a dodekaederbe írt kocka élhossza. A dodekaederbe írható hexaederek közül kettőnek csúcstengelye azonos a kiindulást képező csúcstengellyel. Mindkét hexaedernek az 1 és 20 csúcspontoktól különböző csúcspontjainak első képei, mely csúcspontok a dodekaeder csúcspontjait kimerítik, egy körön vannak. E kör középpontja az 1' pont, sugara, r, oly derékszögű háromszög átfogójához tartozó ma-

gasság, melynek egyik befogója d, másik befogója $d\sqrt{2}$. A megrajzolt körön lesznek a hiányzó csúcspontok első képei. Hogy e körön az egyes csúcspontok képeinek helyét nyerhessük, gondoljuk a dodekaederbe írt ama kockát megszerkesztve, melynek egy éle pld. a 2, 3 pontok összekötő egyenese. E kockának két lapja első vetítősík, e síkok első nyomvonalai a 2′ és 3′ pontokra illeszkedő és 2′3′ egyenesre merőleges egyenesek, mert 2, 3 kockaél az első képsíkkal parallel. Tehát a dodekaeder csúcspontjainak első képei az előbbi kör és a most említett vetítősíkok közös pontjai. Ha 2′4′, illetőleg 3′4′ a dodekaederbe írt egy-egy hexaeder egy-egy éle, akkor ugyanazon módon nyerjük a dodekaeder összes hiányzó csúcspontjainak első képeit.

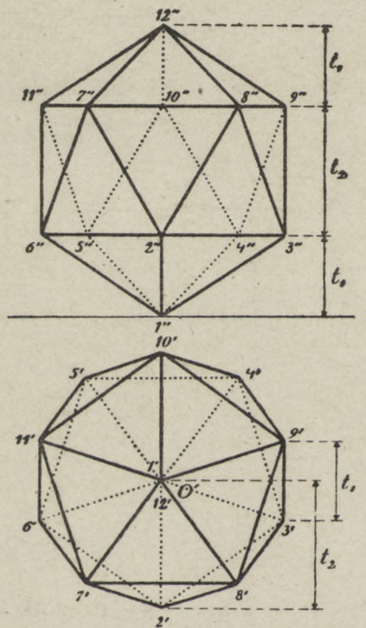
A csúcstengely a második projekcióban valódi nagyságban látszik, a csúcstengely hossza a beírt kocka csúcstengelye, $d\sqrt{3}$. Ha ezt a távolságot három egyenlő részre osztjuk és az osztási pontokon át az x_{12} tengellyel parallel egyeneseket rajzolunk, úgy ezeken az egyeneseken nyerjük a dodekaeder ama csúcspontjainak második képeit, mely csúcspontok az első projekcióban a képkörrajz csúcspontjai. Ha még meg tudjuk szerkeszteni a 3 pont második rendezőjét, akkor a dodekaeder második képének szerkesztését elintézettnek mondhatjuk. De 1, 3 és 9, 16 dodekaederélek egymásra merőleges profil egyeneseken fekvő élek, tehát $\overline{1''3''} = \overline{9'16'} = t_2$. Még megemlítjük, hogy a dodekaeder csúcstengelyének harmadrésze az első projekcióban közvetlenül lemérhető. Az első projekcióban a dodekaeder első hat pontjának első képei egy szabályos hatszög csúcspontjai, e hatszög oldala vagy köréje írt kör sugara, t_1, a dodekaeder csúcstengelyének harmada, mert e körbe írt szabályos háromszög egy oldala, $d = t_1\sqrt{3}$, ebből $t_1 = \frac{d}{3}\sqrt{3}$.



151. ábra.

140. §. A szabályos ikozaeder. A szabályos ikozaedert a szabályos dodekaederből származtatjuk. A szabályos dodekaeder egy csúcsában találkozó három szabályos ötszög középpontjai mindig szabályos háromszög csúcspontjai. A dodekaeder 20 csúcspontja alapján nyerünk 20 szabályos háromszöget, e szabályos háromszögek által határolt polieder a szabályos ikozaeder. Az ikozaedernek van 20 lapja, 12 csúcsa és 30 éle, egy csúcsban 5 él fut össze. Szemköztfekvő lapjai, szemköztfekvő élei parallelek. Az egy csúcsban találkozó lapok szabályos ötoldalú gúla oldallapjai, a gúla alaplapja szabályos ötszög, melynek egy oldala az ikozaeder élhossza. A gúla egy oldaléle merőleges egy alapélre, ez az alapél a szabályos ötszög ama csúcspontjával szemköztfekvő oldal, mely csúcspontban a kérdéses oldalél végződik. Az ikozaeder csúcstengelyei, laptengelyei és éltengelyei egy pontra, az ikozaeder középpontjára illeszkedő egyenesek.

141. §. A szabályos ikozaeder ábrázolása. 1. *Szerkesztessék az első képsíkra merőleges csúcstengelyű ikozaeder két képe.* Az első képsíkra merőleges csúcstengely és első képsík közös pontja legyen az ikozaeder 1 csúcspontja, e csúcstengely másik végpontja legyen az ikozaeder 12 csúcspontja, e pontok és az ikozaeder középpontja első födőpontok, tehát $1' \equiv 12' \equiv O'$. (152. ábra.) A felső és alsó csúcspontból kiinduló élek végpontjai egy-egy szabályos ötszög csúcspontjai, az ötszögek síkjai az első képsíkkal parallel síkok. Az ötszögek csúcspontjainak első képei szabályos tízszög csúcspontjai, mert a felső ötszög egy csúcspontjával szemközt az alsó ötszög egy csúcspontja fekszik. Az első képsíkban lévő szabályos tízszög az ikozaeder első képkörrajza. A szabályos tízszög csúcspontjai és a tízszög középpontja, mint kétszer számítandó pont, kimerítik az ikozaeder csúcspontjainak első képeit. Legyen az első képsíkon rajzolt szabályos tízszög egy oldala t_1, e tízszög köré írt kör sugara t_2. Mivel az ikozaedernek öt-öt csúcspontja egy-egy az első képsíkkal parallel síkban van, az ikozaeder második képe megszerkeszthető, ha e síkoknak az első képsíktól való távolságait ismerjük. Az alsó ötszög síkjának távolsága az első képsíktól t_1, a felső ötszögnek távolsága az első képsíktól t_1+t_2, mert $t_1=\overline{3'9'}$ és $t_2=\overline{1'2'}$ ikozaederélek egymásra merőleges profil egyeneseken fekvő élek, tehát $1''2''=t_1$ és $3''9''=t_2$.

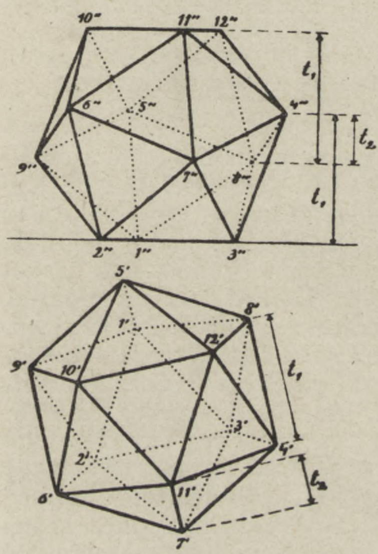


152. ábra.

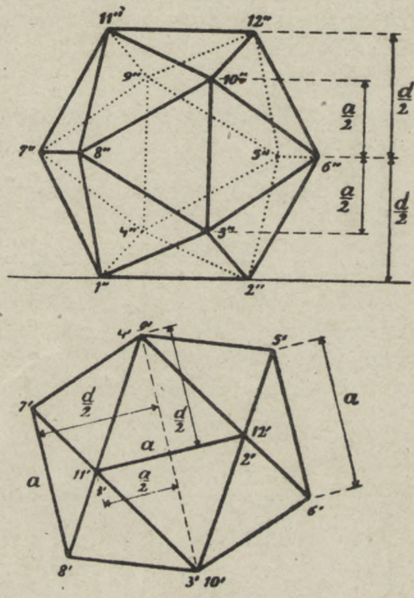
2. *Szerkesztessék egyik lapjával az első képsíkon álló szabályos ikozaeder.* (153. ábra.) Az ikozaeder csúcspontjainak első képei ez esetben két szabályos hatszög csúcspontjai szerint rendeződnek, a hatszögek koncentrikus hatszögek, a közös középpont a hatszögek perspektivitási centruma. Legyen a kisebb hatszög egy oldala, vagyis sugara r_1, a nagyobb hatszög egy oldala, vagyis sugara r_2, akkor

$$r_1 : r_2 = \overline{1'2'} : \overline{5'6'} = a : d,$$

ha a az ikozaeder egy élének és d az a élhosszal, mint oldallal, szerkesztett szabályos ötszög egy diagonálisának jele. Ebből következik, hogy a körsugarak közül az egyik a másiknak aranymetszete. Az ikozaeder második képének szerkesztésénél figyelembe vesszük, hogy három-három csúcspont egy-egy az első a képsíkkal párhuzamos helyzetű síkban van. Gondoljuk az ikozaedert első képsíkra merőleges laptengelye körül addig elforgatva, míg az 1 és 5 csúcspontok összekötő egyenese profil egyenes lesz, ugyanakkor a 4 és 8 csúcspontok összekötő egyenese szintén profil egyenes. A két profil egyenes egymásra merőleges, tehát mivel a laptengely körüli



153. ábra.



154. ábra.

forgatásnál az ikozaeder csúcspontok első távolságai nem változnak, az 5 pont első távolsága $t_1 = \overline{4'8'}$, továbbá a 4 meg a 8 pontok nivókülönbsége $t_2 = \overline{1'5'}$, e távolságok ismerete alapján az ikozaeder második képe már megszerkeszthető.

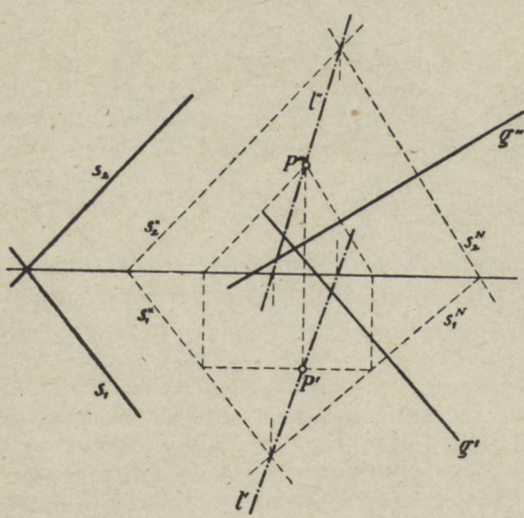
3. *Szerkesztessék az ikozaeder két képe, ha éltengelye az el képsíkra merőleges.* (154. ábra.) Legyen ismét az ikozaeder élhossza a és az a élhosszal, mint oldallal, szerkesztett szabályos ötszög egy diagonálisa d. Az ikozaeder középpontján átmenő és az első képsíkkal parallel sík két egybevágó részre bontja az ikozaedert, az ikozaedernek e síkkal való síkmetszete hatszög, melynek két szemközt fekvő oldala a, a többi négy oldala az ikozaeder egy határoló háromszögének magasságával egyenlő. Megjegyezzük, hogy e hatszög két mellékátlója d. Az ikozaeder első képének szerkesztését a szóban lévő hatszög szerkesztésével indítjuk meg. Rajzolunk az első képsíkban oly oblongumot, melynek egyik oldala a, másik oldala d, a d hosszúságú oldalak fölé szerkesztünk egyenlőszárú háromszögeket, az egyenlőszárú háromszög szára egy határoló háromszög ma-

gassága. Az oblongum egy-egy csúcspontja az ikozaeder egy-egy csúcspontjának első képe és a két egyenlőszárú háromszög csúcspontja két-két ikozaedercsúcspontnak első képe, a hatszögnek d-től különböző mellékátlóinak metszéspontjai a hiányzó csúcspontok első képei, a metszéspontok mindegyike kétszer számítandó pont.

A második kép szerkesztésénél abból a megfontolásból indulunk ki, hogy az ikozaeder csúcspontjainak második rendezői nagyságra nézve nem változnak, ha az ikozaedert az első képsíkra merőleges éltengely körül forgatjuk. Gondoljuk az ikozaedert úgy elforgatva, hogy a 7 és 8 csúcspontok összekötő egyenese a második képsíkkal parallel helyzetben legyen, akkor az ikozaeder második képe az első képpel kongruens, mert egy éltengelye a második képsíkra merőleges. Ezen az alapon megszerkeszthetők az ikozaeder csúcspontjainak második képei.

Adott feltételeket kielégítő térelemek és alakzatok ábrázolása.

A tervező mérnök alkotásai mindig meghatározott célt szolgálnak. A tervezett műszaki objektum céljának akkor felel meg legjobban, ha az objektum és annak minden része a legideálisabban kielégíti ama műszaki feltételeket, melyek részben előre adottak, részint tervezés közben felmerülnek. Szóval a technikus feltételeket kielégítő alakzatokat tervez, az elemeire bontott alakzat pontjai, síkjai, egyenesei, felületei e szerint minden esetben műszaki szempontok szolgálatában vannak. Egy-egy műszaki feltétel végeredményben legtöbbször geometriai köntöst nyer, amikor ugyanis egy-egy térelemnek távolsága egy vagy több térelemtől, illetőleg egy-egy térelemnek szöge egy vagy több térelemmel adott. S így kell, hogy minden tervező technikus nagy jártasságot tanusítson adott feltételeket kielégítő térelemek és alakzatok ábrázolásában.



155. ábra.

Már eddig is ábrázoltunk feltételeket kielégítő elemeket. Az eddig tárgyalt feladatokban ilyen feltételek voltak az *illeszkedési*, a *párhuzamossági* és *merőlegességi feltételek.* Oly feladat megoldása, melyben a most felsorolt feltételek közül egy vagy több szerepel, különösebb nehézséget nem okoz. Pl. Adva van a P pont, az **S** sík és a g egyenes. (155. ábra.) Szerkesztessék az az l egyenes, mely P pontra illeszkedik, az **S** síkkal parallel és a g egyenesre merőleges. A P pontra illeszkedő, **S** síkkal parallel egyenesek sugársort alkotnak, melynek centruma a P pont és síkja a P pontra illeszkedő és az **S** síkkal parallel $\mathbf{S}^{\times}$ sík. A P pontra illeszkedő, g egyenesre merőleges egyenesek ugyancsak sugársort alkotnak, melynek centruma a P pont és síkja a P pontra illeszkedő és a g egyenesre merőleges **N** sík. Az $\mathbf{S}^{\times}$, **N** síkok közös egyenese a két sugársor közös sugara, e közös sugár a kívánt feltételeket kielégítő egyenes.

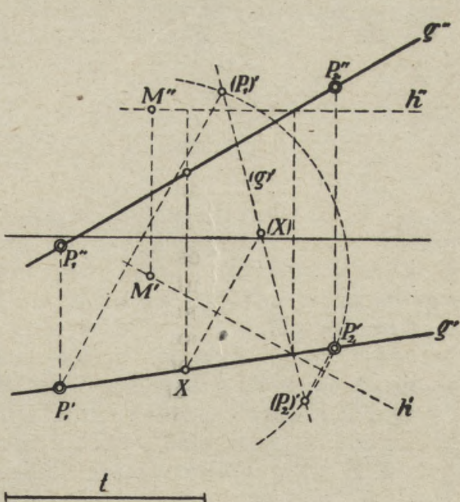
A feladat megoldásából látjuk, hogy közvetett utat követünk a feladat megoldásánál, megállapítjuk a keresett térelemmel egynemű térelemek közül azokat, melyek a megadott feltételek közül egyet, kettőt, szóval csak néhányat, azután megállapítjuk azokat a térelemeket, melyek megint csak néhány feltételt elégítenek ki, és így tovább, az így meghatározott térelemek közül kiválasztjuk azokat, melyek az összes feltételeket kielégítik.

142. §. Adott ponttól adott távolságban fekvő pontok.

I. Adott ponttól adott távolságban fekvő pontok oly gömbfelületnek pontjai, melynek középpontja az adott pont és sugara az adott távolság. A gömbfelület pontjai a pontoknak kétméretű sokasága, e kétméretű sokaságból egy egyenesre általában két pont, egy tetszőleges síkra a pontoknak egy egyméretű sokasága illeszkedik.

Egyenes és gömbfelület közös pontjait úgy nyerjük, hogy az egyenesre illeszthető síkok közül azt a síkot választjuk, mely egyúttal a gömb középpontjára is illeszkedik, e sík és gömbfelület közös pontjai ama körvonal pontjai e síkban, melynek középpontja a gömb középpontja és sugara a gömb sugara, az így nyert legnagyobb gömbi kör és egyenes közös pontjai a gömbfelületnek az egyenesre illeszkedő pontjai.

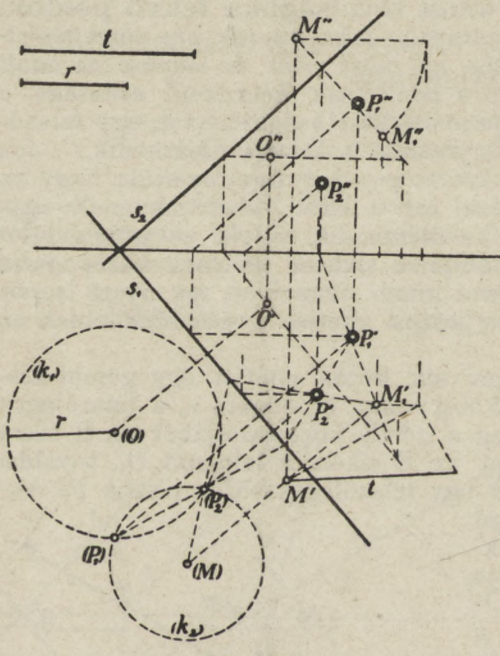
Gömbfelület és tetszőleges sík közös pontjai egy gömbi kiskör pontjai. Legyen a gömb középpontja O, sugara r, a tetszőleges sík legyen **S**. Szerkesszük meg a gömb középpontjából az **S** síkra merőleges egyenes talppontját az **S** síkon, a talppont O_1, továbbá legyen a gömbfelület és **S** sík egy tetszőleges közös pontja P_i. Akkor O, O_1, P_i pontok derékszögű háromszög csúcspontjai, a derékszögű háromszög OO_1 befogója a gömb középpontjának távolsága a felvett síktól, átfogója a gömb sugara, e két távolság meghatározza a derékszögű háromszöget és e két távolság nagyságra nem változik, ha a sík és gömbfelület közös pontjait változtatjuk, tehát az ily módon megállapított derékszögű háromszögek egybevágók. A derékszögű háromszögek közös befogója OO_1, s így e befogótól különböző befogók végpontjainak mértani helye kör. Tehát gömbfelület és sík közös pontjai a gömb egy kiskörének pontjai, a kiskör síkja a felvett sík, kö-



156. ábra.

zéppontja a gömb középpontjából a síkra bocsátott merőleges talppontja, sugara oly derékszögű háromszög befogója, melynek másik befogója a gömb középpontjának a síktól való távolsága és átfogója a gömb sugara.

1. feladat: Adva van az $M(M'M'')$ pont, a t távolság és a $g(g'g'')$ egyenes. (156. ábra.) Szerkesztessenek meg a g egyenesnek az M ponttól t távolságban fekvő pontjai. Az M pont és g egyenes által meghatározott síkot két illeszkedő egyenes összekötő síkjára vezetjük vissza. Az illeszkedő egyenesek közül az egyik a g egyenes, másik egyenesnek választjuk az $[Mg]$ síknak M pontjára illeszkedő első h fővonalát, utóbbi egyenes második képe az M''-re illeszkedő és x_{12} tengellyel parallel egyenes, első képe, h', a második képe alapján szerkesztendő. A $[gh]$ síkot szerkesztett fővonala körül az első képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatjuk. E forgatásnál az M pont és g, h egyenesek illeszkedési pontja helyben marad, g egyenes leforgatásához tehát a g egyenesre illeszkedő tetszőleges X pont leforgatása szükséges. A leforgatásban az $(M)' \equiv M'$ pont körül t sugárral kört rajzolunk. E kör és $(g)'$ egyenes közös pontjai a leforgatásban a keresett pontok $(P_1)'$, $(P_2)'$. E pontok felállításával feladatunk megoldást nyert.



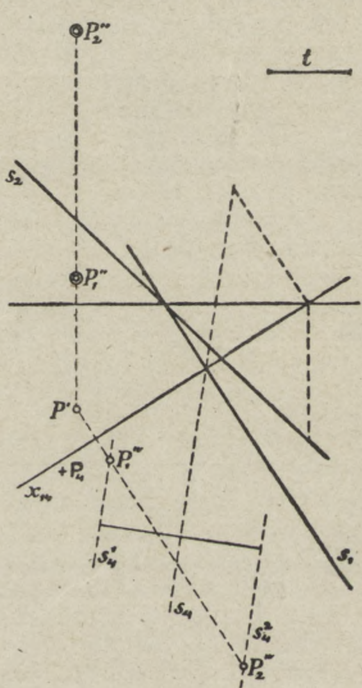
157. ábra.

2. feladat: Adva van az $S(s_1, s_2)$ sík, e síkra illeszkedő pont első képe O', az $M(M', M'')$ pont, az r és t távolság. (157. ábra.) Szerkesztessenek meg az S ama pontjai, melyek O-tól r és M-től t távolságban vannak. Az S síkra illeszkedő O ponttól r távolságban fekvő pontok egy körvonal pontjai, legyen ez k_1. Az S síkra illeszkedő M ponttól t távolságban fekvő pontok egy másik körvonal pontjai, legyen ez k_2. k_1 körvonal adott, mert síkja S, középpontja O, sugara r. k_2 körvonal szintén adott, mert síkja ugyancsak S, középpontja az M pontból az S síkra bocsátott merőleges e síkon lévő M_1 talppontja, sugara ama derékszögű háromszög egyik befogója, melynek másik befogója M, M_1 pontok valódi távolsága és átfogója az adott t távolság. Az S síkban fekvő körvonalak közös pontjai a keresett pontok. E szerint megszerkesztjük *a)* az S síkra illeszkedő O pont első képéből annak második képét, *b)* az M pontból az S síkra bocsátott merőleges talppontját, az M_1 pontot, *c)* az M és M_1 pontok távolságának valódi nagyságát, *d)* a rajz síkjában szabad helyen szerkesztünk derékszögű háromszöget, melynek egyik befogója $\overline{MM_1}$, átfogója t, *e)* az S síkot első nyomvonala körül az

első képsíkba forgatjuk a síkra illeszkedő O és M_1 pontokkal együtt, *f)* a leforgatott O pont körül az első képsíkban r sugárral kört rajzolunk, ez a k_1 leforgatottja, *g)* a leforgatott M_1 pont körül az első képsíkban t sugárral kört rajzolunk, ez a k_2 kör leforgatottja, *h)* megállapítjuk a leforgatott körök közös pontjait, a (P_1), (P_2) pontokat, *i)* a körök közös pontjait az **S** síkkal visszaállítjuk, a felállítással nyert pontok a keresett pontok, $P_1(P_1'P_1'')$ és $P_2(P_2'P_2'')$.

143. §. Adott síktól adott távolságban fekvő pontok.
II. Adott síktól adott távolságban fekvő pontok két síkra illeszkedő pontok, e síkok az adott síktól az adott távolságban vannak.

3. feladat: Adva van az **S** (s_1, s_2) sík, egy **P** pontnak első képe, P', a t távolság. (158. ábra.) Szerkesztessék a P pont második képe, de a két képével adott P pont az adott síktól az adott távolságban legyen. Ama pontok, mely pontok első képe P', a P' pontra illeszkedő első vetítő egyenesen vannak, tehát a keresett pontok egy mértani helyét ismerjük, másrészt tudjuk, hogy az adott síktól adott távolságban fekvő pontok két síkban vannak. Tehát a keresett P pont a P' pontra illeszkedő első vetítősugárnak és adott síktól adott távolságban fekvő síkoknak metszéspontja. E szerint megszerkesztjük *a)* az **S** síknak negyedik nyomvonalát, a negyedik képsíkot az első képsíkra merőlegesen választottuk úgy, hogy az új képsíkra nézve adott sík vetítősík legyen, *b)* a negyedik képsíkon az adott sík negyedik nyomvonalával t távolságban rajzolt parallel egyenesek ama síkok negyedik nyomvonalai, melyek az adott síktól t távolságban vannak, *c)* megszerkesztjük P' pontra illeszkedő vetítősugár negyedik képét, a sugár negyedik képe a P' pontra illeszkedő és x_{14} tengelyre merőleges egyenes, *d)* a most szerkesztett egyenes negyedik képe metszi az adott sík negyedik nyomvonalával parallel egyeneseket, egy-egy ilyen pont lesz a keresett P pont negyedik képe, *e)* mivel a keresett pontok negyedik rendezői egyenlők e pontok második rendezőivel, megállapítjuk a keresett pontok második képeit.



158. ábra.

144. §. Adott egyenestől adott távolságban fekvő pontok. Mint ismeretes, egy síkra illeszkedő ama pontok mértani helye, mely pontok egy a síkra illeszkedő egyenestől adott távolságban vannak, két a síkra illeszkedő egyenestől adott távolságban fekvő parallel egyenes. Legyen a síkra illeszkedő egyenes g, az adott távglság t. A síkban a g egyenestől t távolságban szerkesztett egyik egyenes legyen a. Ha az a egyenest a g egyenes körül, mint tengely körül forgatjuk, akkor a forgó a egyenes minden pontja a g egyenestől t távolságban marad. Szóval g egyenestől t távolságban lévő pontok egyeneseken sorakoznak, az egyenesek a forgó a egyenes pillanatnyi helyzetei. A g egyenestől t távolságban fekvő pontok kétméretű sokaságot alkotnak, egy felületnek pontjai, a felület a sztereometriából ismeretes egyenes körhenger palástfelülete, röviden forgáshengernek mondjuk. A forgáshenger származtatásából látjuk, hogy vannak egyenesek, melyeknek pontjai mind a hengerre illeszkedő pontok, ezeket az egyeneseket a forgáshenger alkotóinak mondjuk. Az alkotók parallel egyenesek, parallelek a forgási tengellyel, a g egyenessel. A forgási tengely a felületnek röviden a tengelye. A forgáshenger származtatásából az is következik, hogy a felületnek a tengelyre merőleges síkra illeszkedő pontjai egy körvonal pontjai. A hengerfelületen lévő egy-egy ilyen kör a forgáshenger vezérköre. A forgáshengernek két jellegzetes tulajdonsága van, *a)* a forgáshenger tengelye körül önmagában elforgatható, *b)* tengelye irányában önmagában eltolható.

III. Adott egyenestől adott távolságban fekvő pontok forgáshengerfelület pontjai, melynek tengelye az adott egyenes és vezérkörének sugara az adott távolság.

Adott egyenestől adott távolságban fekvő pontok kétméretű sokaságából a tér egy tetszőleges egyenesére általában két pont illeszkedik. E pontok szerkesztése előtt kimutatjuk, hogy a forgáshenger tengelyével parallel síkra a felületnek két alkotója illeszkedik. A forgáshenger a térben adottnak mondható, ha valamely vezérköre adott, szóval ismerjük a vezérkör síkját, középpontját és sugarát. A vezérkör egy pontjára illeszkedő és a vezérkör síkjára merőleges egyenes a hengerfelület egy alkotója. E szerint a henger tengelyével parallel síkban a hengeralkotókat úgy nyerjük, hogy megszerkesztjük a sík és vezérkör közös pontjait, a közös pontokra illeszkedő hengeralkotók a felvett síkra illeszkednek, mert a sík ilyen hengeralkotó két pontját tartalmazza. Az egyik pont a sík és vezérkör közös pontja, a másik pont a sík és henger tengelyének közös végtelenben fekvő pontja.

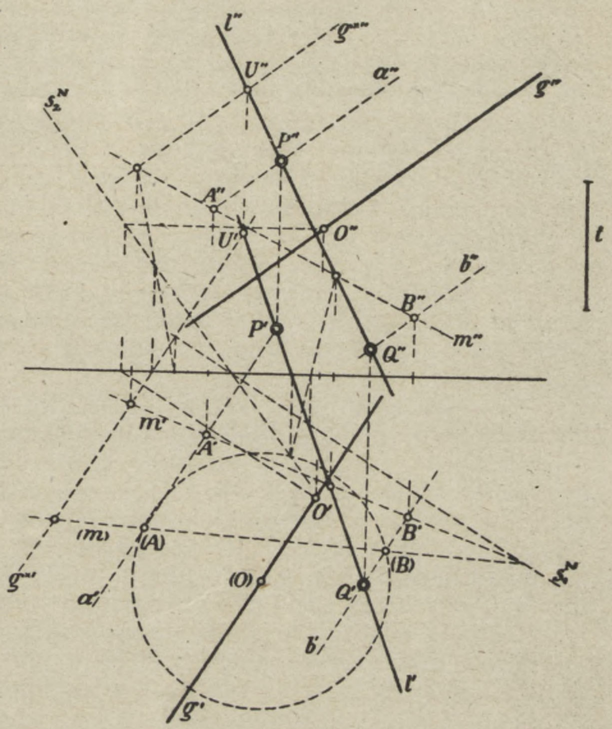
A henger tengelyével parallel síkra illeszkedő alkotók szerkesztésénél kör és sík közös pontjainak szerkesztése szükséges. Térben adott körnek adott síkra illeszkedő pontjai csak azon egyenesen lehetnek, mely egyenesben a kör síkja az adott síkot metszi. A kör síkjában fekvő metsző egyenes és kör közös pontjai a keresett pontok. E pontok tényleges szerkesztésénél a kör síkját a benne lévő metsző egyenessel együtt valamely képsíkba forgatjuk, azután a leforgatott kör és leforgatott egyenes közös pontjait felállítjuk.

A tárgyalt előzmények alapján egyenes és hengerfelület közös pontjait úgy nyerjük, hogy megszerkesztjük az egyenesre illeszkedő és a henger tengelyével parallel síkot, e sík a hengerfelület két alkotóját tartalmazza, az alkotók és felvett egyenes közös pontjai a hengerfelület és felvett egyenes közös pontjai.

4. feladat: Adva vannak a g, l kitérő egyenesek és a t távolság. (159. ábra.) Szerkesztessenek meg az l egyenes ama pontjai, melyek a g egyenestől az adott t távolságban vannak.

Felveszünk egy a g egyenesre illeszkedő O pontot és megszerkesztjük az O ponton átmenő és g egyenesre merőleges **N** síkot.

Az **N** síkban gondolt ama kör, melynek középpontja O, sugara t, vezérköre ama hengerfelületnek, melynek minden pontja a g egyenestől t távolságban van. Az l egyenes tetszőleges U pontjára illeszkedő és g egyenessel parallel $g^{\times}$ egyenes az l egyenessel megállapít egy **S** síkot. Az **S** sík a hengerfelületet alkotókban metszi, ezeket úgy nyertük, hogy megszerkesztettük az **N** és **S** sík közös m egyenesét, a rajzban az m egyenes egyik pontja a $g^{\times}$ egyenes és **N** sík, másik pontja az l egyenes és **N** sík metszéspontja. Az **N** síkot első nyomvonala körül leforgattuk az első képsíkba, ekkor leforgattuk az **N** síkra illeszkedő O pontot és az **N** síkra illeszkedő m egyenest. A leforgatott O pont körül az első képsíkban t sugárral kört rajzoltunk, e kör a leforgatott m egyenest két pontban metszi, ezek (A), (B), utóbbi pontok felállításával nyerjük az $A(A', A'')$, $B(B', B'')$ pontokat, ezek ama pontok, melyekben a henger vezérköre az **S** síkot metszi. A és B pontokra illeszkedő hengeralkotók $a(a', a'')$, $b(b', b'')$ az l egyenesre illeszkedő egyenesek. Az illeszkedési pontok $P(P', P'')$, $Q(Q', Q'')$, az l egyenesre illeszkedő és g egyenestől t távolságban fekvő pontok.



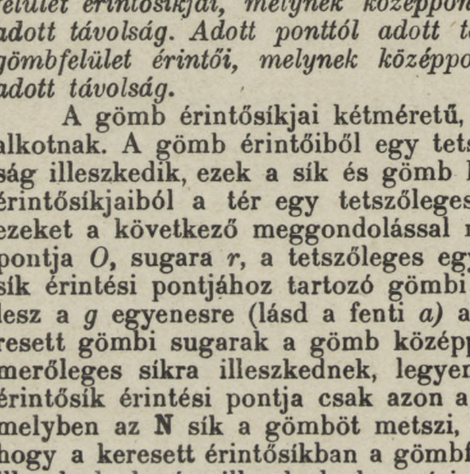
159. ábra.

145. §. Adott ponttól adott távolságban fekvő síkok és egyenesek.

Tárgyaltuk, hogy O ponttól r távolságban fekvő pontok, gömbfelületnek pontjai. Legyen a gömbfelület egy pontja T, akkor a T pontra illeszkedő és az OT egyenesre merőleges sík az O ponttól r távolságban lévő sík. E síknak bármely T ponttól különböző pontjának távolsága a gömb középpontjától az r távolságnál nagyobb. Tehát a megszerkesztett síkra a gömbfelületnek csak egy pontja illeszkedik, ilyen síkról azt fogjuk mondani, hogy az a gömbfelület egy érintősíkja. Az érintősík és gömb közös pontja az érintősík érintési pontja, jelen esetben T. Egy érintősík ama egyenesei, melyek az érintősík érintési pontjára illeszkednek, oly egyenesek, melyek távolsága a gömb középpontjától r, ha r a gömb sugara. Ilyen egyenes a gömb egy érintője. Míg általában egy egyenesre a gömbfelület két pontja illeszkedik, addig a gömb egy érintőjére a gömbfelületnek csak egy pontja illeszkedik, a közös pont az érintő érintési pontja. A gömb érintősíkjához, a gömb érintőjéhez egy-egy megjegyzést fűzünk. *a)* Mivel a gömb érintősíkja mindig merőleges az érintési ponthoz tartozó gömbi sugárra, e sugár az érintősík minden egyenesével derékszöget alkot. *b)* A gömb egy érintőjére illesztett tetszőleges sík a gömböt általában egy gömbi kiskörben metszi. A kiskör pontjai kimerítik a sík és gömbfelület közös pontjait, tehát a kimetszett kiskör egy pontja a felvett érintő érintési pontja és e pontban a kiskör érintője az eredetileg felvett érintő, mert az érintő a gömbfelületnek egy és csakis egy pontjára illeszkedik.

IV. Adott ponttól adott távolságban fekvő síkok, ama gömbfelület érintősíkjai, melynek középpontja az adott pont és sugara az adott távolság. Adott ponttól adott távolságban fekvő egyenesek ama gömbfelület érintői, melynek középpontja az adott pont, sugara az adott távolság.

A gömb érintősíkjai kétméretű, érintői háromméretű sokaságot alkotnak. A gömb érintőiből egy tetszőleges síkra egyméretű sokaság illeszkedik, ezek a sík és gömb közös körének érintői. A gömb érintősíkjaiból a tér egy tetszőleges egyenesére kettő illeszkedik, ezeket a következő meggondolással nyerjük. Legyen a gömb középpontja O, sugara r, a tetszőleges egyenes g. A szerkesztendő érintősík érintési pontjához tartozó gömbi sugár mindenesetre merőleges lesz a g egyenesre (lásd a fenti *a)* alatti megjegyzést). Tehát a keresett gömbi sugarak a gömb középpontján átmenő és a g egyenesre merőleges síkra illeszkednek, legyen e sík **N**, de akkor a keresett érintősík érintési pontja csak azon a legnagyobb gömbi körön lehet, melyben az **N** sík a gömböt metszi, legyen ez k. Azonkívül tudjuk, hogy a keresett érintősíkban a gömbfelületi érintők az érintési pontra illeszkednek, és illeszkednek az érintősík minden egyenesére, tehát metszik az adott egyenest is. Az **N** síkban a k kör összes érintői gömbfelületi érintők, ez érintők közül a keresett érintősíkra illeszkedő érintő csak az lehet, mely a tér adott egyenesére illeszkedik. Szóval az **N** sík és g egyenes közös pontjából a k körhöz rajzolt érintő a keresett érintősík egyenese, ez az egyenes és az adott g egyenes meghatározza a kívánt síkot, az érintő és k kör érintési pontja a kívánt sík és gömbfelület érintési pontja. Mivel egy pontból körhöz rajzolható érintők száma kettő, ebből következik, hogy a tér g egyenesére a gömbnek két érintősíkja illeszkedik.



160. ábra.

5. feladat: Adva vannak a $g(g', g'')$ egyenes, az $O(O', O'')$ pont, a t távolság. (160. ábra.)

Szerkesztessenek meg a g egyenesre illeszkedő és az O ponttól t távolságban fekvő síkok.

Megszerkesztjük az O pontra illeszkedő és g egyenesre merőleges **N** síkot, megállapítjuk az **N** sík és g egyenes D metszéspontját, leforgatjuk az **N** síkot a benne fekvő O és D pontokkal az **N** sík második nyomvonala körül a második képsíkba. Az (O) pont körül t távolsággal kört rajzolunk és feltüntetjük a (D) pontból e körhöz vonható érintőket, (t_1), (t_2). Egy-egy felállított érintő a g egyenessel megállapít egy-egy síkot, az így nyert $\mathbf{S}^1$, $\mathbf{S}^2$ síkok a kívánt feltételeket kielégítő síkok.

146. §. Adott síktól adott távolságban fekvő síkok és egyenesek. Amikor adott síktól adott távolságban fekvő pontokat állapítottunk meg, akkor az adott síkkal parallel síkokat nyertünk a keresett pontok mértani helyeként. Úgy e síkok, mint e síkokra illeszkedő egyenesek az adott síktól az adott távolságban vannak, tehát:

V. Adott síktól adott távolságban fekvő síkok véges számmal vannak, két ilyen sík van, e síkok az adott síkkal parallelek és tőle adott távolságban vannak. Adott síktól adott távolságban fekvő síkra illeszkedő tetszőleges egyenes az adott síktól az adott távolságban van.

147. §. Adott egyenestől adott távolságban fekvő síkok és egyenesek. Adott g egyenestől adott t távolságban fekvő egy síkot úgy szerkesztünk, hogy egy a g egyenesre illeszkedő **S** síkban szerkesztünk egy a g egyenestől t távolságban fekvő a egyenest, az a egyenesre illeszkedő és az **S** síkra merőleges **T** sík az adott egyenestől adott távolságban fekvő sík.

A **T** síkra illeszkedő pontok közül csak az a egyenesre illesztett pontok vannak a g egyenestől t távolságban, a **T** síkra illeszkedő egyéb pontok a g egyenestől a t távolságnál nagyobb távolságban vannak. A g egyenestől t távolságban fekvő pontok forgáshengerfelület pontjai, e hengerfelület és **T** sík közös pontjai csak az a egyenesre illeszkedő pontok, e szerint a **T** sík a hengerfelületnek egy és csakis egy, jelen esetben a, alkotóját tartalmazza. A **T** sík a hengerfelületnek egy érintősíkja, a hengerfelület egy érintősíkja a hengerfelületet nem egy pontban, hanem végtelen sok pontban érinti, az érintési pontok sora egy egyenes pontsor pontjai, ezért azt mondjuk, hogy a henger érintősíkja a hengert egy alkotó mentén érinti.

Hengerfelület pontjaiból a tér egy tetszőleges egyenesére, mint láttuk, általában kettő illeszkedik. Legyen a henger tengelye g, alkotója a és az a menti érintősíkja **T**. Vegyünk fel a **T** érintősíkban a g egyenessel szemben kitérő helyzetű e egyenest. Az e egyenes a hengerfelületnek csak egy pontjára illeszkedik, ez az a pont, melyben az érintősíkra illeszkedő a alkotót metszi, az ilyen e egyenesről azt fogjuk mondani, hogy az a hengerfelületnek érintője. A hengerfelület tetszőleges érintője a hengerfelület tengelyétől t távolságban van, mert az e és g egyenesek normális transzverzálisának talppontja az e egyenesen az a pont, melyben az e egyenes az a alkotót metszi, már pedig ennek a pontnak távolsága a g egyenestől az adott t távolság.

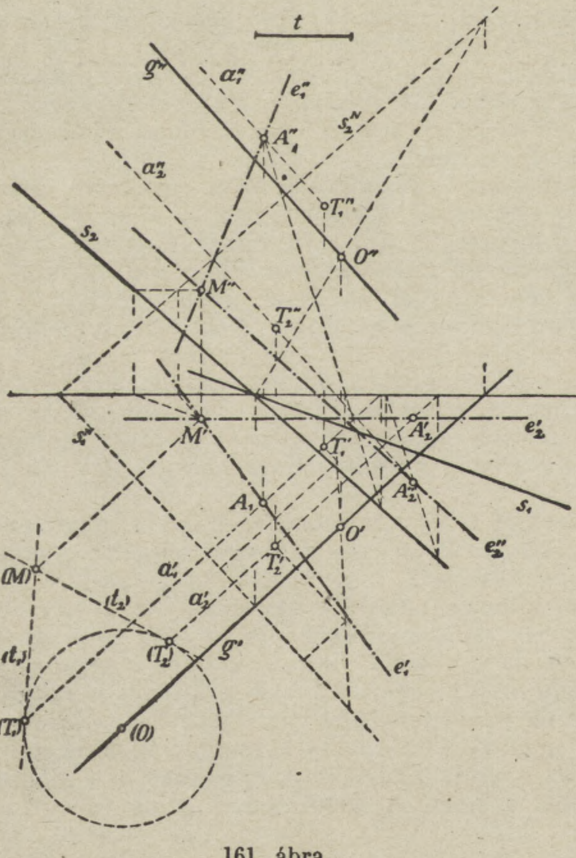
Legyen a henger egy vezérkörének síkja V, a vezérgörbe síkját a T érintősík egy egyenesben metszi, jele m. Az m egyenes mindenesetre a hengernek érintője, de ha meggondoljuk, hogy a vezérkör pontjai kimerítik a V síkra illeszkedő hengerfelületi pontokat, továbbá azt, hogy az m egyenesre a hengerfelületnek egy és csakis egy pontja illeszkedik és m minden pontja a V síkra illeszkedő pont, ebből következik, hogy az m egyenes a vezérkör érintője. Ezt tudva, a hengerfelület egy érintősíkját úgy szerkesztjük meg, hogy felveszszük a vezérkör egy érintőjét, ez az érintő, továbbá az érintőnek a vezérkörrel való érintési pontjára illeszkedő hengeralkotó meghatározzák az érintősíkot.

VI. Adott egyenestől adott távolságban fekvő síkok, illetőleg egyenesek egy forgáshengerfelületnek érintősíkjai, illetőleg érintői; a hengerfelület tengelye az adott egyenes, vezérkörének sugara az adott távolság.

Vezérkörével adott forgáshenger érintősíkjaiból a tér egy tetszőleges pontjára kettő illeszkedik. A két sík közös egyenese a henger tengelyével parallel, mert a két érintősík parallel a henger tengelyével.

a) a hengernek a tér véges pontjára illeszkedő érintősíkjait úgy nyerjük, hogy a pontra a henger tengelyével parallel egyenest illesztünk, majd a vezérgörbe síkjában megrajzoljuk a vezérgörbe ama érintőit, melyek a tengellyel parallel egyenesnek a vezérkör síkján lévő nyompontján átmennek. A tengellyel parallel egyenes egy-egy megszerkesztett körérintővel meghatároz egy-egy keresett érintősíkot.

b) A hengernek a tér végtelenben fekvő pontjára illeszkedő, vagyis egy egyenessel parallel érintősíkját úgy nyerjük, hogy szerkesztünk mindenekelőtt olyan síkot, mely a végtelenben fekvő pontot jellemző egyenessel és a henger tengelyével parallel és megállapítjuk e sík nyomvonalát a vezérkör síkján. A vezérkörnek e nyomvonallal parallel érintője és az érintő érin-



161. ábra.

tési pontjára illeszkedő alkotó meghatároznak egy síkot a kívánt síkok közül.

6. feladat: Adva van az **S** (s_1, s_2) sík, az **S** síkra illeszkedő M pont második képe, M'', a $g(g', g'')$ egyenes és a t távolság. Szerkesztessenek a g egyenestől t távolságban fekvő egyenesek, melyek az **S** síkra és az M pontra illeszkednek. (161. ábra.) A keresett egyenesek ama forgáshenger érintői, melynek tengelye g és vezérkörének sugara t. Az M pontra illeszkedő érintők rajta vannak a hengerfelület ama érintősíkjain, melyek az M pontra illeszkednek. E szerint a keresett egyenes az M pontra illeszkedő érintősík és az adott **S** sík közös egyenese.

A szerkesztést úgy végeztük, hogy *a)* megszerkesztettük az M pontra illeszkedő és a g egyenesre merőleges **N** síkot, az **N** sík a henger vezérkörének síkja, *b)* az **N** és g metszéspontja, $O(O', O'')$, a vezérkör középpontja, *c)* az **N** síkot a benne fekvő O és M pontokkal első nyomvonala körül leforgattuk az első képsíkba, nyertük az (O), (M) pontokat, *d)* az (O) pont körül t távolsággal, mint körsugárral, rajzolt körnek azon pontjait szerkesztettük meg, melyek az (M) pontból vonható érintők érintési pontjai, ezek (T_1) és (T_2), *e)* az érintési pontokat az **N** síkban felállítottuk, így nyertük a $T_1(T_1', T_1'')$ és $T_2(T_2', T_2'')$ pontokat, *f)* a T_1, T_2 pontakra illeszkedő, g egyenessel parallel a_1, a_2 egyenesek az M pontra illeszkedő hengerfelületi érintősíkok érintési alkotói, *g)* mivel tudjuk, hogy a keresett egyenesek az érintési alkotókra illeszkedő egyenesek, meghatároztuk minden egyes érintési alkotónak metszéspontját az **S** síkkal, e pontok $A_1(A_1', A_1'')$, $A_2(A_2', A_2'')$, *h)* M, A_1, illetőleg M, A_2 pontok összekötő egyenese egy-egy szerkesztendő egyenes.

148. §. Adott térelemektől adott, illetőleg egyenlő távolságokban fekvő térelemek. Az eddig tárgyalt feladatok alapján sok esetben oly térelem ábrázolását is intézhetjük el, mely feladatokban a szerkesztendő térelem két vagy több térelemtől egy-egy adott távolságban, illetőleg két vagy több térelemtől egyenlő távolságban van.

E fejezetbe tartozó feladatokkal nem kívánunk foglalkozni, csak mutatóba megemlítjük e feladatokkal kapcsolatos sok mértani helyből a következőket:

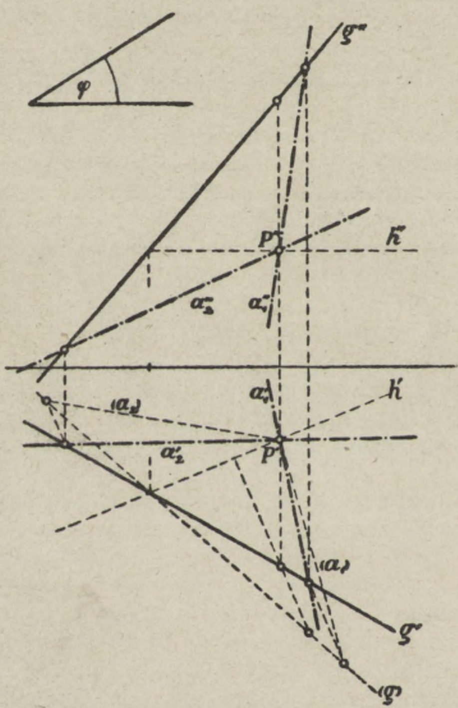
VII. Két ponttól egy-egy adott távolságban fekvő pontok mértani helye kör. Legyen az egyik pont O_1, a másik pont O_2, t_1 és t_2 egy-egy adott távolság. O_1 ponttól t_1 távolságban fekvő pontok gömbfelület pontjai, a gömb középpontja O_1 és sugara t_1; O_2 ponttól t_2 távolságban fekvő pontok gömbfelület pontjai, a gömb középpontja O_2 és sugara t_2. E gömbök közös pontjai az O_1 ponttól t_1 és az O_2 ponttól t_2 távolságban vannak. Az O_1, O_2 pontok távolsága legyen röviden a centrális, akkor egy közös gömbfelületi pont a centrális két végpontjával háromszöget határoz meg. Ha ezt a háromszöget a centrális körül forgatjuk, akkor a gömbfelületi közös pont által leírt kör minden pontja az O_1 ponttól t_1 és O_2 ponttól t_2 távolságban van. *E kör középpontja az adott pontok összekötő egyenesén az a pont, mely pont egy háromszög magasságának talppontja, ahol az adott két pont e háromszög két csúcspontja, a harmadik csúcspont az egyik adott ponttól az egyik, a másik adott ponttól a másik adott* *távolságban van; a kör síkja az adott pontok összekötő egyenesére merőleges; a kör sugara az előbbi háromszögben az adott pontokat összekötő egyenesre merőleges magasság.*

VIII. Két ponttól egyenlő távolságban fekvő pontok ama síkra illeszkedő pontok, mely sík az adott pontok távolságát merőlegesen felezi.

IX. Két ponttól egyenlő távolságban lévő síkok részint a két pont összekötő egyenesével parallel síkok, részint a két pont távolságát felező pontra illeszkedő síkok.

X. Két ponttól egyenlő távolságban lévő egyenesek egy sugársor sugaraira illeszkedő egyenesek, minden ilyen egyenes a sugársor ama sugarával, melyre illeszkedik, derékszöget alkot. A sugársor síkja az adott pontok távolságát merőlegesen felező sík, centruma a felezési pont.

149. §. Három feladat, melyekben szög szerepel. 7. feladat: Adva van a g egyenes, a P pont és a φ szög. (162. ábra.) Szerkesztessék a g egyenesre és a P pontra illeszkedő a egyenes, melynek az adott g egyenessel alkotott szöge az adott φ szög. Az adott pont és adott egyenes összekötő síkját a P pontra illeszkedő első fővonala körül az első képsíkkal parallel helyzetbe forgatjuk, a leforgatott adott elemekkel elvégezzük a kívánt planimetriai szerkesztést, a szerkesztés eredményeként nyert (a_1), (a_2) egyeneseket felállítjuk, ezek az ábrázolandó egyenesek.



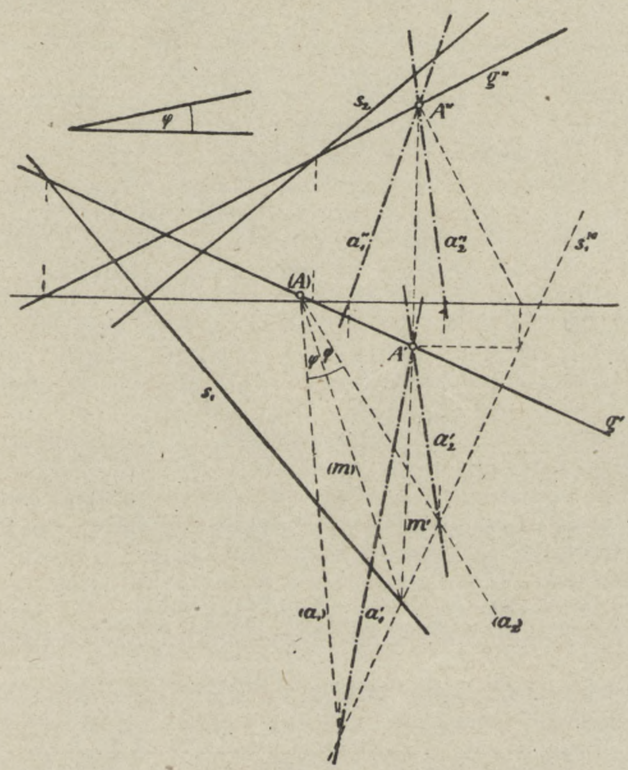
162. ábra.

8. feladat: Adva van az **S** sík és e síkra illeszkedő g egyenes, továbbá a φ szög. (163. ábra.) Szerkesztessenek meg a g egyenesre illeszkedő ama síkok, melyek az adott síkkal az adott φ szöget alkotják. Két sík szögét a két sík azon síkon lévő nyomvonalaival mérjük, mely sík a két sík közös egyenesére merőleges. Mivel az adott sík és keresett sík közös egyenese g, felveszünk a g egyenesre illeszkedő A pontot és megszerkesztjük az A pontra illeszkedő és g egyenesre merőleges **N** síkot. Az **N** sík az adott síkot az A pontra illeszkedő m egyenesben metszi. Miután az m egyenest megszerkesztettük, az **N** síkot a rajta lévő m és A térelemekkel az első képsíkba forgatjuk. A leforgatásban megrajzoljuk azt az (a) egyenest, amely egyenes illeszkedik az (A) pontra és az (m) egyenessel adott φ szöget alkot. Az így nyert egyenes lesz a kere-

sett síknak az **N** síkon lévő nyomvonalának leforgatottja. A felállított *a* egyenes az adott *g* egyenessel meghatározza a keresett síkot.

A most tárgyalt feladatnak egy speciális esete a következő: Adva van egy meghatározandó síknak első nyomvonala és első képsíkszöge. Szerkesztessék meg a sík második nyomvonala. Ez esetben az adott sík az első képsík, a *g* egyenest helyettesíti a meghatározandó síknak ismeretes első nyomvonala.

9. feladat: Szerkesztendő két sík szögét felező sík. Megszerkesztjük az adott síkok szögét a két sík közös egyenesére merőle-



163. ábra.

ges síkon. E szög szögfelezője az adott síkok közös egyenesével meghatározza a szögfelező síkot. Két síknak két szögfelező síkja van, mert egy szögnek két szögfelező egyenese van. Két sík szögfelező síkjának szerkesztését a következő mértani helyek kedvéért tárgyaltuk.

XI. A tér ama pontjai, melyek két síktól egyenlő távolságban vannak, a két sík szögfelező síkjára illeszkedő pontok.

XII. A tér ama egyenesei, melyek két síkkal egyenlő szöget alkotnak, a két sík szögfelező síkjaira illeszkedő, illetőleg e síkokkal parallel egyenesek.

XIII. A tér ama síkjai, melyek két síkkal egyenlő szöget alkotnak, a két sík szögfelező síkjára merőleges síkok.

150. §. Adott egyenessel, illetve síkkal adott szöget alkotó térelemek. Vegyük fel a tér tetszőleges g egyenesét, a g egyenesre illeszkedő M pontot, továbbá legyen adva a φ szög. Megállapítandók ama egyenesek, melyek a g egyenes M pontjára illeszkednek és a g egyenessel φ szöget alkotnak. Az előző pontban láttuk, hogy miképpen kell egy ilyen a egyenest megszerkeszteni, tehát legyen az a egyenes az adott feltételeket kielégítő egyenes. Ha az a egyenest a g egyenes körül, mint tengely körül forgatjuk, akkor az a egyenes a forgatás minden pillanatában a g egyenessel φ szöget alkot. Az a egyenes momentán helyzeteinek összessége felület, a felület a forgáskúpfelület. E felületre nézve a g egyenes, mely körül az a egyenes forgatása történt, a kúp tengelye; az M pont, melyre minden momentán helyzetben az a egyenes illeszkedik, a kúp csúcspontja; az a egyenes egy-egy momentán helyzetében a felület alkotója; a φ szög a kúp félnyílása. Az a alkotó minden pontja forgás közben kört írt le, melynek síkja a pontra illeszkedő, tengelyre merőleges sík, középpontja a sík és tengely metszéspontja, sugara a pont és középpont távolsága. Az alkotó egy pontja által leírt kör a kúp egy vezérköre, a kúpnak végtelen sok vezérköre van. Egy vezérkör egy sugara, e sugár végpontjára illeszkedő kúpalkotó és a kúp tengelye mindig derékszögű háromszög oldalai. A derékszögű háromszög egyik befogója a vezérkör sugara, r; e sugárral szemköztfekvő szög a φ szög; másik befogója a tengely egy darabja, e darab határpontjai a vezérkör középpontja és a kúp csúcspontja; átfogója, röviden az alkotó hossza, ama vonaldarab, melyet a kúp csúcspontja és a vezérkör sugarának végpontja határol. A derékszögű háromszögnek a tengelyre eső befogója, röviden a kúp tengelydarabja, vagy a kúp magassága, m.

A forgáskúp minden alkotója a kúp csúcspontjára és a vezérkör egy pontjára illeszkedik, tehát a vezérkör egy pontjának és a csúcspontnak összekötő egyenese a kúp alkotója.

A forgáskúpfelület meg van határozva *a)* tengelyével, a tengelyre illeszkedő csúcspontjával és félnyílásával, *b)* vezérkörével és félnyílásával, *c)* vezérkörével és magasságával, *d)* vezérkörével és az alkotó hosszával.

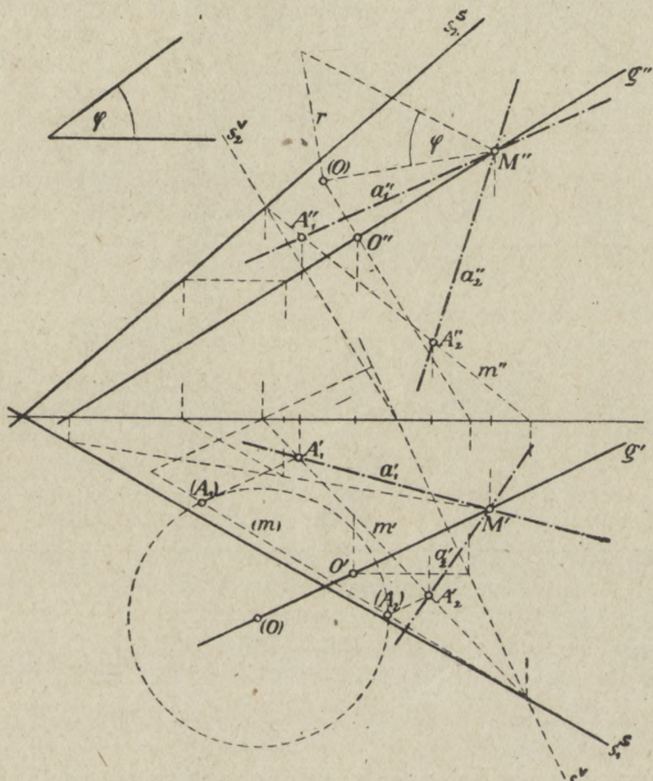
A φ félnyílású kúp egy alkotójával parallel egyenes a kúp tengelyével szintén φ szöget alkot; megfordítva minden olyan egyenes, mely a kúp tengelyével φ szöget alkot, mindig valamely kúpalkotóval parallel.

XIV. A tér ama egyenesei, melyek adott egyenessel adott szöget alkotnak, ama forgáskúp alkotóival parallel egyenesek, mely kúpnak tengelye az adott egyenes vagy evvel parallel egyenes, és félnyílása az adott szög.

A forgáskúp csúcspontján átmenő tetszőleges **S** síkra általában a kúpnak két alkotója illeszkedik. Ezeket az alkotókat úgy nyerjük, hogy megszerkesztjük az **S** sík nyomvonalát a kúp egy vezérkörének **V** síkján, e nyomvonal és vezérkör közös pontjaira illeszkedő alkotók a keresett alkotók.

Ebből következik, hogy adott forgáskúp alkotóiból a tér tetszőleges egyenesére általában kettő illeszkedik, mert a tetszőleges egyenesre és a kúp csúcspontjára illeszkedő sík a kúpból két alkotót választ ki és csak ezek az alkotók azok, melyek a tér választott egyenesére illeszkednek.

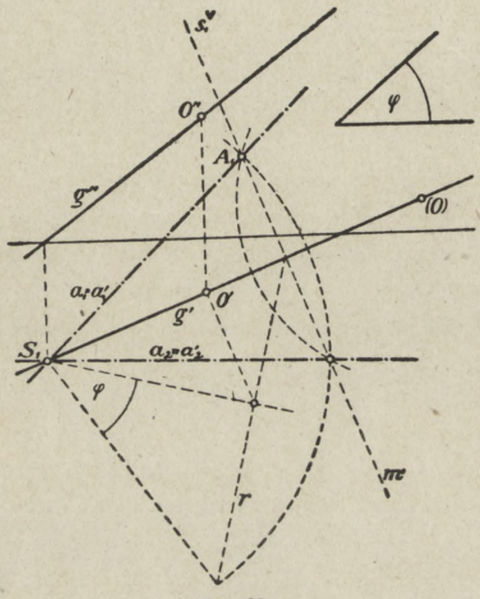
10. feladat: Adva van a $g(g', g'')$ egyenes és az $\mathbf{S}(s_1, s_2)$ sík (164. ábra). Szerkesztessék meg az adott egyenesre és az adott síkra illeszkedő ama a egyenes, mely az adott egyenessel adott φ szöget alkot. A keresett egyenes egy pontja az adott egyenes és adott sík metszéspontja M. Az M pontra illeszkedő és g egyenessel φ szöget alkotó egyenesek forgáskúp alkotói, csúcspontja M és félnyilása φ. E kúpnak $\mathbf{S}$ síkra illeszkedő alkotói lesznek a keresett a alkotók. A szerkesztést úgy rendeztük be, hogy felvettük a g egyenes tetszőleges O pontját, az O pont legyen a kúp vezérkörének középpontja,



164. ábra.

a vezérkör síkja e szerint O pontra illeszkedő és a g egyenesre merőleges $\mathbf{V}$ sík. A vezérkör sugarát külön kell megállapítani, ez ama derékszögű háromszög egyik befogója, melynek másik befogója $\overline{MO}$ távolság valódi nagysága és e befogó melletti szög az adott φ szög. Miután a vezérkör síkját, középpontját, sugarát ismerjük, megszerkesztjük a vezérkör és $\mathbf{S}$ sík közös pontjait. E pontok a $\mathbf{V}$ sík és az adott $\mathbf{S}$ sík közös m egyenesének pontjai. A $\mathbf{V}$ síkot a benne fekvő m egyenessel és O ponttal együtt valamely képsíkba forgatjuk, ott megrajzoljuk a vezérkört, e leforgatott vezérkör a leforgatott m egyenesen kimetszi a vezérkör és $\mathbf{S}$ sík közös pontjainak leforgatottjait. E pontokat a $\mathbf{V}$ síkkal felállítjuk, egy-egy felállított pont az M ponttal meghatározza a keresett a alkotót, a rajzban ezek $a_1(a_1', a_1'')$ és $a_2(a_2', a_2'')$.

11. feladat: Adva van a $g(g', g'')$ egyenes és a φ szög. (165. ábra.) Szerkesztessék az első képsíkban az adott egyenes első nyompontjára illeszkedő és a g egyenessel φ szöget bezáró egyenes. E feladat lényegében az előbbi feladattal azonos feladat. Tehát felvesszük az adott g egyenes O pontját, és e pontra illeszkedő és az adott egyenesre merőleges síkot szerkesztünk, ez a $\mathbf{V}$ sík a forgáskúp vezérkörének síkja, a kúp csúcspontja az adott egyenes első nyompontja, S_1. A vezérkör sugara ama derékszögű háromszög befogója, melynek másik befogója $\overline{S_1O}$ távolság valódi nagysága és e befogó melletti szög az adott φ szög. E derékszögű háromszög átfogója az alkotó hossza. Mivel keresett egyenesünk az első képsíkra illeszkedő egyenes, az alkotó hossza valódi nagyságban látszik. A keresett alkotónak a csúcsponttól különböző végpontja mindenesetre illeszkedik a vezérgörbe síkjának és az első képsíknak közös egyenesére, szóval a vezérgörbe síkjának s_1 első nyomvonalára, ez első nyomvonalra illeszkedő pontok az adott egyenes első nyompontjától az alkotóhosszal egyenlő távolságban vannak. Tehát az első képsíkban az S_1 pont körül, mint középpont körül, az alkotóhosszal, mint sugárral, rajzolt kör a vezérkör síkjának első nyomvonalát a keresett alkotóvégpontokban metszi.



165. ábra.

*

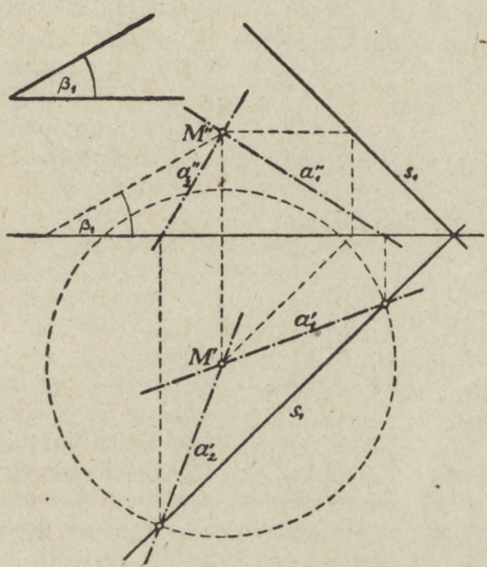
Láttuk, hogy a g egyenes M pontjára illeszkedő egyenesek, melyek a g egyenessel φ szöget alkotnak, forgáskúpfelület alkotói. Ugyanakkor az alkotók a kúp vezérkörének síkjával egyenlő szöget alkotnak, e szög a φ szög pótszöge.

XV. A tér ama egyenesei, melyek adott síkkal adott szöget alkotnak, ama forgáskúp alkotóival parallel egyenesek, mely kúpnak tengelye az adott síkra merőleges és félnyílása az adott szög pótszöge.

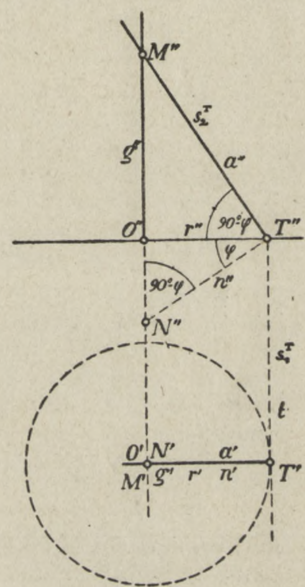
12. feladat: Adva van $\mathbf{V}$ sík, az $\mathbf{S}$ sík és az $\mathbf{S}$ síkra illeszkedő M pont, továbbá a ψ szög. (164. ábra.) Szerkesztessenek meg az $\mathbf{S}$ síkban az M pontra illeszkedő ama egyenesek, melyek a $\mathbf{V}$ síkkal az adott ψ szöget alkotják. E feladat megoldásánál szereplő kúp csúcspontja legyen az M pont. A kúp tengelye az M pontból a $\mathbf{V}$ síkra bocsátott merőleges. Vezérkörének síkja a $\mathbf{V}$ sík, a vezérkör középpontja a tengely és $\mathbf{V}$ sík metszéspontja, O. A vezérkör sugara

egy derékszögű háromszög egyik befogója, e háromszög másik befogója MO távolság és az utóbbi befogóval szemközt fekvő szög az adott ψ szög. Ha a ψ szöget úgy választjuk, hogy az a 164. ábrában szereplő φ szögnek pótszöge, akkor az ott szerkesztett a_1, a_2 egyenesek a keresett egyenesek.

13. feladat: Adva van az **S** sík, e síkra illeszkedő M pont és β_1 szög. (166. ábra.) Szerkesztessenek meg az **S** síkban az M pontra illeszkedő ama egyenesek, melyeknek első képsíkszöge az adott β_1 szög. A feladat megoldásában szereplő kúp csúcspontja az M pont, a kúp tengelye első vetítősugár, a vezérkör síkja az első képsík, a vezérkör középpontja a tengely első képe, a vezérkör sugarának szer-



166. ábra.



167. ábra.

kesztéséhez szükséges háromszög egyik befogója a második képsíkon valódi nagyságban látszik, ez M'' pontnak az $x_{1\,2}$ tengelytől való távolsága, e befogóval szembenfekvő szög az adott β_1 szög, ez adatokkal meghatározott derékszögű háromszög másik befogója a vezérkör sugara. A vezérkört az első képsíkban közvetlenül megrajzolhatjuk. A keresett kúpalkotók végpontjai az első képsíkban egyrészt a vezérkör pontjai, másrészt az adott sík első nyomvonalára illeszkedő pontok. Tehát, ahol a vezérkör az adott sík első nyomvonalát metszi, ott nyerjük a keresett alkotók pontjait.

*

Láttuk, hogy a forgáskúp csúcspontjára illeszkedő síkban általában a kúp két alkotója fekszik. Legyen megint a kúp tengelye g, csúcspontja M, félnyílása φ, egy vezérkörének síkja **V**, a kör középpontja O, sugara r, és legyen a kúp egy kiválasztott alkotója a. (167. ábra.) Ha megszerkesztjük azt az a alkotóra illeszkedő **T** síkot, mely sík az alkotó és tengely összekötő síkjára merőleges, akkor az a alkotó a g tengely normális vetülete a **T** síkon. E szerint a kúp tengelye a **T** síkra és az M pontra illeszkedő tetszőleges egyenessel nagyobb szöget alkot, mint az a egyenessel, szóval a **T** síkra a kúpnak csak egy alkotója illeszkedik. A **T** síkról azt fogjuk mondani, hogy az a kúp egy érintősíkja. Ha a **T** síkot a kúp tengelye körül forgatjuk, akkor a forgatott sík momentán helyzeteinek összessége a kúp érintősíkjainak összessége.

A **T** érintősík a kúp vezérgörbéjének síkját egy egyenesben metszi, ez az egyenes, ugyanúgy, mint a **T** síkra illeszkedő tetszőleges egyenes, a kúpfelületnek csak egy pontjára illeszkedik, ez a pont az egyenes és a alkotó közös pontja. Legyen a **T** sík nyomvonala a **V** síkon a t egyenes, akkor a t egyenes a vezérkör érintője, az érintési pont az a és t egyenesek illeszkedési pontja, T. Az M, O, T pontok összekötő síkja a **T** síkra merőleges, mert a **T** síkot e síkra merőlegesen vettük fel, az előbbi pontok összekötő síkja a **V** síkra is merőleges, mert az $\overline{MO}$ egyenes a **V** síkra merőleges, tehát a három pont összekötő síkján az a alkotó és a T érintési ponthoz tartozó körsugár méri a kúp érintősíkjának és a vezérgörbe síkjának hajlásszögét. Ez a szög nem változik, ha a **T** érintősíkot a kúp tengelye körül forgatjuk, e szerint a forgáskúp érintősíkjai a vezérgörbe síkjával egyenlő szöget alkotnak.

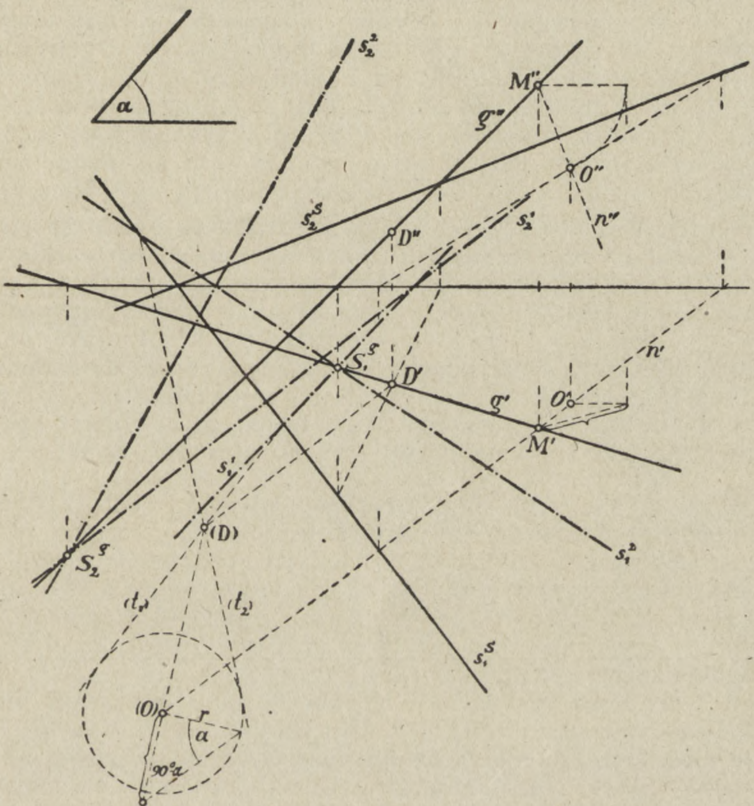
XVI. A tér ama síkjai, melyek adott egyenessel adott szöget alkotnak, ama forgáskúp érintősíkjaival parallel síkok, mely kúpnak tengelye az adott egyenes, vagy az adott egyenessel parallel egyenes és félnyílása az adott szög.

XVII. A tér ama síkjai, melyek adott síkkal adott szöget alkotnak, ama forgáskúp érintősíkjaival parallel síkok, mely kúpnak tengelye az adott síkra merőleges és félnyílása az adott szög pótszöge.

Megállapított eredményeink a 167. ábrában közvetlenül leolvashatók. Az ábrában a kúp tengelye első vetítősugár, az a alkotó a második képsíkkal parallel, a vezérkör síkja az első képsík. Az a alkotó menti érintősík második vetítősík, első nyomvonala a t egyenessel azonos egyenes.

Szerkesszük meg a T pontra illeszkedő és a **T** síkra merőleges egyenest, ez az n egyenes a kúpfelület egy normálisa. Ha egy vezérkör összes pontjaira illeszkedő felületi normálisokat megszerkesztjük, ezeket úgy nyerhetjük, hogy az n egyenest a kúp tengelye körül forgatjuk, mondhatjuk, hogy a tér egy pontjára illeszkedő kúpfelületi normálisok forgáskúpfelületnek alkotói, a normálisok kúpjának tengelye az adott kúp tengelyével azonos vagy vele parallel, félnyílása az eredeti kúp félnyílásának pótszöge. Tudjuk, hogy egyenes iránya megállapítja az egyenesre merőleges sík állását és megfordítva, de akkor, ha adott egyeneshez φ szög alatt hajló *síkot* kívánunk szerkeszteni, e feladatot elintézettnek mondhatjuk, ha az adott egyeneshez $90°—\varphi$ szög alatt hajló *egyenest* szerkesztettünk, mert a megszerkesztett egyenesre merőleges sík az adott egyenessel φ szöget alkot. Ugyanúgy mondhatjuk, hogy adott síkhoz φ szög alatt hajló síkot szerkesztettünk, ha sikerült oly egyenest szerkeszteni, mely egyenes az adott síkkal $90°\text{-}\varphi$ szöget alkot. Szerkesztéseinkben a normálisok kúpját főleg akkor fogjuk igénybe venni, ha a feladatban oly síkot kell szerkeszteni, mely sík két térelemhez egy-egy adott szög alatt hajlik.

Forgáskúp érintősíkjaiból a tér egy tetszőleges pontjára általában kettő illeszkedik. A kúp minden érintősíkja a kúp csúcspontjára illeszkedő sík, tehát a tér *P* pontjára illeszkedő érintősík illeszkedik a *P* pontra és a kúp csúcspontjára s így illeszkedik arra az egyenesre, mely egyenes a *P* pontot a kúp csúcspontjával összeköti. Ez az egyenes a szerkesztendő érintősík minden egyenesére illeszkedik, illeszkedik tehát arra az egyenesre is, melyben az érintősík a vezérkör síkját metszi. Az érintősík a vezérkör síkját oly egyenesben



168. ábra.

metszi, mely egyenes a vezérkör érintője, ennek az érintőnek illeszkedési pontja avval az egyenessel, mely egyenes a *P* pontot a kúp csúcspontjával összeköti, csak ott lehet, ahol a *P* pontot a kúp csúcspontjával összekötő egyenes a kúp vezérkörének síkját metszi. E szerint megszerkesztjük a *P* pont és kúp csúcspontjának összekötő egyenesét, megállapítjuk ez egyenesnek a vezérkör síkjával való metszéspontját, a *D* pontot, e pontból a vezérkörhöz rajzolt érintő a keresett érintősík egy másik egyenese.

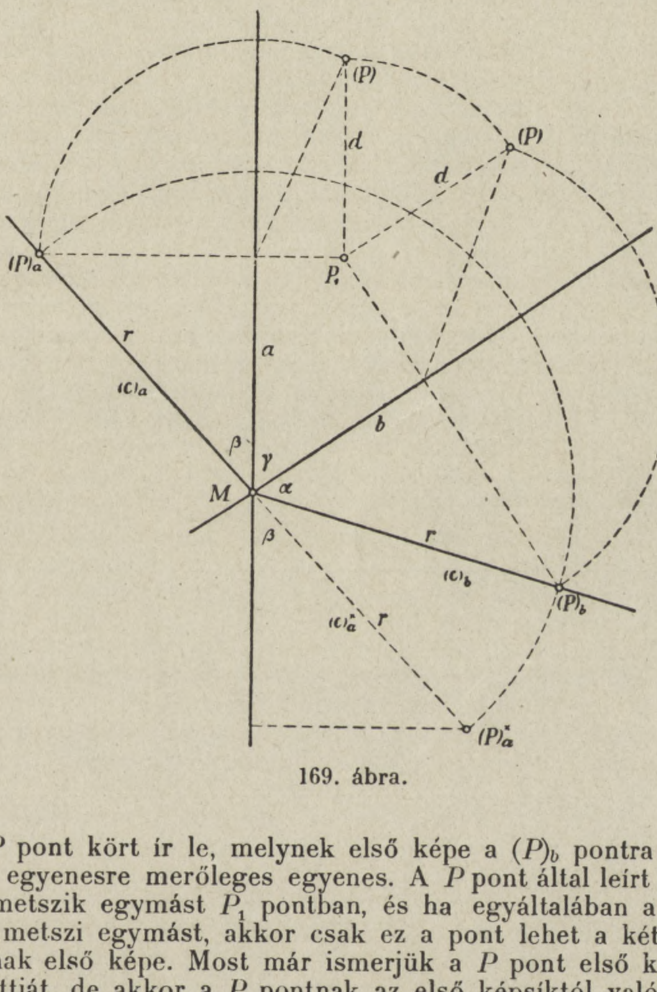
Ha *P* pont a tér végtelenben fekvő pontja, akkor a végtelenben fekvő pontot összekötjük a kúp csúcspontjával, és ennek az egyenesnek a vezérkör síkján lévő metszéspontjából rajzolunk a vezérkörhöz érintőt, ez az érintő és a kúp csúcspontjára illeszkedő sík a kúp ama érintősíkja, mely az adott végtelenben fekvő pontra illeszkedik.

14. feladat: Adva van az S sík, a g egyenes, az α szög. Szerkesztessék a g egyenesre illeszkedő ama sík, mely az adott síkkal az adott szöget alkotja. (168. ábra.) Mivel a tér egy pontjára illeszkedő és az adott síkkal adott szöget alkotó síkok ama kúp érintősíkjai, melynek csúcspontja a tér felvett pontja, a kúp csúcspontjául a g egyenesre illeszkedő tetszőleges M pontot választjuk, de akkor feladatunk nem más, mint a kúpnak a g egyenesre illeszkedő érintősíkjának a szerkesztése. A szerkesztés egyes lépései: *a)* felvettük a g egyenesre illeszkedő M pontot, ez a feladatban szereplő kúp csúcspontja, *b)* az M pontból az adott S síkra merőlegest bocsátottunk, ez az n egyenes a kúp tengelye, *c)* az adott sík a kúp vezérkörének síkja, a vezérkör középpontja az n egyenes és S sík metszéspontja, O, a vezérkör sugara egy derékszögű háromszög egyik befogója, r, melynek másik befogója $\overline{MO}$ valódi nagysága és e befogó melletti szög $90°-\alpha$, *d)* megszerkesztettük a g egyenesnek a vezérkör síkjával, az S síkkal való metszéspontját, ennek jele D, *e)* a vezérkör síkját a benne fekvő D és O pontokkal a sík első nyomvonala körül az első képsíkba forgattuk, *f)* az (O) pont körül megrajzoltuk az r sugarú kört és megszerkesztettük e kör (D) pontra illeszkedő érintőit, ezek (t_1), (t_2), *g)* az így nyert érintőket felállítottuk, *h)* egy-egy felállított érintő a g egyenessel meghatároz egy-egy síkot, egy ilyen sík kielégíti a kívánt feltételeket, ezek $\mathbf{S}_1\,(s_1^1, s_2^1)$, $\mathbf{S}_2\,(s_1^2, s_2^2)$.

151. §. Térelem szerkesztése, mely két adott térelemmel egy-egy adott szöget alkot. E csoportba tartozó ábrázoló geometriai problémák mind egy feladatra vezethetők vissza, ez az alapvető feladat a következő: Adva van két egyenes. a és b, továbbá az M pont. Szerkesztessék az M pontra illeszkedő c egyenes, mely az adott a egyenessel az adott β és az adott b egyenessel az adott α szöget alkotja.

A fenti alapvető feladatot először az adott egyenesek különleges helyzete mellett oldjuk meg. Legyen az adott a és b egyenes két az első képsíkra illeszkedő egyenes, az M pont legyen az adott egyenesek illeszkedési pontja. (169. ábra). Ha a keresett egyenes a c egyenes, akkor a c egyenes egyrészt annak a forgáskúpnak alkotója, melynek csúcspontja M, tengelye a és félnyílása β, másrészt a c egyenes annak a forgáskúpnak is alkotója, melynek csúcspontja M, tengelye b, és félnyílása α, ha a c egyenestől azt követeljük, hogy az a egyenessel β és b egyenessel α szöget alkosson; a c egyenes tehát a két kúpnak egy közös alkotója. A c alkotó megszerkesztettnek mondható, ha az alkotóra illeszkedő P pontnak ismerjük az első képét, a P_1 pontot, és ha ismerjük a P pontnak az első képsíktól való távolságát, legyen ez d, a c alkotó egy másik pontja az M, a két koncentrikus kúp közös csúcspontja. A megszerkesztettnek gondolt c alkotó az a egyenessel síkot határoz meg, ha ezt a síkot leforgatjuk az első képsíkba a nyomvonala körül, akkor a leforgatott c egyenes az M pontra illeszkedik és az a egyenessel β szöget alkot, ez az egyenes $(c)_a$; ugyanúgy a megszerkesztettnek gondolt c alkotó a b egyenessel síkot határoz meg, ha ezt a síkot leforgatjuk az első képsíkba b nyomvonala körül, akkor a leforgatott c egyenes az M

pontra illeszkedik és a b egyenessel α szöget alkot, ez az egyenes $(c)_b$. A c egyenes leforgatottjain felvesszük a P pontot, mivel a P pont a c egyenes egy pontja, kell, hogy a leforgatott pontok az M ponttól egyenlő távolságban legyenek. Ha ezt a távolságot r-rel jelöljük, úgy M körül r sugárral rajzolt kör metszéspontjai a $(c)_a$, $(c)_b$ egyenesekkel a P pont leforgatottjai, ezek $(P)_a$, $(P)_b$. Ha az a nyomvonalú síkot az a nyomvonala körül forgatjuk, akkor e síkra illeszkedő P pont kört ír le, melynek első képe a $(P)_a$ pontra illeszkedő és az a egyenesre merőleges egyenes; ugyanúgy, ha a b nyomvonalú síkot a b nyomvonala körül forgatjuk, akkor e síkra illesz-



169. ábra.

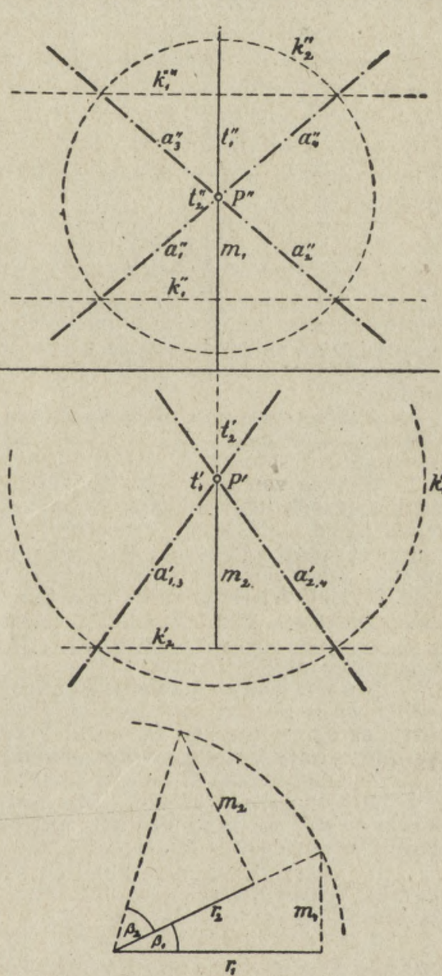
kedő P pont kört ír le, melynek első képe a $(P)_b$ pontra illeszkedő és a b egyenesre merőleges egyenes. A P pont által leírt körök első képei metszik egymást P_1 pontban, és ha egyáltalában a két kör a térben metszi egymást, akkor csak ez a pont lehet a két kör közös pontjának első képe. Most már ismerjük a P pont első képét és leforgatottját, de akkor a P pontnak az első képsíktól való távolsága ama derékszögű háromszög egyik befogója, melynek másik befogója P_1 pontnak a egyenestől való távolsága és átfogója $(P)_a$ pontnak az a egyenestől való távolsága, ill. ama derékszögű háromszög egyik befogója, melynek másik befogója P_1 pontnak b egyenestől való távolsága és átfogója $(P)_b$ pontnak a b egyenestől való távolsága. A P pont első képe, P_1, és első távolsága, d, a térben két pontot határoznak meg, e pontok az első képsíkra nézve szimmetrikus helyzetben vannak, tehát egyelőre két oly c egyenest sikerült szerkeszteni, melyek a kívánt feltételeket kielégítik. De lehet a feladatnak négy megoldása is, ha t. i. a β szöget a leforgatásban az a egyenes mellé úgy rakjuk fel, hogy az előbbi β szögnek csúcsszöge legyen, akkor e szög a egyenestől különböző szárára felmért r távolságban fekvő pont, $(\overset{\times}{P})_a$, szintén kört ír le, ha a körül forgatjuk, e körnek lehet további két közös pontja avval a körrel, melyet a P pont leír, ha azt a b egyenes körül forgatjuk. Az ábrában a felvétel olyan, hogy a feladatnak csak két megoldása van. Nem nehéz megállapítani általában ama feltételeket, melyek mellett a feladatnak nincs megoldása, vagy amikor a feladatnak két, ill. négy megoldása van. Feladatunkban szereplő kúpok alkotóinak hossza az r távolság, tehát a felhasznélt vezérgörbék pontjai az r sugarú gömbfelület pontjai, mely gömbnek centruma az M pont. E szerint mondhatjuk azt is, hogy két koncentrikus kúpfelület közös alkotóit úgy nyerjük, hogy meghatározzuk e kúpfelületek nyomköreit a kúpfelületekkel koncentrikus gömbfelületen, akkor e nyomkörök közös pontjai felé menő kúpalkotók a keresett közös alkotók.

Ha a és b egyenesek általános helyzetű kitérő egyenesek és M pont a tér tetszőleges pontja, akkor az M pontra illeszkedő, az a egyeneshez β szög alatt hajló, a b egyeneshez α szög alatt hajló egyenest az előzők alapján meg tudjuk szerkeszteni. A szerkesztés menete a következő: *a)* felvesszük az M pontra illeszkedő a egyenessel parallel $a^\times$ egyenest és az M pontra illeszkedő b egyenessel parallel $b^\times$ egyenest, *b)* az $a^\times$, $b^\times$ egyenesek összekötő síkját a sík egyik nyomvonala körül a képsíkba forgatjuk a bennefekvő $a^\times$, $b^\times$ egyenesekkel együtt, *c)* az $a^\times$, $b^\times$ egyenesek e helyzete mellett meghatározzuk a c egyenes egy P pontját, úgy, miként azt a 169. ábrában tettük, *d)* az ekkor nyert P_1 pontot az $a^\times$, $b^\times$ egyenesek összekötő síkjával felállítjuk, ekkor nyerjük a (P'_1, P''_1) pontot, *e)* e ponton át az $a^\times$, $b^\times$ egyenesek összekötő síkjára merőlegest állítunk és erre az egyenesre a P_1 ponttól számítva felrakjuk a d távolságot, a távolság végpontja a $P(P', P'')$ pont, *f)* az M és P pontok összekötő egyenese az adott feltételeket kielégítő egyenes.

15. feladat: Adva van a $P(P', P'')$ pont, továbbá a β_1 és β_2 szög. (170. ábra.) Szerkesztessék a P pontra illeszkedő a egyenes, melynek első képsíkszöge β_1 és második képsíkszöge β_2.

Az az egyenes, mely adott síkkal adott szöget alkot, e síkra merőleges egyenessel az adott szög pótszögét alkotja, ha tehát egyenest kívánunk szerkeszteni, mely egyenes két adott síkkal egy-egy adott szöget alkot, akkor oly egyenest kell szerkeszteni, mely egyenes az adott síkokra normális egyenesekkel az adott szögek pótszögeit alkotja, e szerint a mostani feladat lényegében az előbbi feladattal azonos feladat. A 15. feladattal külön csak azért foglalkozunk, mert a feladat kivitelezésében egyszerűsítéseket alkalmazhatunk.

Ama egyenesek, melyek az első képsíkkal az adott β_1 szöget alkotják és P pontra illeszkednek, egyenes körkúp alkotói, e kúp tengelye a P pontra illeszkedő első tengely, félnyílása $90°-\beta_1$, vezérkörének síkja az első képsíkkal parallel. Ama egyenesek, melyek P pontra illeszkednek és második képsíkszögük β_2, oly egyenes körkúp alkotói, melynek tengelye a P pontra illeszkedő második tengely, félnyílása $90^\circ-\beta_2$, vezérkörének síkja a második képsíkkal parallel. Mivel az itt szereplő kúpok vezérkörei egy-egy képsíkkal parallel helyzetű síkban vannak, és ilyen körök képeit közvetlenül megrajzolhatjuk, azért a feladatot e körök tényleges ábrázolásával oldjuk meg. A kúpok vezérköreinek sugarait úgy kell megválasztani, hogy mindkét kúpon az alkotók hossza egyenlő legyen, mert csak ez esetben lesz a két vezérkörnek közös pontja, ha a feladatnak egyáltalában van megoldása.



170. ábra.

A vezérkörök ábrázolása előtt szerkesztünk derékszögű háromszöget, melynek átfogója a felvett alkotóhossz és egyik hegyes szöge az adott β_1 szög. A derékszögű háromszögben a β_1 szöggel szemköztfekvő befogó az első képsíkra merőleges tengelyű kúpnak magassága, m_1, másik befogója e kúp vezérkörének sugara, r_1. Ezek alapján e kúp vezérkörének első és második képét megrajzolhatjuk, ha e vezérkör k_1, akkor első képe kör, melynek középpontja P', sugara r_1, második képe a P'' ponttól m_1 távolságban az x_{12} tengellyel parallel egyenes. Ily módon két k_1 kört nyerünk, e körök első képei födésben vannak. A második képsíkra merőleges tengelyű kúp k_2 vezérkörének ábrázolása előtt szintén szerkesztünk derékszögű háromszöget, melynek átfogója egyenlő az előbbi derékszögű háromszög átfogójával és egyik hegyes szöge az adott β_2 szög, e derékszögű háromszög egyik befogója a második kúp magassága, m_2, másik befogója a kúp vezérkörének sugara, r_2. A k_2 kör második képe kör, középpontja P'', sugara r_2, e kör első képe a P' ponttól m_2 távolságban az x_{12} tengellyel parallel egyenes. Ilyen módon két k_2 kört nyerünk, e körök második képei födésben vannak. Az ábrában a k_2 körök közül csak az egyik van feltüntetve.

Az ábrázolt vezérkörök közös pontjainak száma nyolc, e pontok párosával diametrál fekvő pontok arra a gömbre nézve, melynek középpontja a P, sugara a felvett kúpalkotóhossz. A vezérkörök közös pontjai közül bármelyik az adott P ponttal meghatároz oly egyenest, mely az összes feltételeket kielégíti. Mivel a vezérkörök közös pontjai diametrál fekvő pontok, e feladat feltételeit kielégítő egyenesek száma négy.

*

Ama feladatokat, melyekben síkot kell megszerkeszteni, mely sík egy-egy térelemhez egy-egy adott szög alatt hajlik, mindig e §-ban tárgyalt feladatra vezetjük vissza. Így pl., ha egy pontra illeszkedő, adott első képsíkszögű és adott második képsíkszögű síkot kell szerkeszteni, akkor ez esetben két koncentrikus forgáskúp közös érintősíkjait kellene szerkeszteni, e helyett megszerkesztjük közös csúcspont mellett úgy az egyik, mint a másik kúp normálisainak kúpját, utóbbi kúpok közös alkotóira merőleges síkok az adott képsíkszögű síkok.

152. §. Feladatok.

1. Adva van egy sík második nyomvonala és első képsíkszöge. Szerkesztessék meg a sík első nyomvonala.

2. Adva van két egymásra merőleges sík első nyomvonala és e síkok közös egyenesének első képe. Szerkesztessenek meg e síkok második nyomvonalai.

3. Adva van az adott S síkban két pont, ezek első képei, A' és C'. Szerkesztessék meg az adott síkban ama pallalelogramma, melynek két szembenfekvő csúcspontja A és C, továbbá mindkét képe oblongum.

4. Adva van az $A(A', A'')$ pont, a $g(g', g'')$ egyenes és az a távolság. Szerkesztessék meg annak a szabályos háromszögnek két képe, melynek egy oldala az adott távolság, egy csúcspontja az adott A pont, második csúcspontja az adott egyenesre, harmadik csúcspontja az első képsíkra illeszkedik.

5. Adva van az első képsíkra illeszkedő A és a második képsíkra illeszkedő B pont. Szerkesztessék ama háromszög két képe, melynek egyik csúcspontja az adott A, másik csúcspontja az adott B pont, harmadik csúcspontja az x_{12} tengelyre illeszkedik és a háromszög síkja az x_{12} tengellyel a lehető legnagyobb szöget alkotja.

6. Adva van az a távolság és egy szabályos hatszög síkjának első nyomvonala, s_1. Szerkesztessék meg ama szabályos hatszög két képe, melynek egy oldala az adott távolság és melynek két szomszédos oldala közül az egyik a sík első, a másik a sík második nyomvonalára esik.

7. Adva van az S_1 sík és e síkra illeszkedő A pont, továbbá az S_2 sík és e síkra illeszkedő B pont. Szerkesztessék annak a körnek síkja, középpontja és sugara, mely kör az adott S_1 síkot az A pontban és az adott S_2 síkot a B pontban érinti.

8. Adva van két kör, mindkét körnek ismerjük síkját, középpontját és sugarát. Szerkesztessék ama kör síkja, középpontja, sugara, mely kör az adott körök mindegyikét érinti.

9. Adva van két egyenes, g, l és az S sík. Forgassuk az S síkot a g egyenes körül addig, míg az l egyenessel parallel helyzetbe jut.

10. Adva van két pont, P, Q, a g egyenes és a t távolság. Forgassuk a P pontot a g egyenes körül addig, míg Q ponttól t távolságba jut.

11. Adva van két sík, S_1, S_2, a g egyenes és a φ szög. Forgassuk az S_1 síkot a g egyenes körül addig, míg az S_2 síkkal az adott φ szöget alkotja.

12. Adva van két pont, A, B és az S sík. Szerkesztessék meg az S sík ama egyenese, mely körül az A pontot forgatva a forgó A pont egy momentán helyzete a B pont.

13. Adva van az $\overline{AB}$ távolság két képével, a t távolság valódi nagysága és feltételezett parallel világítás mellett a fénysugár első képe l'. Szerkesztessék a fénysugár második képe ama feltétel alapján, hogy az $\overline{AB}$ távolság első árnyékának hossza az adott t távolsággal legyen egyenlő.

14. Adva van egy torznégyszög. Feltételezett parallel világításnál szerkesztessék meg ama fénysugár két képe, mely fénysugár mellett a torznégyszög bármely síkra vetett árnyéka parallelogramma.

15. Adva van három kitérő egyenes. Szerkesztessék ama parallel világítás, mely mellett az adott három egyenesnek az első képsíkra vetett árnyéka szabályos háromszöget alkot.

16. Adva van két kitérő egyenes, egy sík és egy távolság valódi nagysága. Szerkesztessék meg a kitérő egyeneseknek az adott síkkal ama parallel transzverzálisa, mely transzverzálison az adott kitérő egyenesek által határolt véges rész az adott távolsággal legyen egyenlő.

17. Adva van két kitérő egyenes és egy sík. Szerkesztessék meg a kitérő egyeneseknek az adott síkkal ama parallel transzverzálisa, mely transzverzálison az adott kitérő egyenesek által határolt véges rész minimum.

18. Adva van hat távolság valódi nagyságban. Szerkesztessék oly háromoldalú gúla, melynek egy-egy éle egy-egy adott távolsággal legyen egyenlő.

19. Adva van két képével egy trapézoid alapú gúla és a P pont. Szerkesztessék a P pontra illeszkedő ama sík, melyen a gúla oldallapjai révén nyert nyompoligon parallelogramma.

20. Adva van három sík, S_1, S_2, S_3 és az első képsíkban az ABC háromszög. Szerkesztessék az a háromoldalú hasáb, melynek alaplapja az adott háromszög és az első képsíkkal párhuzamos födőlapjának csúcspontjai rendre az adott síkokra illeszkedő pontok.

21. Adva van három kitérő egyenes, a, b, c. Szerkesztessék az a parallelepipedon, melynek egyik éle az a egyenesre, egy másik éle a b egyenesre és egy harmadik éle a c egyenesre esik.

22. Adva van az A pont, az S sík és a g egyenes. Szerkesztessék ama szabályos tetraeder, melynek egyik csúcspontja az A pont, egyik lapja az S síkban van és az A pontra illeszkedő egyik határoló síkja a g egyenessel parallel.

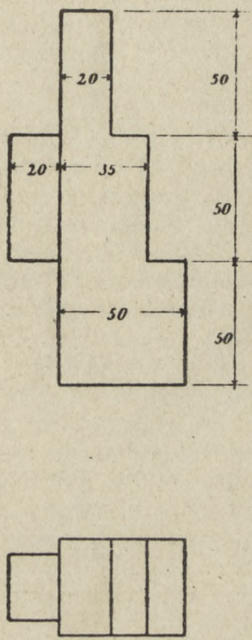
23. Adva van két pont, A, F és a g egyenes. Szerkesztessék az a szabályos oktaeder, melynek szembenfekvő csúcspontjai az adott pontok és melynek A csúcspontból kiinduló egyik éle a g egyenesre illeszkedik.

HARMADIK FEJEZET.

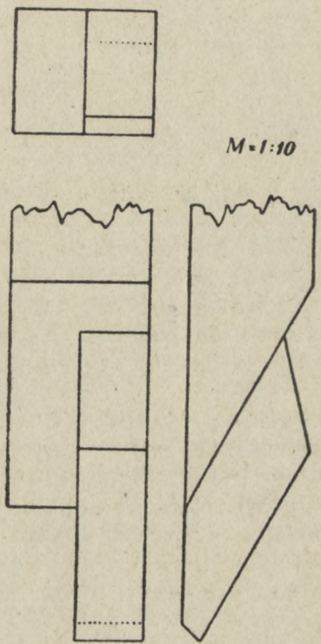
ORTHOGONÁLIS AXONOMETRIA.

Műszaki okjektum előállításánál az elgondolás, a tervezés és a kivitelezés fázisait különböztethetjük meg. Ábrázoló geometriai szempontból a tervezés fázisa érdekel. A tervező az elgondolt objektum tervét, rajzát egy rajzlapon felrakja, felhordja. A tervezésnél az objektum rajza vagy az egész objektum rajza, avagy az objektum részeinek rajzaiból tevődik össze. Egy-egy rajz ritkán az eredeti objektumnak merőleges vetülete, legtöbbször az eredeti alakzatnak a rajzon feltüntetett méretarány szerint kisebbített, illetőleg nagyobbított alakzatnak orthogonális projekciója. A rajz az objektumról csak akkor nyujt teljes tájékoztatást, ha az objektumnak két különböző orthogonális projekcióját mutatja. A gyakorlatban az objektum első képét az alakzat alaprajzának, a második képét az alakzat felrajzának és a sokszor csatolt harmadik képét az alakzat oldalrajzának mondjuk. Az első képsík az alaprajz síkja, a második képsík a felrajz síkja, a harmadik képsík az oldalrajz síkja. A tervező az elgondolt objektumot a három képsíkkal szemben úgy helyezi el, hogy az alakzat méretarány szerinti méreteit lehetőleg közvetlenül felrakhassa, teheti pedig ezt akkor, ha az objektum élei egy-egy képsíkkal parallel helyzetben vannak. E szerint a tervező oly technikai objektumot, melynek élei főleg három egymásra merőleges egyenessel parallelek, úgy fogja elhelyezni, hogy az egymással parallel élek az x_{12}, illetőleg az x_{13}, illetőleg az x_{23} projekció tengellyel parallel helyzetben legyenek. Ezzel az alakzatot egy térbeli derékszögű koordinátarendszerre vonatkoztatja, a koordinátarendszer tengelyei rendre: $x_{12} \equiv x$, $x_{13} \equiv y$, $x_{23} \equiv z$; koordinátasíkjai rendre: $P_1 \equiv [xy]$, $P_2 \equiv [xz]$, $P_3 \equiv [yz]$; kezdőpontja, O, a három projekció tengely közös pontja. Az objektum egy tetszőleges P pontjának van egy-egy tengelyprojekciója az x, az y és a z tengelyen, legyenek ezek rendre P_x, P_y, P_z, akkor rendre $\overline{OP_x}$, $\overline{OP_y}$, és $\overline{OP_z}$ a P pont x, y, z koordinátái. Az O, P', P'', P''', P_x, P_y, P_z és P pontok egy parallelepipedon, a P pont *projiciáló parallelepipedonjának* csúcspontjai. Amennyiben a koordinátarendszer kezdőpontjából kiindulva a P pont projiciáló parallelepipedonjának élei mentén haladva kívánunk jutni az eredeti P ponthoz, akkor rendesen az $OP_xP'P$ utat fogjuk követni, ahol $OP_x = x$, $P_xP' = y$ és $P'P = z$. A térbeli koordinátarendszerre vonatkoztatott pontnak koordinátáit előjellel látjuk el, így x pozitív, ha OP_x az x tengely pozitív felén van, stb. Hogy az O pont által féltengelyekre bontott tengely melyik fele pozitív, illetőleg negatív, az megállapodás dolga.

Legyen a tervező részéről elgondolt objektum egy pofaszorító, illetőleg egy gerenda ferde saroklapolással. Ha e tárgyakról készített tervek a 171. ábrában, illetőleg a 172. ábrában látható tervekkel azo-

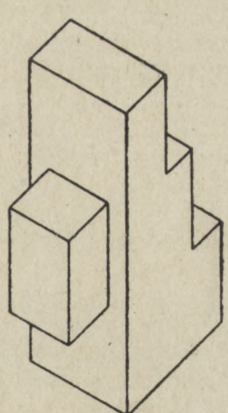


171. ábra.

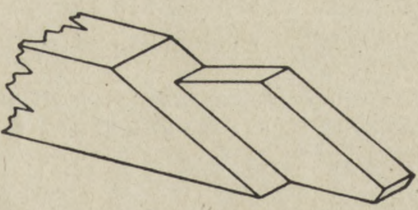


172. ábra.

nosak, akkor ezek szemlélete rögtön meggyőz arról, hogy a tervek rajzai nem képiesek. Nem képiesek azért, mert az objektum csúcspontjai között találunk első, második, illetőleg harmadik födőpontokat, a legtöbb él egyenese egy-egy képsíkra nézve vetítő sugár, végül a határoló síkrészek síkjai gyakran valamely képsíkra nézve vetítő síkok. Ezek mind oly körülmények, melyek a rajz képiességét, térhatását lerontják. Az eddigiek alapján az



173. ábra.



174. ábra.

objektum képies képét akkor nyerjük, ha 1. bevezetünk kétszeres transzformációval új képsíkot, mely a három koordináta sík mindegyikével szemben általános helyzetű, vagy ha 2. az okjektumra kétszeri tengely körüli forgatást alkalmazunk. Mint tudjuk, mindkét út annyira körülményes, hogy gyakorlati alkalmazásáról le kell mondanunk. Az elmondottak új ábrázoló geometriai módszer bevezetésére késztetnek, melynek segítségével egy térbeli derékszögű koordinátarendszerre vonatkoztatott alakzatnak oly képies képe készíthető, mint amilyen pl. a pofaszorítónak a 173. ábrában, vagy a ferde saroklapolású gerendának a 174. ábrában látható képe. E módszer az orthogonális axonometria.

153. §. Az orthogonális axonometria. *Az ábrázoló geometria ama módszere, mely megtanít egy derékszögű koordinátarendszerre vonatkoztatott alakzat orthogonális képének szerkesztésére kizárólag az alakzat pontjainak koordinátáiból oly képsíkon, mely képsík a koordinátarendszer tengelyeivel szemben általános helyzetű, az orthogonális axonometria.* Így az axonometria alapfeladatának mondható a következő feladat: *Ábrázoltassék három koordinátáival adott pont axonometrikusan.* Az alapfeladat megoldását előkészítjük: *a)* a tengelykereszt, *b)* egy pont egyes koordinátáinak ábrázolásával.

154. §. A tengelykereszt képe. A koordinátarendszer x, y és z tengelyei három egyenesből álló alakzatot szolgáltatnak, e három egyenes, melyek közül mindegyik a másik kettőre merőleges, a tengelykereszt. A képsík, melyre a derékszögű koordinátarendszert, a térbeli alakzatot, továbbá a térbeli alakzat alaprajzát, felrajzát, oldalrajzát merőlegesen vetítjük, az axonometrikus képsík. Az axonometrikus képsík a rajzlap síkja, e síkról láthatósági viszonyok feltüntetésénél azt fogjuk feltételezni, hogy átlátszó.

A képsíkot a tengelykereszttel szemben általános helyzetben kell felvenni, tehát a képsík a tengelykereszt minden egyes tengelyét végesben fekvő pontban metszi, egy-egy tengely nyompontjában. Legyenek e pontok S_x, S_y és S_z. E három pont közül kettő-kettő összekötő egyenese egy-egy koordinátasíknak nyomvonala az axonometrikus képsíkon, e nyomvonalak általában háromszöget alkotnak, az axonometrikus ábrázolás nyomháromszögét. A koordinátasíkok nyomvonalai akkor nem alkotnak szokásos értelemben vett háromszöget, ha az axonometrikus képsíkot a derékszögű koordinátarendszer kezdőpontjára illeszkedően választjuk. Ekkor a nyomvonalak a kezdőpontra illeszkedő egyenesek. Ezt az esetet az axonometrikus ábrázolásnál mindig kizárhatjuk, mert egy alakzat axonometrikus képe, továbbá alaprajzának, felrajzának és oldalrajzának axonometrikus képe nem változik, ha a tengelykeresztet önmagával párhuzamosan az axonometrikus vetítősugár irányában tetszőlegesen elmozdítjuk.

Az axonometrikus ábrázolás nyomháromszöge mindig hegyesszögű háromszög. Ennek bizonyítására vezessük be a következő jelöléseket:

$$S_yS_z = a, \quad S_zS_x = b, \quad S_xS_y = c,$$
$$OS_x = u, \quad OS_y = v, \quad OS_z = w,$$

akkor e távolságok között a következő összefüggések állanak fenn:

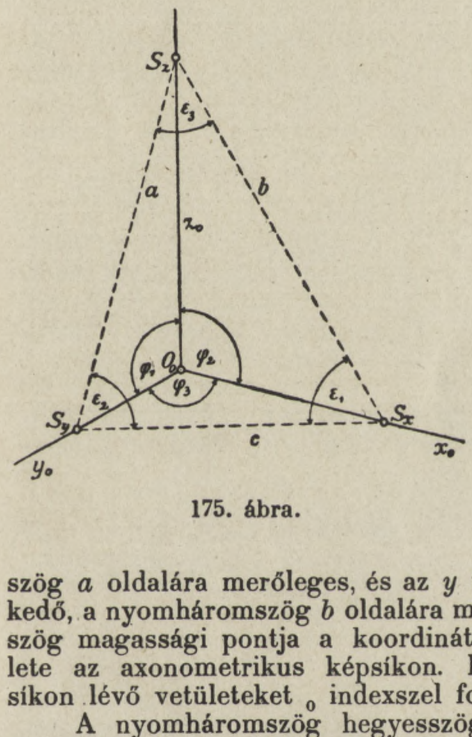
$$a^2 = v^2 + w^2, \quad b^2 = w^2 + u^2, \quad c^2 = u^2 + v^2,$$

ebből

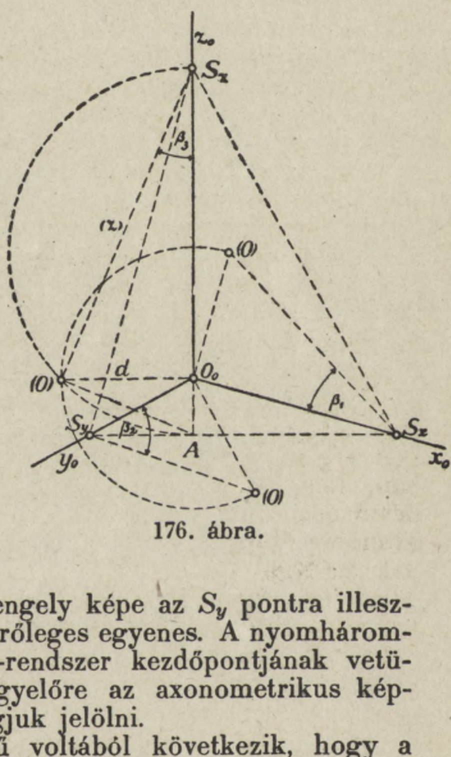
$$a^2 < b^2 + c^2, \quad b^2 < c^2 + a^2, \quad c^2 < a^2 + b^2.$$

Az utolsó sorban álló összefüggések szerint a nyomháromszög minden két oldalának négyzetösszege nagyobb a harmadik oldalnál, de akkor a síktrigonometria Carnot-tételére való hivatkozással két-két oldal által bezárt szög hegyesszög.

Az axonometrikus képsíkban rajzolt hegyesszögű nyomháromszög meghatározza a tengelykereszt képét. Így a z tengely képe mindenesetre az S_z pontra illeszkedő egyenes, de a z tengelyről egyébként tudjuk, hogy az a térben az $[xy]$ koordinátasíkra merőleges, és mivel orthogonális parallel projekcióban síkra merőleges egyenes képe a sík nyomvonalára merőleges egyenes, és $[xy]$-nak nyomvonala az S_xS_y egyenes, a z tengely képe a nyomháromszög c oldalához tartozó magasság egyenesével azonos egyenes. (175. ábra.) Ugyanúgy az x tengely képe az S_x pontra illeszkedő, a nyomháromszög a oldalára merőleges, és az y tengely képe az S_y pontra illeszkedő, a nyomháromszög b oldalára merőleges egyenes. A nyomháromszög magassági pontja a koordináta-rendszer kezdőpontjának vetülete az axonometrikus képsíkon. Egyelőre az axonometrikus képsíkon lévő vetületeket $_0$ indexszel fogjuk jelölni.



175. ábra.



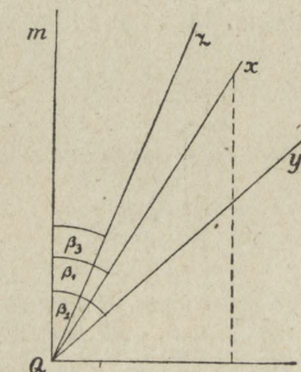
176. ábra.

A nyomháromszög hegyesszögű voltából következik, hogy a tengelykereszt ama féltengelyeinek vetületei, melyek az S_x, S_y, S_z pontokra illeszkednek, párosával tompaszöget alkotnak, mivel

$$\varepsilon_1 + \varphi_1 = 2R, \quad \varepsilon_2 + \varphi_2 = 2R, \quad \varepsilon_3 + \varphi_3 = 2R,$$

ahol ε_1, ε_2, ε_3 a nyomháromszög belszögei és φ_1, φ_2, φ_3 a féltengelyek vetületei által bezárt szögek.

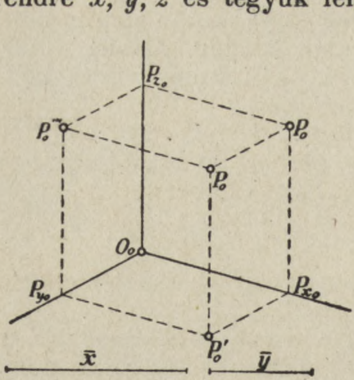
Legyen a z tengely képének, a z_0 egyenesnek metszéspontja a nyomháromszög c oldalával A. (176. ábra.) Akkor az A, S_z, O pontok a térben egy derékszögű háromszög csúcspontjai, a derékszögű háromszög $\overline{AS_z}$ oldala a háromszög átfogója és a háromszög átfogójához tartozó magasság talppontja O_0. Ha e háromszöget a képsíkban fekvő átfogója körül a képsíkba forgatjuk, akkor az átfogóhoz tartozó magasság beforgatottja az O_0 pontban az átfogóra állított merőleges egyenesen lesz, másrészt a derékszög csúcsa az átfogó fölé rajzolt félkörön is van, s így a beforgatott magasság és félkör közös pontja a képsíkba forgatott kezdőpont, (O). Az O_0, (O) pontok távolsága a koordinátarendszer kezdőpontjának a képsíktól való távolsága, d. Az S_z és (O) pontok összekötő egyenese a képsíkba forgatott z tengely, (z). A z tengely képe és képe körüli beforgatottja által bezárt szög a z tengely képsíkszöge, β_3. A képsíkszög egy d befogójú derékszögű háromszögnek e befogóval szemköztfekvő szöge, melynek másik befogója az $\overline{S_zO}$ képe. Ilyen derékszögű háromszögekkel szerkesztettük meg az ábrában a β_1, β_2 szögeket, az x, illetőleg y tengely képsíkszögét.



177. ábra.

Egy tengelynek megszerkesztett képsíkszöge alapján meghatározhatjuk e tengelyre felmérendő távolság képhosszát. Mivel e feladat axonometrikus képek készítésénél folyton ismétlődik, a képhossz szerkesztését úgy rendezzük be, hogy egy m egyenes mellé (177. ábra) felrakjuk a β_1 szöget, e szögnek x szárára a szög Q csúcspontjától számítva felmérjük az adott távolságot, e távolság végpontjának távolsága a Q ponton átmenő m egyenesre merőleges egyenestől a keresett távolság. Ha az x tengelyen lévő távolság t, akkor e távolság képhossza $t_0 = t \cos \beta_1$, a szerkesztés berendezéséből leolvashatjuk, hogy t_0 tényleg a fenti összefüggést kielégítő távolság. Hasonlóan járunk el az y, illetőleg z tengelyen lévő távolságok képhosszának megszerkesztésénél.

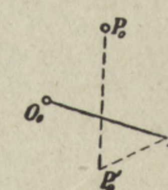
155. §. Pont axonometrikus ábrázolása. Legyenek egy derékszögű koordinátarendszerre vonatkoztatott P pont koordinátái rendre $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ és tegyük fel, hogy a tengelykereszt képe a 176. ábrában látható képpel azonos. A pont axonometrikus képét úgy szerkesztjük, hogy megszerkesztjük azon törtvonal egyes részeinek axonometrikus képeit, mely törtvonalnak kezdőpontja a koordinátarendszer kezdőpontja és végpontja az eredeti P pont. Pl. (178. ábra) vegyük az $OP_xP'P$ pontokkal jellemzett törtvonalat, akkor $OP_x = x$ képét az előzők szerint meg tudjuk szerkeszteni, a P_x pont képe a P_{x0} pont; a P_x, P' összekötő egyenese a térben a koordinátarendszer y tengelyével parallel egyenes, de parallel egyenesek képei parallelek, tehát a P_x, P' pontok összekötő egyenesének képét megrajzolhat-



178. ábra.

juk, erre az egyenesre kell felrakni a P_{x0} ponttól számítva az eredeti pont $\overline{y}$ koordinátájának képhosszát, mivel azonban a legutóbb rajzolt egyenes a térben az y tengellyel parallel egyenes és mert parallel egyenesekre felmért egyenlő távolságok képhosszai egyenlők, megrajzolhatjuk az előzők szerint P' pont axonometrikus képét; a törtvonal utolsó szakasza, $P'P$, egy a z tengellyel parallel egyenesen van, ezért képének szerkesztésénél ugyanúgy járunk el, mint előbb az y tengellyel parallel egyenes esetében. A P pont megszerkesztett axonometrikus képe, P_0, és alaprajzának axonometrikus képe, P_0', lehetővé teszi a pont egész projiciáló parallelepipedonjának axonometrikus ábrázolását, mert egy parallelepipedon három különböző irányú élének képéből a parallelepipedon képe kiegészíthető. Az ábrában a P_{y0}, illetőleg P_{z0} pont a P pontnak az y, illetőleg z tengelyen lévő tengelyprojekciójának axonometrikus képe és P_0'', illetőleg P_0''' a pont felrajzának, illetőleg oldalrajzának axonometrikus képe. E § alapján mondhatjuk, hogy egy pontnak axonometrikus képe és valamelyik rajzának axonometrikus képe a pont többi rajzainak axonometrikus képeit meghatározza, de az ismeretes két kép mindig egy geometriai feltételt kielégít, így $|P_0, P_0'|$ a z tengely képével parallel egyenes stb. Az eredeti pont ábrázoltnak mondható akkor is, ha két rajzának axonometrikus képét ismerjük. A pont két rajzának axonometrikus képe nem vehető fel egymástól függetlenül, pl. a pont alaprajzának és felrajzának axonometrikus képe csak akkor egy eredeti pont alaprajzának és felrajzának axonometrikus képe, ha az alaprajz képére illeszkedő és az y tengely képével parallel egyenes, továbbá a felrajz képére illeszkedő és a z tengely képével parallel egyenes az x tengely képének egy és ugyanazon pontjára illeszkedő egyenesek.

156. §. Axonometrikusan ábrázolt pont rekonstrukciója. Pont rekonstrukcióján értjük a ponthoz tartozó koordináták valódi méreteinek meghatározását. Tegyük fel, hogy az $OP_xP'P$ törtvonal axonometrikus képét ismerjük, de akkor ismerjük a pont minden koordinátájának képhosszát is. (179. ábra.) Mint tudjuk, egy-egy koordináta képhosszát megállapítja az a szög, melyet a koordinátával parallel tengely az axonometrikus képsíkkal bezár. Tehát a rekonstrukciónál mindenekelőtt meg kell szerkeszteni a tengelyek képsíkszögeit. E végett a fenti törtvonal képe alapján megrajzoljuk a tengelykereszt képét. Egy-egy tengely képe az O_0 pontra illeszkedő és a törtvonal egy-egy egyenesével parallel egyenes. A tengelykereszt képe a nyomháromszög három magassága. E szerint a nyomháromszög oldalait az egyes tengelyek képeire merőlegesen kell rajzolni, de úgy, hogy a háromszög egy-egy csúcspontja egy tengely képére illeszkedő pont legyen. Az így megszerkeszthető nyomháromszögek közül bármelyik alkalmas a tengelyek képsíkszögeinek meghatározásához, mert egy nagyobb nyomháromszögről kisebb nyomháromszögre való áttérés csak azt jelenti, hogy a térbeli derékszögű koordinátarendszert az axonometrikus vetítősugár irányában önmagával párhuzamosan eltoljuk úgy, hogy a koordinátarendszer kezdőpontjának távolsága az axonometrikus



179. ábra.

képsiktól kisebb legyen. A felvett háromszög alapján megszerkesztjük a tengelyek képsíkszögeit, akkor

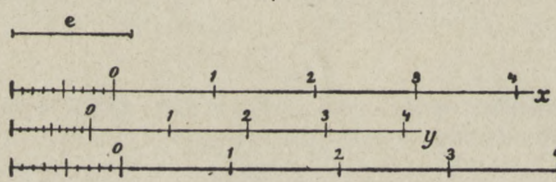
$$\overline{x} = \frac{\overline{O_0 P_{x0}}}{\cos\beta_1}, \quad \overline{y} = \frac{\overline{P_{x0} P_0'}}{\cos\beta_2}, \quad \overline{z} = \frac{\overline{P_0' P_0}}{\cos\beta_3}$$

kifejezések szerkesztése jelenti feladatunk megoldását.

157. §. Különböző orthogonális axonometrikus ábrázolások. Láttuk, hogy a képsíkban felvett nyomháromszög meghatározza minden tengely képsíkszögét. A képsíkszög ismerete alapján meg tudtuk szerkeszteni egy-egy tengelyre vagy egy-egy tengellyel parallel egyenesre felmért távolság képhosszát. Legyen valamely objektum tervezésénél használt mértékegység e, szerkesszük meg ennek képhosszát az x, y, z tengely axonometrikus képén. Legyenek a szerkesztett távolságok rendre e_1, e_2, e_3. Akkor

$$\frac{e_1}{e} = \cos\beta_1, \quad \frac{e_2}{e} = \cos\beta_2 \quad \text{és} \quad \frac{e_3}{e} = \cos\beta_3$$

a rövidülési számok, helyesebben a rövidülési tényezők. Rakjuk fel egy egyenesre az e_1 távolságot többször egymásután, ekkor az így beosztott egyenes az x tengely skálája, röviden az *első skála*. Hasonlóan előállíthatjuk az y és z tengely skáláját, a *második és harmadik skálát.* A 180. ábrában a mellékelt e egység szerinti skálákat



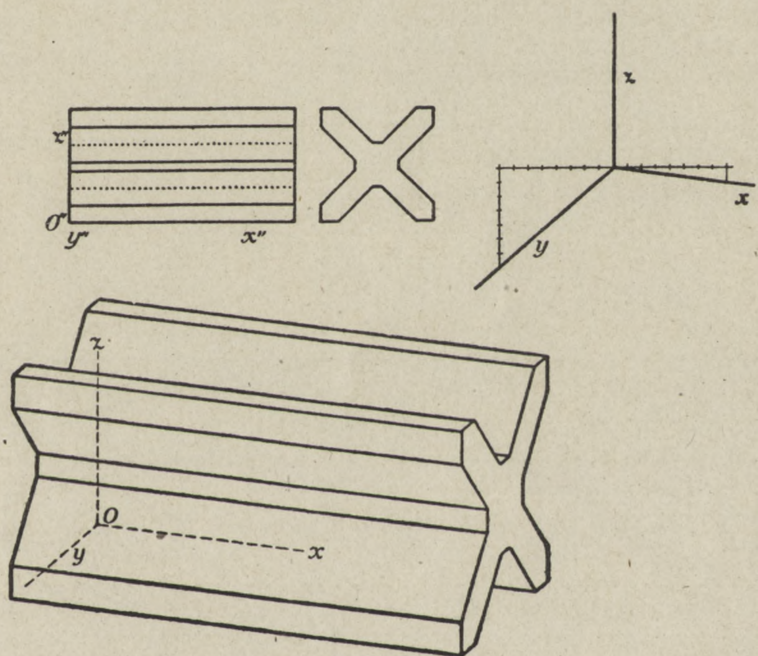
180. ábra.

láthatjuk ama feltételezett tengelykereszt projekció mellett, melyet előbb a koordinátáival adott P pont axonometrikus ábrázolásánál alkalmaztunk.

A tengelyek axonometrikus skálái lehetnek különbözők, ez más szóval azt jelenti, hogy minden tengely az axonometrikus képsíkkal más-más szöget alkot, a tengelykeresztnek ilyen vetülete mellett az alakzat axonometrikus képe *trimetrikus,* vagy *anizometrikus.* Amenynyiben két skála egyezik, vagyis két tengely alkot az axonometrikus képsíkkal egyenlő szöget, akkor az alakzat axonometrikus képe *dimetrikus,* a nyomháromszög ekkor egyenlőszárú háromszög. Ha a három tengely skálája egyezik, akkor az alakzat képe *izometrikus,* a nyomháromszög egyenlőoldalú háromszög.

A nyomháromszög mindenkor megállapítja a tengelykereszt és axonometrikus képsík viszonylagos helyzetét, de nem egyértelműen. Egy nyomháromszög két tengelykereszt képét állapítja meg, a két tengelykereszt az axonometrikus képsíkra nézve orthogonális szimmetriában van. Ezentúl feltesszük azt, hogy a koordinátarendszer kezdőpontja az axonometrikus képsík mögött van, de akkor e megállapodás mellett a nyomháromszög a koordinátarendszer és axonometrikus képsík viszonylagos helyzetét egyértelműen állapítja meg. A függélyes helyzetben gondolt rajzlapsíkon a nyomháromszög $|S_x, S_y|$ oldalát rendesen vízszintesen választjuk, ekkor a z tengely nyompontja lehet a vízszintesen rajzolt egyenes fölött vagy alatt. Első esetben az axonometrikus képsík előtt igen nagy távolságban lévő szemlélő az $[xy]$ koordinátasík és e síkkal parallel sík mindegyikének felső oldalát látja, az alakzat képe úgynevezett *felülnézet;* a második esetben a szemlélő az $[xy]$ koordinátasík és e síkkal parallelsík mindegyikének alsó oldalát látja, az alakzat képe *alulnézet.*

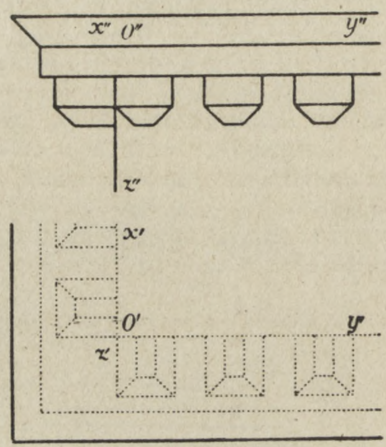
A *181. ábrában* egy igazító prizmának dimetrikus képe látható felülnézetben. Általában valamely alakzat axonometrikus ábrázolását



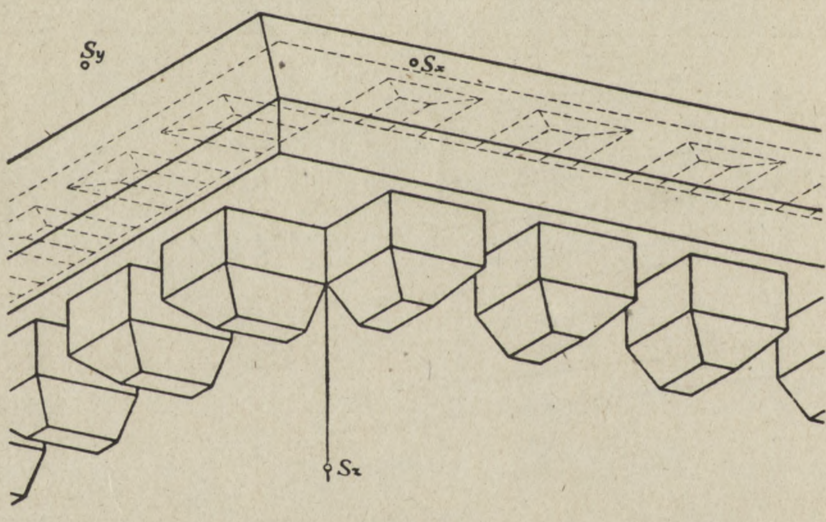
181. ábra.

úgy kezdjük, hogy megszerkesztjük az egész alakzat alaprajzának axonometrikus képét és erre a képre mintegy felépítjük az alakzat axonometrikus képét. Az ajánlott eljárástól csak akkor térünk el, ha az alakzat alaprajza magára az alakzatra nézve kevésbbé jellemző. Így a jelen esetben az alakzat alaprajza leginkább az x tengellyel parallel egyenesekből áll, ennek a képnek pedig alig van térhatása, sokkal jellemzőbb az alakzat oldalrajza s így jobb, ha a kép készítésénél az alakzat oldalrajzából indulunk ki.

Megjegyzendő, hogy a tengelykereszt képét úgy választottuk, amint műegyetemünkön az szokásban van axonometrikus géprajzoknál. Az igazító prizmának felényire kisebbített méretekben adott második és harmadik képe meggyőz arról, hogy az axonometrikus kép készítésénél az x és z tengely irányában valódi méreteket raktunk fel, míg az y tengely irányában az eredeti méretek felét raktuk fel. Hogy ez az eljárás milyen szempontok mellett jogosult, azt a 159. §-ban fogjuk részletezni.



A *182. ábrában* egy koronapárkányrészletet ábrázoltunk axonometrikusan. A kép trimetrikus és alulnézet. Alaprajz síkjául azt a horizontális síkot választottuk, mely a párkányzat legmagasabb horizontális két élét tartalmazza. A párkányrészlet felényire kisebbített első és második képéből, a megadott nyomháromszög, S_x, S_y, S_z, alapján, mindenekelőtt megszerkesztettük az alakzat alaprajzának axonometrikus képét a tengelykereszt és alakzat oly



182. ábra.

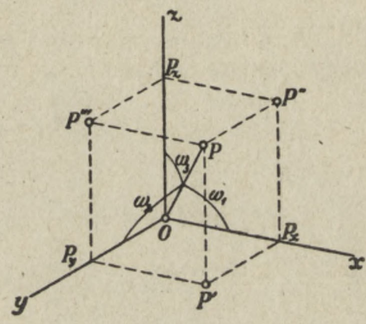
viszonylagos helyzete szerint, amint azt a felényire kisebbített rajz mutatja. Végül egy-egy pont axonometrikus alaprajzán át a z tengely képével parallel egyenesre lefelé felmértük az egyes pontok megrövidült z koordinátáit.

158. §. Az orthogonális axonometriában bevezetett cos β_i, e, e_i, β_i, φ_i közti kapcsolatok. Vegyünk fel a térben egy derékszögű koordinátarendszerre vonatkoztatott tetszőleges P pontot és miután a P pont projiciáló parallelepipedon csúcspontjait a szokásos módon jelöltük, (183. ábra,) rajzoljuk meg a parallelepipedon OP diagonálisát. A diagonálisnak a tengelyekkel alkotott szögei legyenek rendre ω_1, ω_2, ω_3. Akkor

$$\cos\omega_1 = \frac{\overline{OP_x}}{\overline{OP}}, \quad \cos\omega_2 = \frac{\overline{OP_y}}{\overline{OP}}, \quad \cos\omega_3 = \frac{\overline{OP_z}}{\overline{OP}}.$$

Ha ezeket az egyenleteket négyzetre emeljük és összeadjuk, a tér egy tetszőleges egyenesének a tengelyekkel alkotott szögei közt fennálló összefüggést nyerjük, mely szerint:

$$\cos^2\omega_1 + \cos^2\omega_2 + \cos^2\omega_3 = 1. \quad (1)$$



183. ábra.

Tegyük fel, hogy az előbbi P pont legyen azonos a koordinátarendszer kezdőpontjának axonometrikus képével, vagyis $P \equiv O_0$. Ez esetben

$$\omega_1 + \beta_1 = \omega_2 + \beta_2 = \omega_3 + \beta_3 = \frac{\pi}{2},$$

de akkor az (1) alapján lesz

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \beta_3\right) = 1,$$

vagyis

$$\sin^2\beta_1 + \sin^2\beta_2 + \sin^2\beta_3 = 1,$$

illetőleg

$$\cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\beta_3 = 2. \qquad (2)$$

Legyen

$$\cos\beta_1 = \frac{e_1}{e} = l, \quad \cos\beta_2 = \frac{e_2}{e} = m, \quad \cos\beta_3 = \frac{e_3}{e} = n,$$

akkor a (2) alatti egyenlet a következő egyenletekkel egyenlő értékű

$$l^2 + m^2 + n^2 = 2 \qquad (2^{\times})$$

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 2e^2. \qquad (2^{\times\times})$$

Mondhatjuk tehát, hogy *az orthogonális axonometriában a rövidülési számok négyzetösszege 2,* illetőleg *a skálaagységek négyzetösszege az eredeti mértékegység négyzetének kétszerese.*

Mivel

$$\cos\beta_i < 1, \qquad (i=1, 2, 3)$$

(2) alapján

$$\cos^2\beta_2 + \cos^2\beta_3 > 1,$$
$$\cos^2\beta_3 + \cos^2\beta_1 > 1,$$
$$\cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 > 1,$$

vagyis

$$m^2 + n^2 > 1, \quad n^2 + l^2 > 1, \quad l^2 + m^2 > 1. \qquad (3)$$

Szóval: Két rövidülési szám négyzetösszege nagyobb az egységnél, ezt úgy is mondhatjuk, hogy két rövidülési szám négyzetösszege nagyobb a harmadik rövidülési szám négyzeténél, e szerint

$$l^2 < m^2 + n^2, \quad m^2 < n^2 + l^2, \quad n^2 < l^2 + m^2. \tag{4}$$

Ha a (4) alatti egyenlőtlenségekben a mértékegységet és a skálaegységeket szerepeltetjük, akkor a skálaegységekre vonatkozó következő egyenlőtlenségeket nyerjük:

$$e_1^2 < e_2^2 + e_3^2, \quad e_2^2 < e_3^2 + e_1^2, \quad e_3^2 < e_1^2 + e_2^2. \tag{5}$$

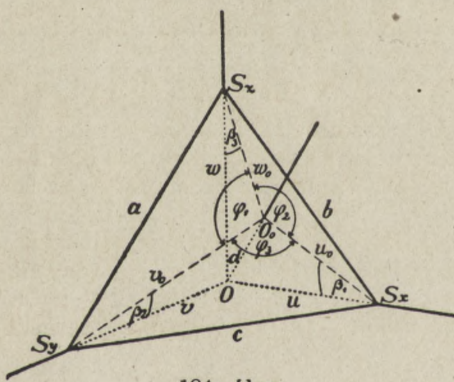
A tengelyek képsíkszögei és a skálaegységek közötti összefüggéseket is nyerhetünk, így

$$\cos^2 \beta_i = \frac{e_i^2}{e^2} = \frac{2e_i^2}{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}, \quad (i=1, 2, 3) \tag{6}$$

illetőleg

$$\operatorname{tg}^2 \beta_i = \frac{1 - \cos^2 \beta_i}{\cos^2 \beta_i} = \frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 - 2e_i^2}{2e_i^2}, \quad (i=1, 2, 3) \tag{7}$$

Az orthogonális axonometriában a nyomháromszög megállapította a tengelykereszt képét és a tengelykereszt tengelyeinek képsíkszögeit, illetőleg a tengelykereszt képe megállapította a nyomháromszög belszögeit és a tengelykereszt tengelyeinek képsíkszögeit. Szóval: a φ_i szögek meghatározzák a β_i szögeket és megfordítva. Állapítsuk meg e szögekre vonatkozó összefüggéseket. E végett projiciáljuk a térbeli tengelykeresztet és az axonometrikus képsíkot egy tetszőleges új képsíkra úgy amint azt a 184. ábra mutatja. Akkor az $O_0S_xS_y$ általános háromszög és az OO_0S_x, OO_0S_y, OS_xS_y derékszögű háromszögek oldalainak az ábrán feltüntetett jelölése alapján felírhatjuk, hogy



184. ábra.

$$c^2 = u_0^2 + v_0^2 - 2u_0v_0 \cos \varphi_3$$

ebből

$$\cos \varphi_3 = \frac{u_0^2 + v_0^2 - c^2}{2u_0v_0} = \frac{u^2 - d^2 + v^2 - d^2 - u^2 - v^2}{2u_0v_0} = -\frac{d}{u_0} \cdot \frac{d}{v_0}.$$

Tekintetbe véve, hogy

$$\frac{d}{u_0} = \operatorname{tg} \beta_1, \quad \frac{d}{v_0} = \operatorname{tg} \beta_2, \quad \frac{d}{w_0} = \operatorname{tg} \beta_3,$$

a következő összefüggéseket nyerjük:

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 &= -\operatorname{tg} \beta_2 \operatorname{tg} \beta_3, \\ \cos \varphi_2 &= -\operatorname{tg} \beta_3 \operatorname{tg} \beta_1, \\ \cos \varphi_3 &= -\operatorname{tg} \beta_1 \operatorname{tg} \beta_2. \end{aligned} \tag{8}$$

A (8) alatti összefüggések alapján felírhatjuk a

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \sqrt{-\frac{\cos\varphi_2\cos\varphi_3}{\cos\varphi_1}},\quad \operatorname{tg}\beta_2 = \sqrt{-\frac{\cos\varphi_3\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}},\quad \operatorname{tg}\beta_3 = \sqrt{-\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\cos\varphi_3}} \tag{9}$$

összefüggéseket.

A (8) és (9) alatti összefüggések mindenekelőtt azt mutatják, hogy két egyenlő tengelyskála mellett, azaz pl.

$$e_1 = e_2, \text{ illetőleg } \beta_1 = \beta_2$$

esetében

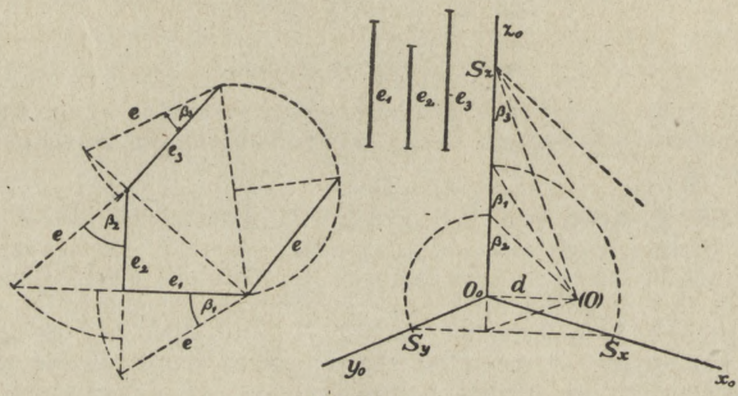
$$\varphi_1 = \varphi_2, \text{ vagyis } \varepsilon_1 = \varepsilon_2,$$

a nyomháromszög egyenlőszárú háromszög, hasonlóan három egyenlő skála mellett azt nyerjük, hogy a nyomháromszög egyenlőoldalú háromszög.

159. §. Alapvető feladatok: I. *Adva van a három skálaegység. Szerkesztessék meg a tengelykereszt képe.* A skálaegységeket nem vehetjük fel egész tetszőlegesen, az (5) alatti egyenlőtlenségeket csak úgy elégítjük ki, ha egy skálaegység kisebb, mint annak a derékszögű háromszögnek az átfogója, melynek két befogója a másik két egység. A megadott skálaegységek alapján mindenekelőtt megszerkesztjük az eredeti mértékegységet, az e távolságot a (2) egyenlet alapján. Rajzolunk egy derékszögű háromszöget e_1 és e_2 befogókkal, e háromszög átfogója egy további derékszögű háromszögnek egyik befogója, melynek másik befogója e_3. Utóbbi derékszögű háromszög átfogója legyen egy négyzet átlója, a négyzet oldala az eredeti mértékegység, e. Ezek után rendre szerkesztünk egy-egy oly derékszögű háromszöget, melynek átfogója e és egyik befogója az adott skálaegységek egyike. (185. ábra.) Egy ilyen háromszögnek a skálaegység mellett fekvő szöge a tengelykereszt egy tengelyének képsíkszöge, mert

$$\cos\beta_i = \frac{e_i}{e}, \quad (i=1, 2, 3).$$

Már most csak az a feladatunk, hogy a tengelyek képsíkszögei alapján szerkesszük meg a tengelykereszt képét. Vegyük fel a z tengely képét, a z_0 egyenest és erre illeszkedően az S_z pontot, a z tengely nyompontját egész tetszőlegesen. (185. ábra.) A z_0 egyenes mellé rakjuk fel a β_3 szöget, de úgy, hogy a szög csúcspontja az S_z pont legyen, akkor e szög másik szára a z tengely képe körüli beforgatottja. A z tengely beforgatottján felvesszük egész tetszőlegesen a koordinátarendszer kezdőpontjának beforgatottját, az (O) pontot. A z tengely axonometrikus vetítő síkja az alaprajz síkját egy egyenesben metszi, melyre a térben a z tengely merőleges. Ennek az egyenesnek a beforgatottja az (O) pontban (z) egyenesre állított merőleges, ez metszi a z tengely képét egy pontban, e pont az egyenes nyompontja, így e pont az $[xy]$ koordinátasík nyomvonalának egy pontja, egyébként a nyomvonal merőleges a z tengely képére. Az (O) pontra illeszkedő és a z tengely képére merőleges egyenes a z tengely képét egy pontban metszi, e pont a koordinátarendszer kezdőpontjának axonometrikus képe, az O_0 pont. Az $\overline{O_0(O)}$ távolság az axonometrikus képsíknak a kezdőponttól való távolsága, d. Az x tengely nyompontjára vonatkozólag egy mértani helyet már ismerünk, e mértani hely az az egyenes, melyben az $[xy]$ sík az axonometrikus képsíkot metszi, azonkívül tudjuk, hogy az O_0S_x távolság oly derékszögű háromszög egyik befogója, melynek másik befogója d és d-vel szemköztfekvő szöge β_1. A megszerkesztett $\overline{O_0S_x}$ távolsággal az O_0 pont körül rajzolt kör az S_x előbb említett mértani helyét a keresett S_x pontban metszi. Hasonló meggondolásokkal nyerjük az



185. ábra.

S_y pontot. A megállapított nyomháromszög csúcspontok ismerete mellett a tengelykereszt képe az előzők szerint megrajzolható.

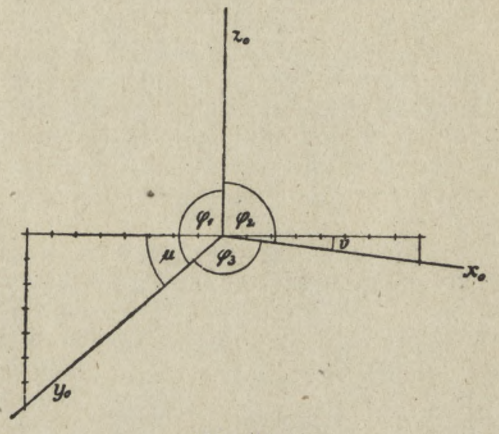
II. Az előző feladatban egymástól független tengelyskálákból indultunk ki. Objektum képies képének szerkesztése lényegesen gyorsabban elvégezhető akkor, ha csak egy skálával dolgozunk. Egy skálával akkor szerkeszthetünk, ha a skálaegységek között egyszerű arányok vannak. Pl. ha a skálaegységek méretaránya

$$e_1 : e_2 : e_3 = 6 : 4 : 5$$

ez azt jelenti, hogy x tengelyre felrakott hat skálaegység a térben az x tengelyen oly távolságot jelent, melynek képhossza az y, illetőleg a z tengelyen négy, illetőleg öt ugyanilyen skálaegységgel egyenlő. Ha pedig ilyenkor az egyik skálaegységet nagyságra nézve tetszőlegesen választjuk, akkor ez azt jelenti, hogy az eredeti alakzat helyett az eredeti alakzattal hasonló alakzatnak axonometrikus képét szerkesztjük, ez pedig a kép iránt támasztott gyakorlati igényeket, amennyiben axonometrikus képről van szó, legtöbbször kielégíti.

Második alapvető feladatunk e szerint: *Adva van a három skálaegység aránya, szerkesztessék a tengelykereszt képe.* E feladat az I. feladattal már megoldást nyert, tudniillik ha az első skálaegységet tetszőlegesen vesszük fel, akkor a skálaegységek adott aránya alapján a második és harmadik skálaegység már egy-egy meghatározott távolság. Az így felvett skálaegységekkel lépésről-lépésre ugyanazt a szerkesztést végezzük el, mint az I. feladatban, így jutunk egy mértékegységhez és a tengelykereszt képéhez. A nyert mértékegység nem az eredeti mértékegység, hiszen a szerkesztés alapján nyert mértékegység hossza mindig függ az első skálaegység hosszától, ez pedig tetszőleges volt. Szóval a II. feladat adatai alapján a mértékegység hossza nem szerkeszthető meg, ellenben a tengelykereszt képe meghatározott.

III. Műegyetemünkön gépek és géprészek képies képének rajzolásánál egy szokványos tengelykereszt projekciót alkalmaznak oly módon, hogy a projekcióban az x és z tengely irányában a valódi méreteket, az y tengely irányában a valódi méretek felét rakják fel. Kérdés, hogy az ilyen módon készített kép az orthogonális axinometria törvényei szerint rajzolt kép vagy sem. A tengelykereszt képét megadják a φ_1 és φ_2 szögekkel. (186. ábra.)



186. ábra.

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \mu, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \nu,$$

ahol

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{7}{8}, \quad \operatorname{tg} \nu = \frac{1}{8}.$$

E szerint

$$\varphi_1 = 131^\circ\ 41'\ 20'',$$
$$\varphi_2 = 97^\circ\ 7'\ 30'',$$
$$\varphi_3 = 131^\circ\ 11'\ 9''.$$

Két-két tengely képének szögéből kiszámíthatjuk a (9) összefüggésekkel a tengelyek képsíkszögeit, e számításokat elvégezve azt nyerjük, hogy

$$\beta_1 = 19^\circ\ 29'\ 27'',$$
$$\beta_2 = 61^\circ\ 58'\ 45'',$$
$$\beta_3 = 19^\circ\ 18'\ 44''.$$

A tengelyek képsíkszögei alapján

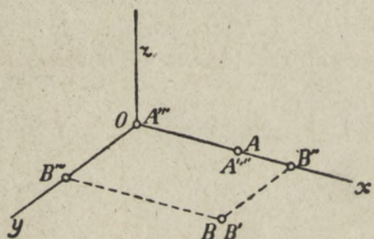
$$\cos \beta_1 = 0{\cdot}9427, \quad \cos \beta_2 = 0.4698, \quad \cos \beta_3 = 0.9437.$$

A megállapított értékek mutatják, hogy a szokásos méretekben készített rajzoknál a skálaegységek aránya nagyon megközelíti az $1 : \frac{1}{2} : 1$ arányt. Az elkövetett hiba az 1 *m* eredeti mértékegység mellett 3 *mm* alatt van. Ami pedig azt illeti, hogy a tengelyek irányában két esetben az eredeti méreteket és egy esetben az eredeti méretek felét rakják fel, ez az eredeti alakzat nagyítását jelenti, a nagyítási tényező 1·06. Az eredményeket összefoglalva kijelenthetjük, hogy a szóban lévő ábrázolási eljárás az orthogonális axonometria törvényeinek megfelel.

Az orthogonális axonometria mint önálló ábrázoló geometriai módszer.

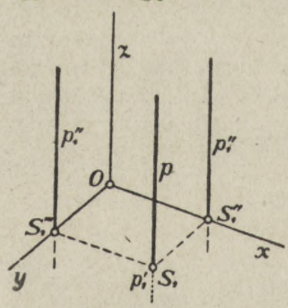
Az axonometrikus képsíkon egy eredeti P pontnak négy képét különböztetjük meg, az eredeti pont axonometrikus képét, P_0, alaprajzának axonometrikus képét, P_0', felrajzának axonometrikus képét, P_0'' és oldalrajzának axonometrikus képét, P_0'''. A következőkben a jelölést egyszerűsíteni fogjuk, a képeknél az indexet mellőzni fogjuk, továbbá megállapodunk abban, hogy egy pont axonometrikus képéről azt fogjuk mondani, hogy ez maga a pont és egy-egy rajzának axonometrikus képéről azt fogjuk mondani, hogy az a pont alaprajza, felrajza, illetőleg oldalrajza.

160. §. Térelemek axonometrikus ábrázolása. 1. *A pont.* Az eddigiek szerint láttuk, hogy egy pont axonometrikus ábrázolásához a négy axonometrikus kép közül kettőnek az ismerete szükséges és elégséges. Tudjuk azt is, hogy a két kép milyen geometriai feltételt tartozik kielégíteni. A pont ábrázolásához kiegészítésképpen megemlítjük, hogy a koordinátarendszer kezdőpontjának mind a négy axonometrikus képe összeesik; tengelyre illeszkedő pont három képe összeesik, negyedik képe a koordinátarendszer kezdőpontjának képe; az alaprajz síkjára illeszkedő pont az alaprajzával azonos pont, tehát két képe összeesik, felrajza az x tengelyre, oldalrajza az y tengelyre illeszkedő pont, stb. (187. ábra.)

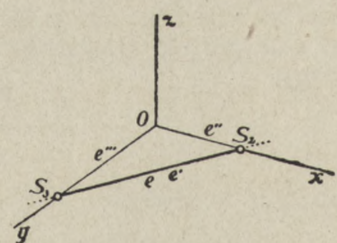


187. ábra.

2. *Az egyenes.* A pont elintézett ábrázolásával speciális helyzetű egyenes ábrázolását is elintéztük. Így az alaprajz síkjára merőleges egyenes, egy első vetítő sugár, axonometrikus képe a z ten-



188. ábra.

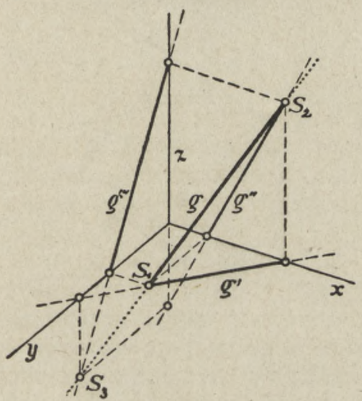


189. ábra.

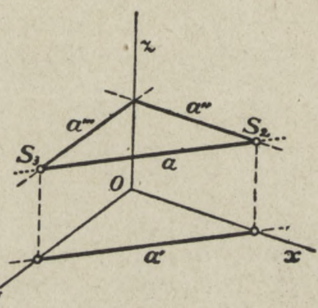
gellyel parallel egyenes, e kép az egyenest nem határozza meg, az egyenes meghatározott, ha a megadott képen kijelöljük azt a pontot, melyben az az alaprajz síkját metszi, az egyenes első nyompontját, az S_1 pontot. Az első vetítősugár felrajza, illetőleg oldalrajza az S_1 pont felrajzán, illetőleg az S_1 oldalrajzán átmenő, a z tengely képével parallel egyenes. (188. ábra.)

Az alaprajz síkjára illeszkedő egyenes alaprajzával azonos egyenes, tehát két képe összeesik, felrajza az x tengely képével és oldalrajza az y tengely képével azonos egyenes. (189. ábra).

A koordinátarendszerrel szemben általános helyzetű egyenes a koordinátasíkok mindegyikét egy-egy pontban metszi, az alaprajz síkját az egyenes első nyompontjában, a felrajz síkját az egyenes második nyompontjában, az oldalrajz síkját az egyenes harmadik nyompontjában, ezek jele rendre: S_1, S_2, S_3. Vegyük fel egy g egyenes első és második nyompontját, e két pont meghatározza az egyenest. Ha e nyompontok összes képeit előállítjuk és az egynevű ké-



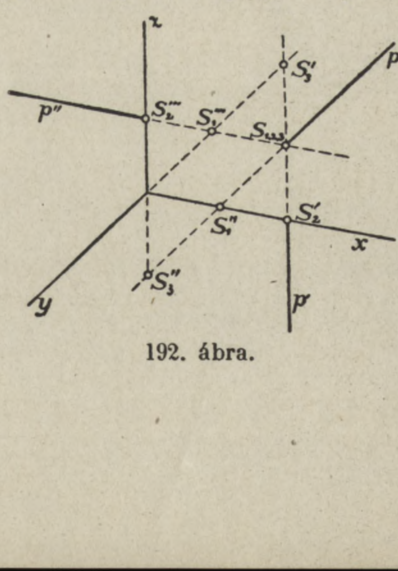
190. ábra.



191. ábra.

peket egyenesekkel összekötjük, nyerjük az egyenes négy axonometrikus képét, g, g', g'', g''' egyeneseket. (190. ábra.) Az egyenes hiányzó harmadik nyompontját a következő okoskodással nyerjük: az egyenes harmadik nyompontja az egyenes oldalrajzára illeszkedő pont, melynek első képe az y tengely képére illeszkedő pont, tehát e pont alaprajza csak az a pont lehet, mely pontban az egyenes alaprajza az y tengelyt metszi, e ponton átmenő első vetítő sugár metszi az egyenes oldalrajzát és az egyenes axonometrikus képét egy és ugyanazon pontban, az egyenes harmadik nyompontjában. Az egyenes axonometrikus ábrázolásából azt is leolvashatjuk, hogy egy tetszőleges egyenes két képe egészen tetszőlegesen felvehető, a felvett két kép meghatározza az egyenes hiányzó két képét.

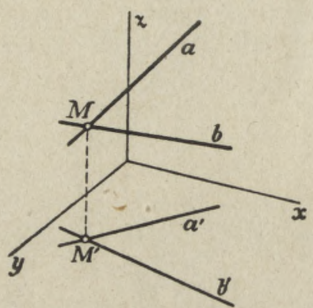
Az alaprajz síkjával parallel egyenes egy az alaprajz síkjában fekvő egyenessel parallel, tehát az alaprajz síkjával parallel egyenes axonometrikus képe általános helyzetű egyenes, felrajza az x tengellyel, oldalrajza az y tengellyel parallel egyenes. (191. ábra.)



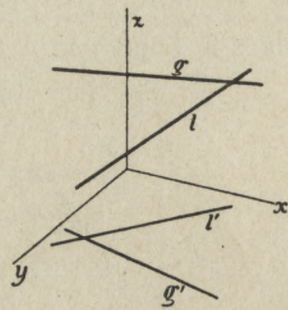
192. ábra.

Axonometrikus vetítő sugár, vagyis az axonometrikus képsíkra merőleges egyenes axonometrikus képe pont. E pont az axonometrikus vetítő sugárra illeszkedő és végesben fekvő minden pontnak axonometrikus képe, tehát e pont a vetítő sugár három nyompontjának is axonometrikus képe. Az összes nyompontok hiányzó képeinek megszerkesztése alapján nyerjük, hogy alaprajza a z tengely képével, felrajza az y tengely képével és oldalrajza az x tengely képével parallel egyenes. (192. ábra.)

3. *Két metsző egyenes.* Két egyenes axonometrikus képeinek metszéspontja és a két egyenes alaprajzainak metszéspontja, mint két pont megállapít a képsíkban egy összekötő egyenest. Ha ez az



193. ábra.

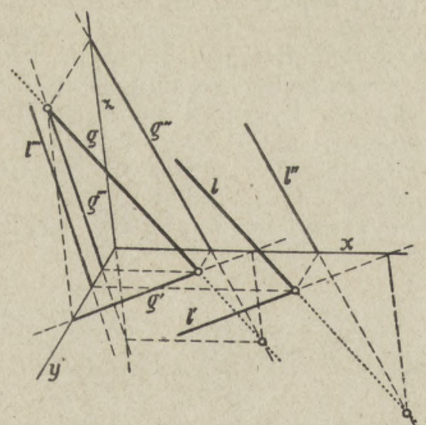


194. ábra.

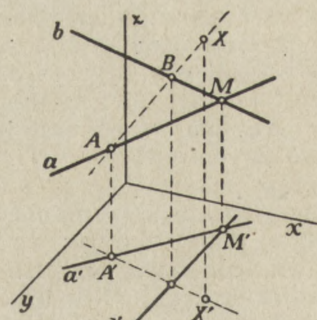
egyenes a z tengely képével parallel egyenes, akkor az egyenesek általában illeszkedő egyenesek, minden más esetben az egyenesek kitérők. Két egyenes megállapított illeszkedési kritériuma nem elégséges, ha az egyenesek egyike, vagy mindkettő a z tengely axonometrikus vetítő síkjával parallel. A 193. ábrában illeszkedő, a 194. ábrában pedig kitérő egyeneseket ábrázoltunk.

Parallel egyenesek összes egynevű képei parallel egyenesek. (195. ábra.)

4. *A sík.* Síkot az axonometriában két illeszkedő egyenessel ábrázolunk, tehát ugyanúgy, mint az orthogonális parallel projekcióban két képsíkon. Itt is síkra illeszkedő pontot síkra illeszkedő egyenes és síkra illeszkedő egyenest síkra illeszkedő pontok segítségével ábrázolunk. (196. ábra.)

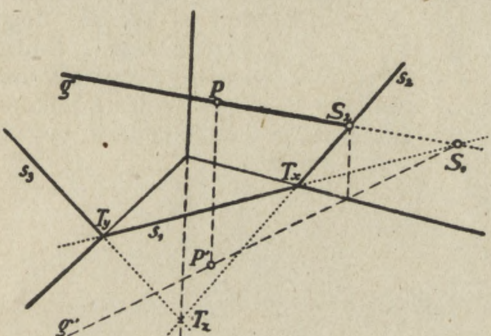


195. ábra.

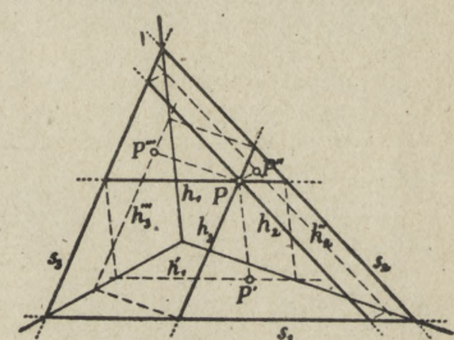


196. ábra.

A síkra illeszkedő egyenesek közül külön kiemelendők azok, melyekben a sík a koordináta síkokat metszi. A síknak az alaprajz síkjával való s_1, a felrajz síkjával való s_2, az oldalrajz síkjával való s_3 metszésvonala a síknak első, második, illetőleg harmadik nyomvonala. A nyomvonalak közül kettő-kettő metszi egymást, e metszéspontok közül egy-egy egy-egy tengely képére illeszkedő pont, e pontok a sík tengelypontjai, T_x, T_y, T_z. A három nyomvonal közül kettő meghatározza a síkot s így a harmrdik nyomvonalat is. Nyomvonalaival adott síkra illeszkedő egyenes egy-egy nyompontja a sík



197. ábra.

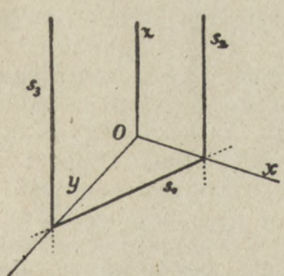


198. ábra.

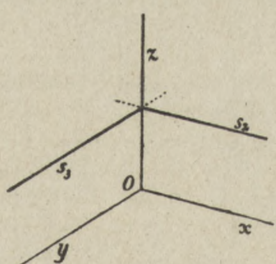
egynevű nyomvonalára illeszkedő pont. Adott síkra illeszkedő egyenesnek, illetőleg pontnak csak egy képét vehetjük fel, az egyenesnek, illetőleg pontnak többi képe ezzel már meg van határozva. (197. ábra.)

A síkra illeszkedő egyenesek között vannak a sík első, második, harmadik nyomvonalával parallel egyenesek, ezek az egyenesek a sík első, második, harmadik fővonalai, h_1, h_2, h_3. (198. ábra.)

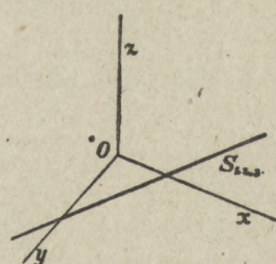
A speciális helyzetű síkok közül megemlítjük: *a)* Az axonometrikus képsíkkal parallel síkokat, e síkok nyomvonalai a nyom-



199. ábra.



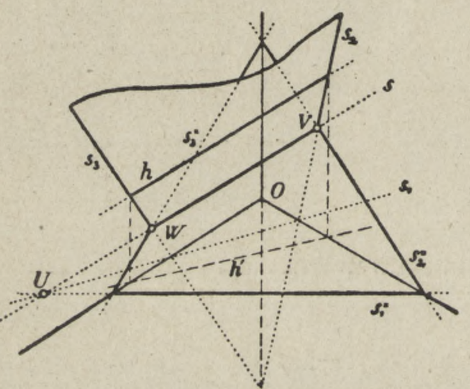
200. ábra.



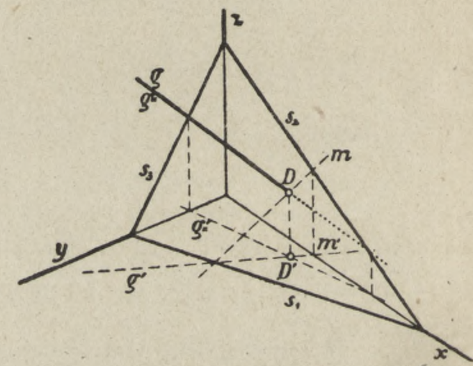
201. ábra.

háromszög oldalaival parallel egyenesek. *b)* Valamely tengellyel parallel síkokat, az első, második és harmadik vetítő síkokat. A *z* tengellyel parallel sík, vagyis első vetítő sík második és harmadik nyomvonala a *z* tengellyel parallel, mig első nyomvonala általános helyzetű, stb. (199. ábra.) *c)* Koordinátasíkkal parallel síkot. Pl. az $[xy]$ síkkal parallel sík első nyomvonala a végtelenben van, másodík nyomvonala az x tengellyel, harmadik nyomvonala az y tengelylyel parallel. (200. ábra.) *d)* Axonometrikus vetítő síkot. Ilyen sík három nyomvonala összeesik. (201. ábra.)

161. §. Metszési feladatok. 1. *Két sík metszésvonala.* Nyomvonalaival adott síkok metszésvonalának egy-egy pontja az egynevű nyomvonalak közös pontja. A. 202. ábrában megszerkesztettük egy nyomvonalaival adott síknak és axonometrikus képsíknak metszésvonalát, ez az egyenes az adott sík *axonometrikus nyomvonala, s.* E szerint megadott axonometrikus képsík mellett a síknak négy nyomvonalát különböztetjük meg, az s, s_1, s_2, s_3 egyeneseket. Eddig a síknak háromféle fővonalát különböztettük meg, egy-egy fővonal a síknak valamely nyomvonalával parallel egyenes volt. A síknak axonometrikus nyomvonalának bevezetésével a fővonalaknak egy új



202. ábra.



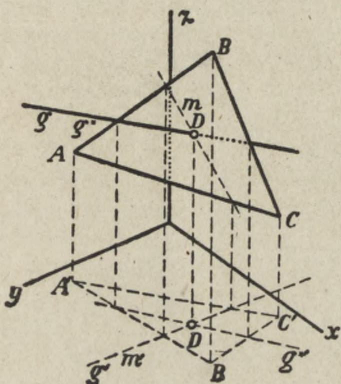
203. ábra.

csoportját nyerjük, *a sík axonometrikus fővonalait,* a sík axonometrikus nyomvonalával parallel egyeneseket, ezek jele: h.

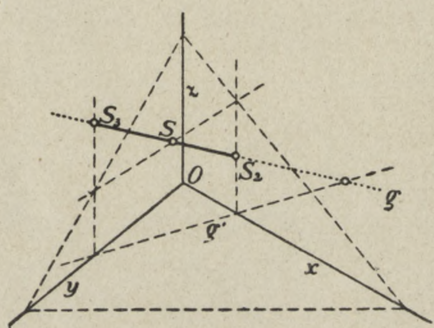
2. *Egyenes és sík metszéspontja.* Egyenes és sík közös pontját az axonometriában úgy szerkesztjük meg, mint az orthogonális parallel projekcióban két képsíkon. Az egyenesre illeszkedő tetszőleges sík az adott síkot egy egyenesben metszi, utóbbi egyenes és adott egyenes közös pontja a keresett metszéspont. Az adott egyenesre illeszthető síkok közül, ha az egyenes axonometrikus képével és alaprajzával van adva, első vetítő síkot, vagy axonometrikus vetítő síkot illesztünk. A 203. ábrában az adott síkot nyomvonalaival, míg a 204. ábrában az adott síkot egy háromszög axonometrikus képével és alaprajzával adtuk meg. Mindkét esetben az adott g egyenesre illeszkedő első vetítő sík az adott síkot a g egyenes első födőegyenesében, az m egyenesben metszi, ennek első képe a g egyenes első képével azonos, megszerkesztve a síkra illeszkedő födőegyenes alaprajzából annak axonometrikus képét, az m egyenest, az m és g axonometrikus képeinek közös pontja a keresett metszéspont axonometrikus képe, D. Amennyiben a g egyenesre axonometrikus vetítő síkot illesztünk, az axonometrikus vetítő sík az adott síkot a g egyenes axonometrikus födőegyenesében metszi, legyen ez az egyenes $g^{\times}$, ennek axonometrikus képe a g egyenes axono-

metrikus képével azonos, megszerkesztve a síkra illeszkedő g^x egyenes axonometrikus képéből annak alaprajzát, a $g^{x\prime}$ egyenest, a g és $g^{x\prime}$ alaprajzok közös pontja a keresett metszéspont alaprajza, D'.

A 205. ábrában megszerkesztettük egy egyenesnek az axonometrikus képsíkkal való metszéspontját. Ez a pont az egyenes axonometrikus nyompontja, S. E szerint megadott axonometrikus képsík



204. ábra.



205. ábra.

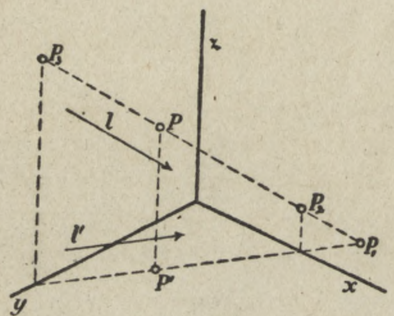
mellett az egyenesnek négy nyompontját különböztetjük meg, az S, S_1, S_2, S_3 pontokat.

162. §. Árnyékszerkesztések. Térbeli alakzat axonometrikus ábrázolásával nyert kép képiességét fokozhatjuk, ha az alakzat öszszes árnyékait is feltüntetjük. Adott árnyékfelfogó sík hiányában a vetett árnyékot a koordinátasíkokon fogjuk fel, de előzetesen megállapodunk abban, hogy a koordinátasíkok közül melyiket gondoljuk eltávolítva.

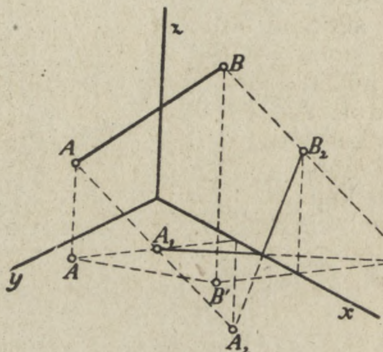
Feltételezett parallel világítás mellett a fénysugár irányát egy egyenes axonometrikus képével, jele l, és alaprajzának axonometrikus képével, jele l', adjuk meg. Egy adott P pont vetett árnyékát a koordinátasíkokon úgy nyerjük, hogy az adott P pontra illeszkedő fénysugár első, második, harmadik nyompontját, a P_1, P_2, P_3 pontokat szerkesztjük meg. E három árnyék közül csak az az egy érvényesül, amelyik a P pontból a fénysugár irányában haladva az eredeti P ponthoz legközelebb fekszik. Ha valamely árnyékpont a fénysugár haladási irányát követve a P pontot megelőzné, ez azt jelenti, hogy az árnyékpontra illeszkedő koordinátasík önárnyékban lévő oldala látható, ez esetben az illető koordinátasíkot eltávolítva gondoljuk.

A 206. ábrában megszerkesztettük a P pont három árnyékát az adott parallel világítás mellett. A P_3 a fénysugár irányában haladva, megelőzi az eredeti pontot, a jelen esetben tehát az oldalrajz síkja a szemlélő felé önárnyékban lévő oldalát mutatja, az oldalrajz síkját eltávolítva gondoljuk. A pontnak tényleg érvényesülő árnyéka a második árnyék, a P_2 pont. Ha pedig a felrajz síkját is eltávolítva gondoljuk, akkor az első árnyék érvényesül.

A 207. ábrában az $\overline{AB}$ távolságnak a koordinátasíkokra vetett árnyékát szerkesztettük meg oly módon, hogy a távolság végpontjainak első és második árnyékait állapítottuk meg, az A_1, B_1 és A_2, B_2 pontokat. Az $\overline{A_1B_1}$ távolság az adott távolság első, az $\overline{A_2B_2}$ távolság pedig a második árnyék. Az A_1, B_1 pontok összekötő egyenese az AB egyenes fénysíkjának első, az A_2, B_2 pontok összekötő egyenese az AB



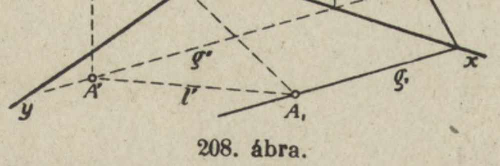
206. ábra.



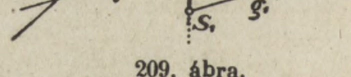
207. ábra.

egyenes fénysíkjának második nyomvonala. Ha az oldalrajz síkját eltávolítva gondoljuk, akkor az első árnyéknak az A_1 pontból kiinduló és az x tengellyel határolt része érvényesül, az utóbbi pontban az árnyék feltörik a felrajz síkjára és tart a B_2 pontig. A vetett árnyék töréspontja az egyenes fénysíkjának az x tengelyen lévő tengelypontja.

A speciális helyzetű egyenesek árnyékáról megjegyezzük a következőket: *a)* Koordinátasíkkal parallel egyenes árnyéka azon a



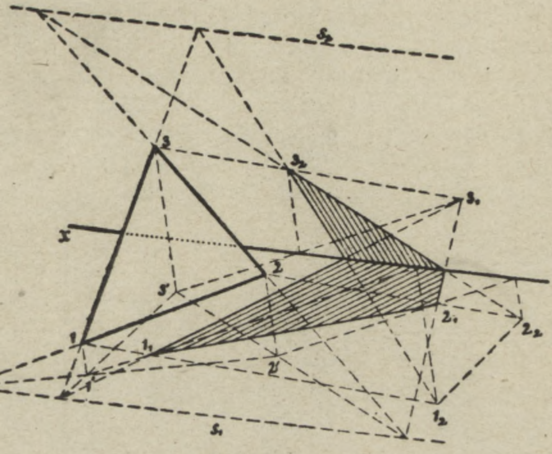
208. ábra.



209. ábra.

koordinátasíkon, mellyel parallel, az egyenes axonometrikus képével parallel egyenes. (208. ábra.) *b)* Első vetítősugár első árnyéka a vetítősugár első nyompontjára illeszkedő és a fénysugár első képével parallel egyenes, második, illetőleg harmadik árnyéka a vetítő sugár axonometrikus képével parallel egyenes. (209. ábra.)

Síkrész árnyékát nyerjük, ha a síkidom oldalainak vetett árnyékát megszerkesztjük. A 210. ábrában háromszögnek az alaprajz és felrajz síkjára vetett árnyékát szerkesztettük meg. Itt megemlítjük azokat az axiális affin vonatkozásokat, melyek síkidom különböző képei és árnyékai között megállapíthatók. Axiális affin vonatkozásban van *a)* a síkidom axonometrikus képe a síkidom bármely rajzával, *b)* a síkidom axonometrikus képe a síkidom bármely koordinátasíkra ejtett árnyékával, *c)* a síkidom egy koordinátasíkon lévő képe a síkidom ugyanazon koordinátasíkra ejtett árnyékával, *d)* végül affin vonatkozás áll fenn két koordinátasíkra vetett árnyék között.

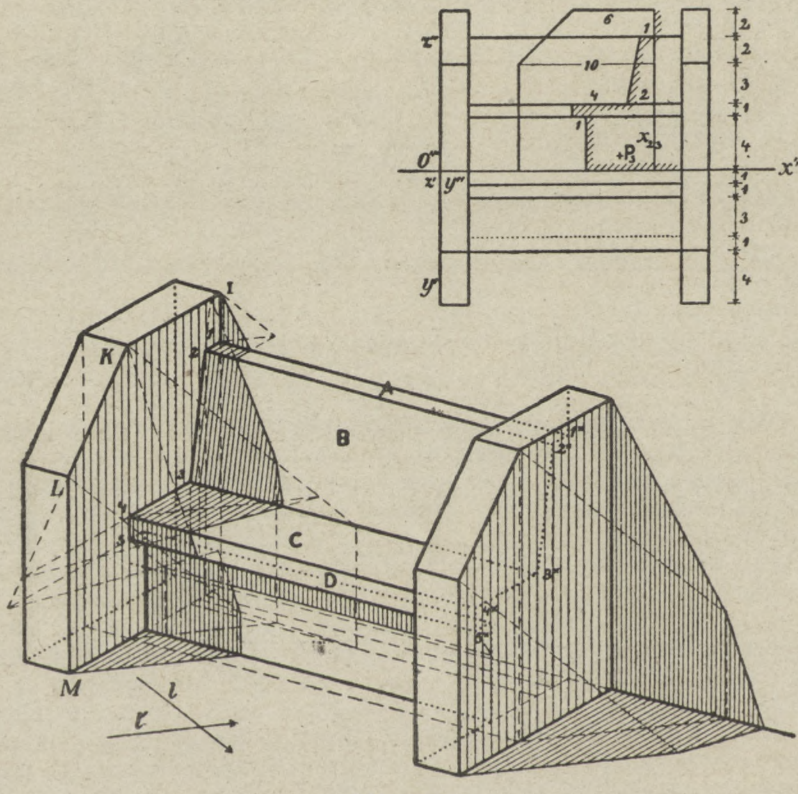


210. ábra.

163. §. Kőpad. Adva van felényire kisebbített méretekben orthogonális parallel projekcióban két képsíkon egy kőpad. Szerkesszük meg e pad axonometrikus képét és adott parallel világítás mellett az összes árnyékokat. Műszaki objektum két képét még kiegészítjük az objektum rajzának jobb áttekinthetősége végett egy harmadik képpel. (211. ábra.) Ez a harmadik kép nem a szokásos harmadik kép, hanem síkmetszetnek és képnek kombinációja. Az alakzatot t. i. a harmadik képsík két részre bontja, a két rész közül az egyiket mintegy eltávolítva gondoljuk. Az ábrán feltüntetett esetben a harmadik képsíktól jobbra eső részt eltávolítottuk és a balra eső résznek a harmadik képsíkon lévő képét rajzoltuk meg áttetszőnek vélt harmadik képsík mellett. Alakzat és harmadik képsík síkmetszetének harmadik képében a síkmetszetet határoló vonalak mentén keskeny sávban tónusréteget rakunk fel, evvel azt akarjuk feltüntetni, hogy a harmadik képsík a metszésnél hol hatol be az alakzat anyagába.

A pad axonometrikus képe trimetrikus és felülnézet. A tengelykereszt képének szerkesztésénél oly nyomháromszöget vettünk fel, melynél $S_xS_y=8$, $S_yS_z=10$, $S_zS_x=11$ egység. Az alakzat és tengelykereszt viszonylagos helyzetét feltüntettük az alakzat orthogonális parallel projekciójában két képsíkon, e szerint a padot függélyes falsíkhoz építve gondoljuk, e fal síkja egyúttal a felrajz síkja. A pad axonometrikus képének szerkesztését mellőzve áttérünk az árnyékszerkesztésre. A tulajdonképpeni pad síklapokkal van határolva, ezek **A**, **B**, **C**,..., e síkokra vet árnyékot a baloldali pillér a felvett *l*, *l'* parallel világítás mellett. A pad lapjaira vetett árnyékot megszerkesztettük, ha az *IK*, *KL*, *LM* élek e lapokra vetett árnyékát megállapítottuk.

Az IK élnek az **A** lapra vetett árnyéka az IK él axonometrikus képével parallel, mert az él az árnyékfelfogó lappal parallel. Az I pont árnyéka az **A** lapon ott van, ahol az I pontra illeszkedő fénysugár az 1 ponton átmenő, fénysugár alaprajzával parallel egyenest metszi, mert az 1 pont az I pontnak az **A** lapon lévő alaprajza és az **A** lap az alaprajz síkjával parallel. Az így nyert ponton át az IK egyenessel parallel egyenes csak ama része érvényesül árnyékhatárként, mely rész az $1\,1^{\times}$ és $2\,2^{\times}$ egyenesek közé esik. A szerkesztett árnyék és $1\,1^{\times}$ egyenes metszéspontja az árnyék töréspontja, innen az árnyék

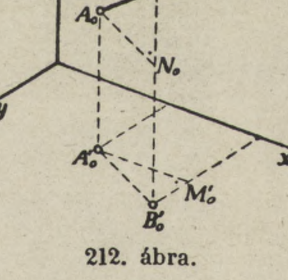


211. ábra.

a felrajz síkjára törik fel az I pont felé és tart az I pontig. A felrajz síkján most nyert árnyékhatár különben a fénysugár felrajzával parallel egyenes, mert IK egyenes a felrajz síkjára merőleges egyenes. Az IK él **B** lapra vetett árnyékának egy pontja már ismeretes, ez az első ízben szerkesztett árnyék és $2\,2^{\times}$ metszéspontja, egy másik pontja az IK élnek és a **B** lapnak a metszéspontja, e pont az IK egyenesnek és a 2, 3 pontok összekötő egyenesének metszéspontja. A két pont összekötő egyenese az IK élnek a **B** lapra vetett árnyéka, ez az árnyék pedig addig tart, míg ezt az egyenest a K pontra illeszkedő fénysugár metszi. Utóbbi pontot még úgy is szerkesztettük meg, hogy megállapítottuk a K pontra illeszkedő fénysugárnak metszéspontját a **B** lappal. A szerkesztésnél felhasználtuk a fénysugárra illeszkedő axonometrikus vetítő síkot, e sík metszi a B síkot a fénysugár axonometrikus fődőegyenesében, ennek az egyenesnek megállapítottuk az alaprajzát az alaprajz síkján és pedig úgy, hogy megszerkesztettük az egyenes 23 egyenessel, továbbá $33^{\times}$ egyenessel való illeszkedési pontjának alaprajzát, ahol az utóbbi pontok összekötő egyenesét metszi a K pont alaprajzán átmenő és a fénysugár alaprajzával parallel egyenes, ott nyerjük a keresett metszéspont alaprajzát.

Ezek után megszerkesztjük a KL élnek a C lapra vetett árnyékát. A K pontnak a C lapra vetett árnyéka ott van, ahol a K pontra illeszkedő fénysugár metszi a 4 ponton átmenő, fénysugár alaprajzával parallel egyenest, mert a C lap az alaprajz síkjával parallel sík és a K pontnak e síkon lévő alaprajza a 4 pont. A KL egy másik pontjának a C síkra vetett árnyéka az a pont, melyben a KL egyenes a C síkot metszi, e pont pedig a 3 és 4 pontok összekötő egyenesének metszéspontja a KL egyenessel. A KL egyenesnek a C lapra vetett árnyékából csak az érvényesül, ami a C lap határoló egyenesei közé esik, ahol a vetett árnyék a $33^{\times}$ egyenest metszi, ott feltörik az árnyék a B lapra és tart a K pontra illeszkedő fénysugár és B lap metszéspontjáig, ahol pedig a vetett árnyék a $44^{\times}$ egyenest metszi, ott letörik az árnyék a D lapra. A KL egyenesnek D lapra vetett árnyékának egy pontja maga a K pont, mert e pont a KL egyenesnek a D lappal való metszéspontja. És így tovább.

164. §. Két pont távolsága. Két pont távolságának szerkesztését egész speciális esetben már elvégeztük, t. i. mikor valamely tengelyre illeszkedő pontnak a koordinátarendszer kezdőpontjától való távolságát megállapítottuk. Ekkor a kérdéses tengelyt axonometrikus vetítő síkjának axonometrikus nyomvonala körül a képsíkba forgattuk. E szerkesztés többszörös alkalmazásával két tetszőleges pont távolságát is szerkeszthetjük meg. Legyen adva két pont, A és B. (212. ábra.) Legyenek az A pont koordinátái x_1, y_1, z_1, a B pont koordinátái x_2, y_2, z_2. Megrajzolva az A'_0 ponton átmenő és az x tengellyel parallel egyenest ez a B'_0 ponton átmenő és az y tengellyel parallel egyenest az M'_0 pontban metszi, továbbá megrajzolva az A_0 ponton átmenő és az $A'_0B'_0$ egyenessel parallel egyenest ez a B_0 ponton átmenő és z tengellyel parallel egyenest az N_0 pontban metszi. Az A, B, N pontok a térben egy derékszögű háromszög csúcspontjai, a háromszög egyik befogója, $\overline{BN}=z_2-z_1$, másik befogója $\overline{AN}=\overline{A'B'}$, de $\overline{A'B'}$ az első képsíkban ugyancsak egy derékszögű háromszög átfogója, melynek egyik befogója $\overline{B'M'}=y_2-y_1$ és másik befogója $\overline{A'M'}=x_2-x_1$. E szerint



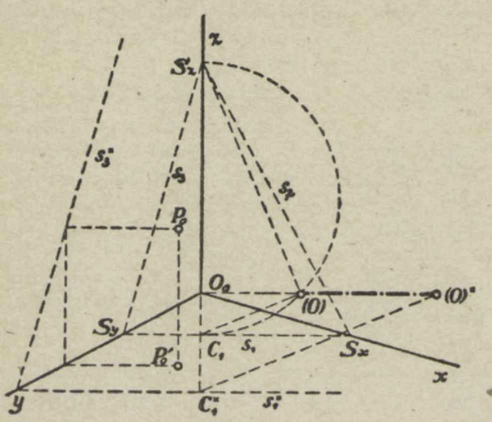
212. ábra.

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

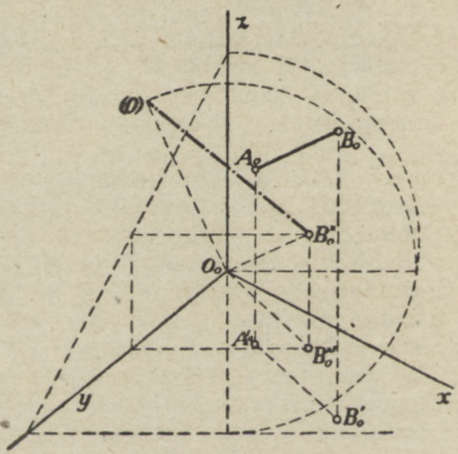
Az $\overline{AB}$ távolságra nyert kifejezésben csak az adott pontok koordinátái szerepelnek, és mivel ezek valódi nagyságát már meg tudjuk szerkeszteni, két pont távolságának valódi nagyságát is megszerkeszthetjük.

Két pont távolságának valódi nagyságát azon trapéz segítségével is nyerhetjük, mely trapéznek csúcspontjai A, B, B_0, A_0. Ekkor az $\overline{A_0B_0}$ oldal valódi nagyságban mutatkozik, mert az axonometrikus képsíkban van, az $\overline{AA_0}$ és $\overline{BB_0}$ trapézoldalak a térben az előbbi oldalra merőlegesek, de ezek valódi nagyságát csak akkor tudjuk megszerkeszteni, ha a tér tetszőleges adott pontjának az axonometrikus képsíktól való távolságának szerkesztését bemutatjuk.

165. §. Pont távolsága az axonometrikus képsíktól. Legyen adva a tengelykereszt képe és rajzoljuk meg az axonometrikus képsík helyzetének jellemzésére a nyomháromszöget, oldalai s_1, s_2, s_3. A tér tetszőleges P pontja pedig adva van axonometrikus képével és alaprajzával. Szerkesztessék meg a P pontnak az axonometrikus képsíktól való távolsága. (213. ábra.) Mindenekelőtt szerkesztünk a P pontra illeszkedő és az axonometrikus képsíkkal parallel síkot,



213. ábra.

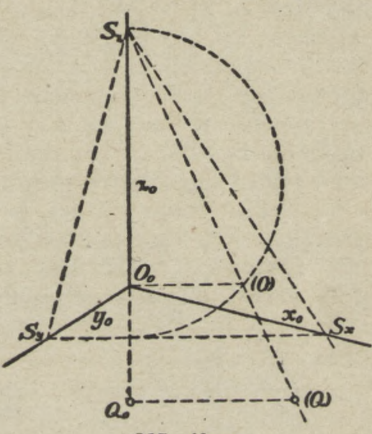


214. ábra.

e síknak minden pontja az axonometrikus képsíktól ugyanolyan távolságban van, mint a P pont. Legyenek e sík nyomvonalai $s_1^\times$, $s_2^\times$, $s_3^\times$. Most megszerkesztjük a koordinátarendszer kezdőpontjának távolságát az axonometrikus képsíktól, ez a távolság az $\overline{O_0(O)}$ távolság, ha ekkor az (O) pontot a rajzban feltüntetett C_1 ponttal összekötjük, akkor az axonometrikus képsíkba forgattuk a z tengely axonometrikus vetítősíkjának első nyomvonalát. Azután ugyanúgy szerkesztjük meg a koordinátarendszer kezdőpontjának távolságát a P pontra illeszkedő síktól, a távolság az $\overline{O_0(O)^\times}$ távolság. Megjegyzendő, hogy az $(O)^\times$ pontot az $O_0(O)$ egyenesen úgy is nyerhetjük, hogy a $C_1^\times$ ponton át a C_1 és (O) pontok összekötő egyenesével parallel egyenest vezetünk. Ekkor a disztancok különbsége, az $\overline{(O)(O)^\times}$ távolság, a P pontnak távolsága az axonometrikus képsíktól.

E feladat tárgyalása után visszatérhetünk arra a feladatra, melyben két pont távolságának valódi nagyságát kell szerkeszteni. Ha a távolság végpontjai A és B, akkor az ABB_0A_0 trapéz valódi nagyságának szerkesztésére minden eszköz rendelkezésünkre áll. A szerkesztés lényeges egyszerűsítést enged meg, ha az $\overline{AB}$ távolságot önmagával párhuzamosan elmozdítjuk, úgy hogy a távolság egyik végpontja a koordinátarendszer kezdőpontjával azonos pont legyen. (214. ábra.) Legyen az eltolt távolság axonometrikus képe $\overline{O_0B_0^{\times}}$ és alaprajza $\overline{O_0B_0^{\times\prime}}$. Az axonometrikus képsíkot úgy vesszük fel, hogy az a $B_0^{\times}$ pontra illeszkedjék. Ekkor az előbb említett trapézból háromszög lesz, mert a távolság egyik végpontja az axonometrikus képsíkra illeszkedő pont, a háromszög az $OO_0B_0^{\times}$ derékszögű háromszög. A $OO_0B_0^{\times}$ háromszöget axonometrikus vetítősíkjának nyomvonala, $O_0B_0^{\times}$ körül beforgatjuk az axonometrikus képsíkba, e forgatásnál a $B_0^{\times}$ és O_0 pontok helyben maradó pontok, az O pont beforgatottja az O_0 pontban az $O_0B_0^{\times}$ egyenesre merőleges egyenesen lesz az O_0 ponttól oly távolságban, amilyen távolságban van a koordinátarendszer kezdőpontja az axonometrikus képsíktól. A derékszögű háromszög átfogója, $\overline{(O)B_0^{\times}}$, a távolság valódi nagysága.

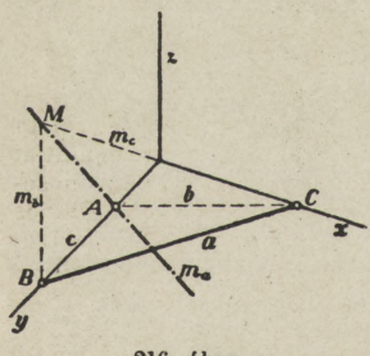
Az orthogonális axonometriában olyan pontnak tudjuk az axonometrikus képsíktól való távolságát a legközvetlenebbül meghatározni, mely pont a tengelykereszt egy-egy tengelyére illeszkedő pont. Adott nyomháromszög mellett szerkesztessék pld. a z tengelyre illeszkedő Q pontnak az axonometrikus képsíktól való távolsága. (215. ábra.) A z tengelyt beforgatjuk axonometrikus vetítősíkjának nyomvonala körül az axonometrikus képsíkba, ekkor a Q pont axonometrikus képén, a Q_0 ponton átmenő és a z tengely képére merőleges egyenes metszi a z tengely beforgatottját a beforgatott Q pontban, a $\overline{Q_0(Q)}$ távolság a Q pontnak távolsága az axonometrikus képsíktól.


215. ábra.

166. §. Sík és egyenes merőleges helyzetben. Az összes távolsági feladatokat az orthogonális axonometriában akkor tudjuk megoldani, ha adott síkra merőleges egyenest, illetőleg adott egyenesre merőleges síkot tudunk szerkeszteni.

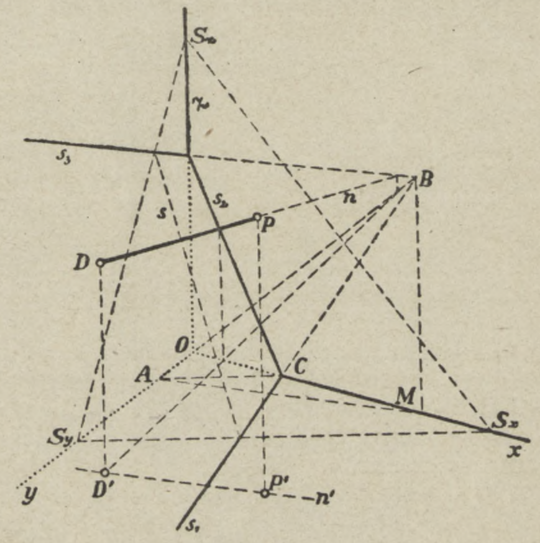
Az orthogonális parallel projekcióban két képsíkon tanultuk, hogy síkra merőleges egyenes képe mindig merőleges a síknak ugyanazon képsíkon lévő nyomvonalára, avagy e nyomvonallal parallel fővonalra. Ebből következik, hogy az orthogonális axonometriában, mivel ez is orthogonális parallel projekció, az adott síkra merőleges egyenes axonometrikus képe a sík axonometrikus nyomvonalára, avagy a sík axonometrikus fővonalára merőleges. Tehát síkra merőleges egyenes axonometrikus képét a sík axonometrikus nyomvonalára merőlegesen kell rajzolni, de evvel az egyenes nincs meghatározva, még egy rajzát kell ismerni. A térben a síkra merőleges egyenes alaprajza a sík első nyomvonalára merőleges, mert az egyenes alaprajza az egyenes orthogonális projekciója az alaprajz síkján. Szóval, ha a sík első nyomvonala s_1 és a síkra merőleges egyenes alaprajza g', akkor $g' \perp s_1$, de az alaprajz síkjában fekvő egymásra merőleges egyenesek axonometrikus képei nem lesznek egymásra merőleges egyenesek, mivel az alaprajz síkja az axonometrikus képsíkkal szemben általános helyzetű. Így felmerül az a kérdés, hogy hogyan kell az alaprajz síkjában fekvő tetszőleges egyenesre az alaprajz síkjában ez egyenesre merőleges egyenest szerkeszteni? Mindenekelőtt meg kell említeni, hogy az alaprajz síkjában vannak egyenesek, melyekre merőleges egyeneseket közvetlenül rajzolhatunk. Így *a)* az y tengelyre, avagy az y tengellyel parallel egyenesre merőleges egyenes az x tengely, avagy az x-tengellyel parallel egyenes, *b)* az axonometrikus képsík első nyomvonalára, az S_xS_y egyenesre, avagy ez egyenessel parallel egyenesre merőleges egyenes az alaprajz síkjának esésvonala. T. i. nyomvonallal parallel egyenes és esésvonal az alaprajz síkjában derékszöget alkotnak, e derékszög egyik szára az axonometrikus képsíkkal parallel s így a derékszög képe derékszög, tehát az alaprajz síkban fekvő esésvonalnak axonometrikus képe a z tengely axonometrikus képével parallel egyenes, mivel az axonometrikus képsík első nyomvonala a z tengely axonometrikus képére merőleges egyenes.

Tekintetbe véve azt, hogy egy síkban minden háromszög magasságvonalai egy ponton mennek át, az alaprajz síkjában tetszőleges egyenesre merőleges egyenest szerkeszthetünk. Legyen a tengelykereszt adott képe mellett az a egyenes az az egyenes, melyre merőleges egyenest szerkeszteni kívánunk. (216. ábra.) Az alaprajz síkjára illeszkedő a egyenes metszi az y tengelyt a B pontban, az x tengelyt a C pontban, továbbá messe a C pontra illeszkedő és a z tengely képére merőleges egyenes az y tengelyt az A pontban. Az ABC háromszögben az AB oldalhoz tartozó magasság, m_c, maga az x tengely, az AC oldalhoz tartozó magasság, m_b, a B pontra illeszkedő és a z-tengely képével parallel egyenes, az m_c és m_b egyenesek közös pontja, M, az ABC háromszög magassági pontja. Az M és A pontok összekötő egyenese, m_a, a háromszög harmadik magassága, tehát oly egyenes, mely az alaprajz síkjában felvett a egyenesre merőleges. Hasonló meggondolással szerkeszthetünk a felrajz síkjában, illetőleg az oldalrajz síkjában egy-egy egyenesre merőleges egyenest.



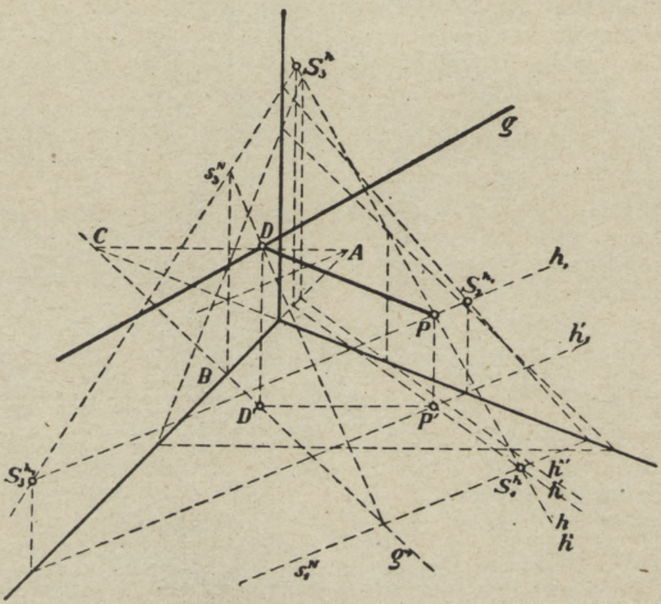
216. ábra.

167. §. Pont és sík távolsága. Adva van orthogonális axonometriában a tengelykereszt képe, a nyomháromszög, az $\mathbf{S}(s_1, s_2, s_3)$ sík, a P pont axonometrikus képe P és alaprajzának axonometrikus képe P'. Szerkesztessék meg az adott pontnak az adott síktól való távolságának axonometrikus képe és a távolság alaprajzának axonometrikus képe. (217. ábra) Mindenekelőtt megszerkesztjük az adott sík axonometrikus nyomvonalát, az s egyenest. Az adott pontra illeszkedő és síkra merőleges egyenes axonometrikus képe, n, a P pont axonometrikus képére illeszkedő és a sík axonometrikus nyomvonalára, az s egyenesre, merőleges egyenes. Az n egyenes alaprajza, n', a térben a sík első nyomvonalára merőleges és az adott pont alaprajzára illeszkedő egyenes. Ez egyenes axonometrikus képének szerkesztésénél felhasználjuk az alaprajz síkjában az ábrában látható ABC háromszöget, megszerkesztjük a háromszög M magassági pontját, akkor az M és A pontok összekötő egyenese az s_1 egyenesre merőleges egyenes axonometrikus képe. Az adott pont alaprajzára illeszkedő és a most nyert egyenessel parallel egyenes az n egyenes alaprajza n'. Axonometrikus képével és alaprajzával meghatározott n egyenesnek metszéspontja az adott síkkal, D, és a P pont meghatározza az adott pontnak és adott síknak egymástól való távolságát, úgyhogy $\overline{PD}$ távolság a keresett távolság axonometrikus képe és $\overline{P'D'}$ a keresett távolság alaprajzának axonometrikus képe. A teljesség kedvéért megemlítjük, hogy az n egyenesnek az adott síkkal való metszéspontját az n egyenesnek az adott síkban fekvő axonometrikus födőegyenesével szerkesztettük meg. A távolság valódi nagysága az ábrában nincs megszerkesztve.



217. ábra.

168. §. Pont és egyenes távolsága. Ismeretes nyomháromszög mellett adva van egy g egyenesnek axonometrikus képe és alaprajzának axonometrikus képe, továbbá egy P pontnak axonometrikus képe és alaprajzának axonometrikus képe. (218. ábra.) Szerkesztessék meg a g egyenes és P pont távolságának axonometrikus képe és alaprajza. A szerkesztésnek első lépése, mint tudjuk, hogy a P pontra illeszkedő és a g egyenesre merőleges **N** síkot szerkeszszük. Az **N** sík axonometrikus fővonalának axonometrikus képe az adott egyenes axonometrikus képére merőleges, tehát az **N** síknak P pontra illeszkedő axonometrikus fővonalának axonometrikus képét közvetlenül megrajzolhatjuk, az ábrán ezt az egyenest h-val jelöltük. A h egyenes az axonometrikus képsíkkal parallel egyenes, s így az axonometrikus képsíkban felvett h egyenessel parallel $h^{\times}$ egyenes alaprajza a h egyenes alaprajzával parallel egyenes lesz. A $h^{\times}$ egyenest a rajzban úgy választottuk, hogy az a h egyenes axonometrikus födőegyenesével azonos legyen. Ennek a h^x egyenesnek megszerkesztettük az alaprajzát, a $h^{x'}$ egyenest és a P' pontra illeszkedő, a legutóbbi egyenessel parallel egyenes lesz a h egyenes alaprajza, h'. Az **N** sík még egy egyenesét, még pedig a P pontra illeszkedő h_1 első fővonalát szerkesztettük meg. A h_1 egyenes alaprajza az adott egyenes alaprajzára merőleges egyenes, ennek irányát az alaprajz síkjában egy háromszög magassági vonalaként szerkesztettük, a háromszög ABC. A P pontra illeszkedő h és h_1 egyenesek megállapított nyompontjainak felhasználásával megrajzoltuk az **N** sík nyom-

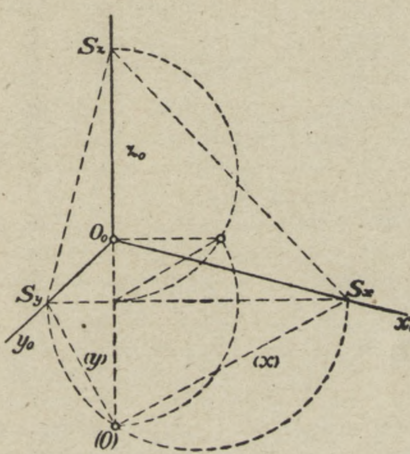


218. ábra.

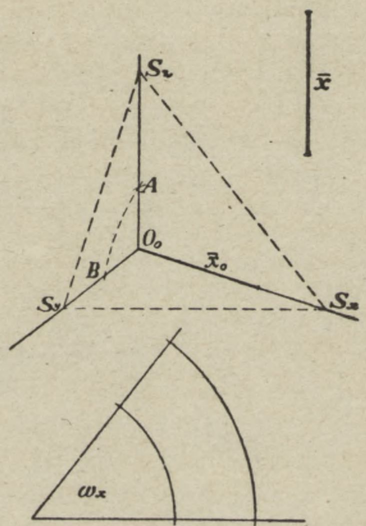
vonalait, majd megszerkesztettük e sík és az adott egyenes D metszéspontját. Ekkor $\overline{PD}$ távolság a keresett távolság axonometrikus képe és $\overline{P'D'}$ a távolság alaprajzának axonometrikus képe. A távolság valódi nagyságának szerkesztése egy már tárgyalt feladat ismétlése.

169. §. Síknak beforgatása az axonometrikus képsíkba. *a)* Az előzőkben síkot már beforgattunk az axonometrikus képsíkba és pedig akkor, ha a sík axonometrikus vetítősík volt. Így adott nyomháromszög mellett az egyes tengelyek képsíkszögeinek meghatározásánál a tengelyre illeszkedő axonometrikus vetítősíkot a képsíkba forgattuk. *Tetszőleges axonometrikus vetítősíkot pedig akkor forgattunk az axonometrikus képsíkba, mikor két pont távolságának valódi nagyságát szerkesztettük meg.*

b) Koordinátasíknak beforgatása az axonometrikus képsíkba. Síkbeli rendszer parallel képe és a síkbeli rendszer képsíkba forgatottja között, mint tudjuk, axiális affin vonatkozás áll fenn, ezért elégséges a koordinátasík egy pontjának leforgatását megszerkeszteni, mert minden további pontnak leforgatása, illetőleg felállítása a fenti affin vonatkozás alapján történik. Példának tárgyaljuk az alaprajz síkjának beforgatását az axonometrikus képsíkba. Ekkor a forgatás az axonometrikus képsík első nyomvonala, az S_xS_y egyenes körül történik. Az alaprajz síkjára illeszkedő pontok közül a leggyorsabban a koordinátarendszer kezdőpontjának beforgatását szerkeszthetjük meg. (219. ábra.) Az O pont beforgatottja oly egyenesen lesz, mely egyenes illeszkedik az O pont orthogonális képére és merőleges a forgatás tengelyére, a jelen esetben ez az egyenes a z tengely axonometrikus képe, z_0. A leforgatott pontnak távolsága a forgatás tengelyétől ama derékszögű háromszög átfogója, melynek egyik befogója a pont orthogonális képének távolsága a forgatás tengelyétől, másik befogója a pontnak távolsága azon síktól, melybe a forgatás történik, mivel esetünkben a forgatás az axonometrikus képsíkba történik,



219. ábra.



220. ábra.

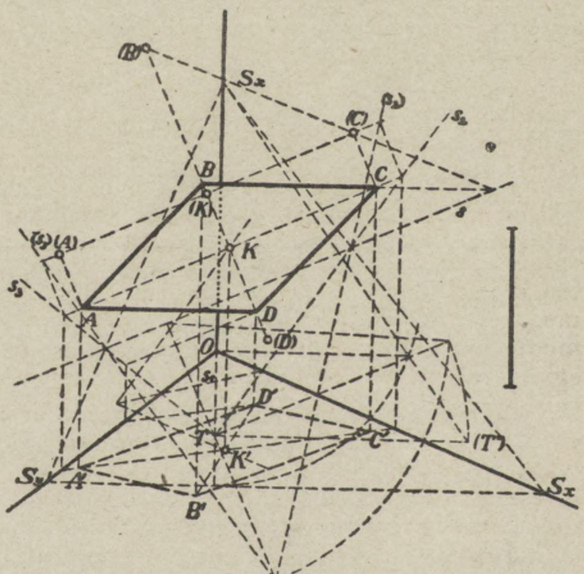
mindenekelőtt megszerkesztjük a koordinátarendszer kezdőpontjának távolságát az axonometrikus képsíktól, majd megszerkesztjük a fenti derékszögű háromszög átfogóját és ezt a távolságot a z tengely képére az S_xS_y egyenestől számítva felmérjük, e távolság végpontja az O pont leforgatottja, (O).

Ha tekintetbe vesszük, hogy az S_x, S_y és O pontok a térben egy derékszögű háromszög csúcspontjai, melynek átfogója az axonometrikus képsíkban fekvő $\overline{S_xS_y}$ távolság, az O pont leforgatottját még úgy is nyerhetjük, hogy az $\overline{S_xS_y}$ távolság fölé, mint átmérő fölé, kört szerkesztünk, e körnek a z tengely képével való metszéspontja azonos a koordinátarendszer kezdőpontjának leforgatásával.

Koordinátasíknak képsíkba forgatásához három megjegyzést fűzünk. *a)* Egy alakzat alaprajzának axonometrikus képe és az alaprajznak az axonometrikus képsíkba forgatottja között mindig axiális affin vonatkozás áll fenn. Hasonlóan axiális affin vonatkozás áll fenn az alakzat felrajzának, illetőleg oldalrajzának axonometrikus képe és egy-egy ilyen rajznak az axonometrikus képsíkba forgatottja között. *β)* Amikor valamely koordinátasíkban fekvő egyenesre e síkban merőleges egyenest szerkesztettünk, akkor e merőleges egyenes irányának meghatározására felvettünk a koordinátasíkban egy speciális háromszöget és e háromszög egyik magassági vonala szolgáltatta a kérdéses irányt. Miután koordinátasíkot már tudunk az axonometrikus képsíkba forgatni, koordinátasíkban egyenesre merőleges egyenest úgy szerkesztünk, hogy a koordinátasíkot az egyenessel együtt a képsíkba forgatjuk, a beforgatásban elvégezzük a merőleges egyenes szerkesztését és az így nyert egyenest felállítjuk. *γ)* Egy-egy koordinátasíknak az axonometrikus képsíkba való forgatásával két-két tengelyen lévő távolságnak valódi nagyságát nyerjük. Ha az $\overline{S_xS_y}$ távolság fölé, mint átmérő fölé, kört szerkesztünk, akkor e kör a z tengely axonometrikus képét egy pontban, a koordinátarendszer kezdőpontjának leforgatásában metszi. (220. ábra.) Legyen ez a pont A, akkor $\overline{S_xA}$ távolság az x tengely ama darabjának valódi nagysága, melyet a koordinátarendszer kezdőpontja és nyompontja határol, e távolság képe az $\overline{O_0S_x}$ távolság. Ugyanúgy az $\overline{S_yA}$ távolság az $\overline{S_yO}$ távolsággal egyenlő, ennek képe $\overline{S_yO_0}$. Ha S_x körül kört rajzolunk $\overline{S_xA}$ sugárral, akkor ez metszi az y tengely képét a B pontban, ez a B pont ugyancsak a koordinátarendszer kezdőpontjának beforgatottja az axonometrikus képsíkba. T. i., ha a felrajz síkját az S_xS_z egyenes körül beforgatjuk az axonometrikus képsíkba, a koordinátarendszer kezdőpontjának beforgatottja mindenesetre az y tengely képére illeszkedő pont lesz, másrészt a leforgatott kezdőpontnak az S_x ponttól való távolsága megint csak az x tengely ama darabjának valódi nagysága, melyet a kezdőpont és S_x határol. De akkor $\overline{S_zB}$ távolság a z tengelyen az O és S_z pontok által határolt távolság valódi nagysága. Így látjuk, hogy két körvonal rajzolásával minden tengelyen fekvő egy-egy távolság valódi nagyságát szerkesztettük meg. A tengelydarabok valódi nagyságának e gyors szerkesztési módja arra indít, hogy a tengelyekre, avagy a tengelyekkel parallel egyenesekre felmérendő adott távolságok képhosszainak szerkesztésére újabb szerkesztésbeli berendezést említsünk. Pld. az x tengelyre az O ponttól számítva, az adott $\overline{x}$ távolságot kellene felmérni. Ekkor szerkesztünk egyenlőszárú háromszöget, melynek egy-egy szára az $\overline{S_xO}$ valódi nagysága és alapja ugyanazon távolság képhossza. Az egyenlőszárú háromszög alapjának tényleges megrajzolását mellőzve, a szárak egy meghatározott szöget alkotnak, ez a szög az x tengely proporcionális szöge ω_x. Az $\overline{x}$ koordináta képhosszát már most úgy szerkesztjük meg, hogy megrajzoljuk $\overline{x}$ körsugárral az ω_x szög ívét, ez ív végpontjaival határolt húr a keresett képhossz. Hasonlóan járunk el az y tengely, illetőleg z tengely, ω_y, illetőleg ω_z proporcionális szögének szerkesztésénél.

c) Általános helyzetű síknak beforgatása az axonometrikus képsíkba. A kitűzött feladatot megoldottuk, ha egy, a síkra illeszkedő tetszőleges P pontot beforgattunk az axonometrikus képsíkba. A jelen esetben a forgatás tengelye a síknak axonometrikus nyomvonala, s. A P pont beforgatottja a P pont axonometrikus képére illeszkedő és a sík axonometrikus nyomvonalára merőleges egyenesen lesz, a leforgatott pontnak az s egyenestől való távolsága oly derékszögű háromszög átfogója, melynek egyik befogója a pont axonometrikus képének távolsága az s egyenestől, másik befogója a térbeli P pontnak távolsága az axonometrikus képsíktól. Mivel az utóbbi befogó szerkesztését a 165. §-ban részletesen elintéztük, síkra illeszkedő tetszőleges pontnak az axonometrikus képsíkba való forgatása szintén elintézettnek tekinthető. De ha tekintetbe vesszük, hogy itt is síkbeli rendszer képe és beforgatottja orthogonális affinitásban lévő síkbeli rendszerek, a sík oly pontjának leforgatását fogjuk megszerkeszteni, mely pontra nézve a pontnak az axonometrikus képsíktól való távolságának szerkesztése a lehető legegyszerűbb. Ilyen pontok a sík tengelypontjai, tehát általános helyzetű sík leforgatásánál elsősorban a sík valamely kedvező fekvésű tengelypontját forgatjuk le, ekkor a síkbeli rendszer képe és leforgatottja között fennálló axiális affinitásnak ismerjük a tengelyét, ez a sík axonometrikus nyomvonala, és egy megfelelő pontpárt, az így meghatározott affinitás alapján szerkesztjük meg a sík minden további pontjának leforgatását.

A 221. ábrában a következő feladatot oldottuk meg: Adva van a tengelykereszt képe, egy sík második nyomvonala, s_2, és e síkra illeszkedő K pont axonometrikus képe és alaprajza. Szerkesztessék meg a K ponttal és az s_2 nyomvonallal adott síkban ama négyzet, melynek középpontja az adott K pont, egyik diagonálisának egyenese axonometrikus fővonal és féldiagonálisának valódi nagysága az adott távolság. Mindenekelőtt megszerkesztjük a négyzet síkjának hiányzó nyomvonalait. Az első nyomvonal egy pontja s_2 és x metszéspontja, egy másik pontját úgy nyerjük, hogy a sík K pontjára illeszkedő második fővonalat rajzoltuk meg, e második fővonal axonometrikus képe a K pontra illeszkedő és s_2 egyenessel parallel egyenes, alaprajza K' pontra illeszkedő és x tengellyel parallel egyenes, az így szerkesztett második fővonal első nyompontja a sík első nyomvonalának egy másik pontja. A sík harmadik nyomvonalának egy pontja a szerkesztett első nyomvonal és y tengely metszéspontja, egy másik pontja a második nyomvonal és z tengely metszéspontja, T. Mivel a négyzet síkját be kell forgatni az axonometrikus képsíkba, felvesszük az axonometrikus képsíkot nyomháromszögével, a nyomháromszög



221. ábra.

egy csúcspontja legyen az x tengelyen tetszőlegesen felvett S_x pont. A megrajzolt nyomháromszög alapján megrajzoljuk az adott sík axonometrikus nyomvonalát, az s egyenest. Ezek után megszerkesztjük az adott sík T tengelypontjának távolságát az axonometrikus képsíktól, ez a $\overline{T(T)^x}$ távolság, ahol a $T(T)^x$ egyenes a z tengely képére merőleges. Ha az adott síkot az s egyenes körül beforgatjuk az axonometrikus képsíkba, akkor a sík T tengelypontjának beforgatottja a T ponton átmenő és az s egyenesre merőleges egyenesen lesz, a leforgatott pontnak s egyenestől való távolsága azon derékszögű háromszög átfogója, melynek egyik befogója T axonometrikus képének távolsága a sík axonometrikus nyomvonalától, másik befogója a T pontnak az axonometrikus képsíktól való távolsága, ez $\overline{T(T)^x}$. Miután megrajzoltuk a T pontnak leforgatottját, a (T) pontot, ezt összekötjük az s és s_2, illetőleg az s és s_3 közös pontjával, evvel nyertük a sík második, illetőleg harmadik nyomvonalának leforgatottját. Ezekután megrajzoljuk a K pontra illeszkedő és az s egyenessel parallel egyenest, ez a síknak K pontjára illeszkedő axonometrikus fővonala, e fővonalnak megállapított második és harmadik nyompontját beforgatjuk az axonometrikus képsíkba az egyenesen fekvő K ponttal együtt. A leforgatásban az adatok alapján megrajzolt négyzet felállításával nyerjük a kívánt négyzet axonometrikus képét, a rajzban $ABCD$.

Klinogonális axonometria.

Az orthogonális axonometriában a gyakorlat szempontjából legfontosabb feladatunk az volt, hogy valamely derékszögű koordinátarendszerre vonatkoztatott alakzatnak orthogonális projekcióját egy képsíkon, az axonometrikus képsíkon, szerkesszük meg. *A legtöbb alakzatnak egy képsíkon való ábrázolásánál megköveteljük, hogy alakzat és képsík természetes viszonylagos helyzetben legyenek.* Alakzat és képsík természetes viszonylagos helyzetben van, ha az a sík, melyre az alakzatot állítva gondoljuk, az alaprajz síkja, vízszintes, míg a képsík függélyes helyzetű sík. Az orthogonális axonometrikus ábrázolásnál alakzat és képsík nem lehet természetes helyzetben, mert természetes helyzet mellett az alaprajz síkja a képsíkra merőleges, de akkor az alakzat képe nem képies, mivel az alaprajz síkjára illeszkedő elemek képei egy egyenesen vannak, az alaprajzsíknak és az axonometrikus képsíknak metszésvonalában. Az orthogonális axonometrikus ábrázolásnak még egy hátrányát említjük meg, ez abban áll, hogy a tengelykereszt képében minden tengelyen van rövidülés, minden tengelynek megvan a maga skálája. E körülmény mód felett megnehezíti két orthogonális képével adott alakzat axonometrikus képének szerkesztését. Amennyiben derékszögű koordinátarendszerre vonatkoztatott alakzat axonometrikus ábrázolásánál az említett hátrányokat meg akarjuk szüntetni, úgy az orthogonális parallel projekcióról le kell mondani. Tehát alakzat és képsík természetes viszonylagos helyzete mellett az alakzatot a képsíkra oly irányban kell projiciálni, mely irány a képsíkra merőleges egyenes irányától eltér, szóval az alakzatra a klinogonális parallel projekció módszerét alkalmazzuk. Mivel ez esetben megint egy derékszögű koordinátarendszerre vonatkoztatott alakzat pontjainak koordinátáiból fogjuk megállapitani az alakzat képét, azért ezt az ábrázoló geometriai módszert klinogonális axonometriának nevezzük.

170. §. A ferde parallel projekció. A ferde parallel projekció, vagy klinogonális projekció lényegét a 11. §-ban érintettük. Alakzatnak egy képsíkon lévő ferde képéről rögtön teljes tájékoztatást nyerünk, ha a vetítősugarat fénysugárnak tekintjük. Ekkor a tér P pontjának képsíkra vetett árnyéka a pont ferde parallel képe a képsíkon. E szerint alakzatnak árnyékfelfogó síkon lévő árnyéka az alakzatnak klinogonális képe a síkon. A parallel világításnál részletesen elintézett árnyékszerkesztések törvényszerűségekhez vezettek, e törvényszerűségek a klinogonális projekcióban ismétlődnek. A ferde parallel projekció fontosabb törvényei a következők:

1. *Egyenes ferde képe megint egyenes, de a vetítősugár képe pont.*

2. *Parallel egyenesek ferde képei parallel egyenesek.*

3. *Képsíkkal parallel egyenes ferde képe a térbeli egyenessel parallel.*

4. *Távolság, melynek egyenese a képsíkkal parallel, ferde parallel képe az eredeti távolsággal egyenlő.*

5. *Tetszőleges egyenesen fekvő távolság képhossza lehet az eredeti távolságnál kisebb, lehet vele egyenlő és lehet az eredetinél nagyobb, a képhossz függ az egyenes, a vetítősugár és képsík viszonylagos helyzetétől.*

6. *Parallel egyeneseken fekvő egyenlő távolságok ferde parallel képei parallel egyeneseken fekvő egyenlő távolságok.*

7. *Egy egyenesen fekvő két távolság, vagy parallel egyeneseken fekvő két távolság osztóviszonya egyenlő a képtávolságok osztóviszonyával.* Tegyük fel, hogy a két távolság egy egyenesen van és legyenek e távolságok $\overline{AB}$, illetőleg $\overline{CD}$, ferde képeik pedig $\overline{A'B'}$, $\overline{C'D'}$, akkor

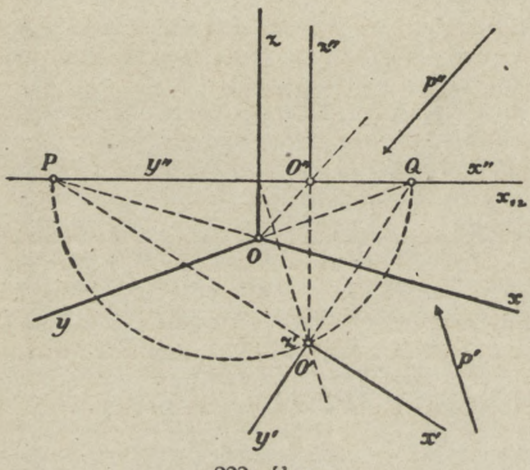
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}, \quad \text{vagy} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}},$$

utóbbi arány azt mondja, hogy mindaddig, míg egyenes, képsík, vetítősugár viszonylagos helyzete nem változik, az egyenesen felvett tetszőleges távolság képhosszának viszonya az eredeti távolsághoz állandó. Ha az egyenes, melyen az eredeti távolságot felvettük, g, akkor ennek az állandó viszonynak jele q_g, a g egyenes rövidülési viszonya. Képsík és vetítősugár adott viszonylagos helyzete mellett egyenesről egyenesre ez a rövidülési viszony általában más és más, de parallel egyeneseken a rövidülési viszony ugyanaz. A rövidülési viszony nem jelenti mindig azt, hogy valamely távolság képhossza rövidebb az eredeti távolságnál, így pld., ha $q_x=3$, ez azt jelenti, hogy az x egyenesen felvett távolság képhossza az eredeti távolságnak háromszorosa.

8. *Képsíkkal parallel helyzetű síkra illeszkedő síkidom ferde parallel képe az eredeti síkidommal egybevágó.*

9. *Képsíkra merőleges egyenes ferde parallel képe parallel a vetítősugárnak a képsíkon lévő orthogonális projekciójával.*

171. §. A tengelykereszt klinogonális képe. A tengelykereszt ferde parallel képét csak akkor szerkeszthetjük, ha ismerjük a tengelykereszt, képsík és vetítősugár viszonylagos helyzetét. A feladatot két képsíkon az orthogonális parallel projekcióban oldjuk meg. Mivel tengelykereszt és képsík természetes viszonylagos helyzetét tételezzük fel és a második képsík a térben amúgyis függélyes helyzetben van, az axonometrikus képsíkot a második képsíkkal azonosítjuk. Az alaprajz síkja a térben horizontális sík, ez a horizontális sík legyen az első képsík. Képsíkok és tengelykereszt ilyen viszonylagos helyzete mellett vegyük fel orthogonális projekcióban két képsíkon a tengelykereszt két képét. (222. ábra.) Messe az x, ill. y tengely a második képsíkot P, ill. Q pontban, e pontok az x_{12} tengelyre illeszkedő pontok. Az így felvett tengelykereszt ferde parallel képét kell megszerkeszteni a második képsíkon, ez lesz a tengelykereszt klinogonális képe. Legyen a ferde vetítés iránya a $p\,(p', p'')$ egyenes, akkor az O pontra illeszkedő és p egyenessel parallel egyenes metszi a második képsíkot az egyenes második nyompontjában, e pont lesz a koordinátarendszer kezdőpontjának klinogonális képe az axonometrikus képsíkon, jele O. A z tengely ferde képe az O pontra illeszkedő és a térben levő z tengellyel, vagy a z tengely második képével parallel egyenes lesz, mert a z tengely az axonometrikus képsíkkal parallel egyenes. Az x tengely klinogonális képének egyik pontja O, egy másik pontja a P pont, mert a P pont az x tengelynek az axonometrikus képsíkra illeszkedő pontja. Ugyanúgy az y tengely ferde képe az O és Q pontok összekötő egyenese.



222. ábra.

Az orthogonális axonometriában a tengelykereszt képe meghatározza a tengelykereszt és axonometrikus képsík viszonylagos helyzetét, csak a koordinátarendszer kezdőpontjának a képsíktól való távolsága volt határozatlan. A klinogonális axonometriában, ha feltesszük, hogy tengelykereszt és képsík természetes viszonylagos helyzetben van, a tengelykereszt képe nem határozza meg a tengelykereszt és axonometrikus képsík viszonylagos helyzetét.

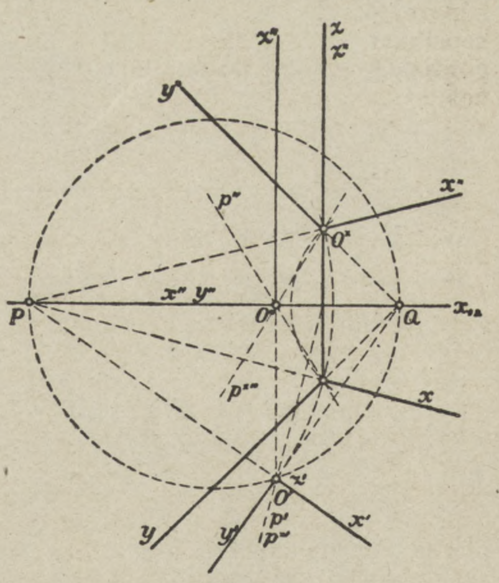
T. i. legyen adva a tengelykereszt képe, akkor a 222. ábrában szereplő x_{12} tengelyt z tengely ferde képére merőlegesen kell választani, de egyébként tetszőleges. Ez az egyenes az axonometrikus képsík nyomvonala az alaprajz síkján. Az x tengely képének metszéspontja a felvett x_{12} egyenessel, a P pont, az x tengely nyompontja az axonometrikus képsíkon; ugyanúgy az y tengely képének metszéspontja a felvett x_{12}-tengellyel, a Q pont, az y tengely axonometrikus nyompontja. Az alaprajz síkja a térben az x_{12} tengelyre illeszkedő és z ferde képére merőleges sík, tehát az x_{12} tengely felvételével az alaprajz síkja egyértelműen meghatározott sík. Az alaprajz síkjában a koordinátarendszer kezdőpontja és a P, Q pontok oly derékszögű háromszög csúcspontjai, melynek átfogója a $\overline{PQ}$ távolság. A térbeli O pont számára az első képsíkban mértani helyként kört nyerünk, melynek átmérője a $\overline{PQ}$ távolság, szóval e kör bármely pontja lehet a koordinátarendszer kezdőpontja a térben. Amennyiben a koordinátarendszer kezdőpontjául a kör egy pontját kiválasztottuk, képsík, tengelykereszt és vetítősugár viszonylagos helyzete meghatározott.

A 222. ábrában nemcsak a tengelykereszt képét szerkesztettük meg, hanem minden egyes tengely rövidülési viszonyát is. Mivel a z tengely az axonometrikus képsíkkal parallel, $q_z = 1$, vagyis a z tengely képén minden távolság valódi nagyságban mutatkozik. Az x tengely rövidülési viszonya a $\overline{PO}$ és $\overline{PO'}$ távolságok viszonya, mert a $\overline{PO}$ távolság az x tengely első képén a valódi nagyságban látható $\overline{PO'}$ távolság ferde parallel képe. Ugyanúgy

$$\frac{\overline{QO}}{\overline{QO'}} = q_y.$$

A tengelykereszt megszerkesztett ferde parallel képe és a tengelyek megállapított rövidülési viszonyai alapján ugyanúgy, mint az orthogonális axonometriában, megszerkeszthetjük derékszögű koordinátarendszerre vonatkoztatott alakzatnak klinogonális axonometrikus képét. Egy-egy ponthoz tartozó x, ill. y koordinátájának képhosszát az x, ill. y tengelyhez tartozó proporcionális szög segítségével szerkesztjük meg úgy, a hogy azt az orthogonális axonometriában a 169. § γ) alatt tárgyaltuk.

172. §. Tengelykereszt képének szerkesztése az x és y tengely adott rövidülési viszonya alapján. Eddig a klinogonális axonometriában tengelykereszt, képsík és vetítősugár adott viszonylagos helyzete mellett megszerkesztettük a tengelykereszt képét, és amint láttuk, ekkor a tengelykereszt képe mellett az egyes tengelyek rövidülési viszonya is meghatározott. Ha ugyanazon feladatban eltekintünk a vetítősugár adottságától, akkor a tengelykereszt képe határozatlan, de határozottá tehetjük azáltal, hogy előre megadjuk az x és y tengely rövidülési viszonyát. E szerint feltesszük azt, hogy tengelykereszt és axonometrikus képsík viszonylagos helyzete adott, pld. legyen ez a helyzet a 223. ábrában orth. parallel pro-

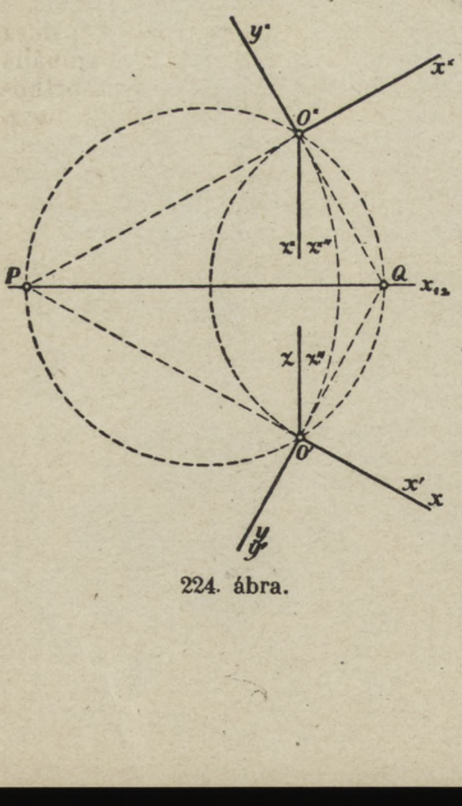


223. ábra.

jekcióban két képsíkon látható helyzettel azonos, ahol megint a második képsík az axonometrikus képsík. Továbbá követeljük azt, hogy az x tengely rövidülési viszonya, $q_x = 1$, az y tengely rövidülési viszonya, $q_y = \frac{1}{2}$ legyen. Ez azt mondja az ábrában feltüntetett jelölés szerint, hogy a kezdőpont ferde parallel képe, O, a P ponttól $\overline{PO'}$ távolságban van, vagyis O számára mértani helyként kört nyerünk, melynek középpontja P és sugara a $\overline{PO'}$ távolság; a $q_y = \frac{1}{2}$ pedig azt mondja, hogy O oly körön fekszik, melynek középpontja Q és sugara a $\overline{QO'}$ távolság fele. Az így nyert körök közös pontjainak bármelyike akkor a kezdőpont klinogonális képe, legyenek e pontok O és $O^{\times}$. Az O pont, mint a második képsíkra illeszkedő pont a térbeli kezdőponttal meghatározza a vetítősugarat. Egy vetítősugarat meghatároz az O pont, ez $p(p', p'')$, egy másik vetítősugarat meghatároz az $O^{\times}$ pont, ez $p^{\times}(p^{\times\prime}, p^{\times\prime\prime})$. A p vetítősugár mellett a derékszögü koordinátarendszerre vonatkoztatott valamely alakzatnak klinogonális axonometrikus képe dimetrikus felülnézet, a $p^{\times}$ vetítősugár mellett az alakzat klinogonális axonometrikus képe dimetrikus alulnézet.

Megjegyzendő, hogy a 223. ábrában $q_z = q_x = 1$ és $q_y = \frac{1}{2}$ feltételek mellett szerkesztettük meg a tengelykereszt képét, de tengelykereszt és axonometrikus képsík viszonylagos helyzetét adottnak vettük fel. Ha a tengelykereszt és axonometrikus képsík viszonylagos helyzete más és más, akkor a fenti adott rövidülési viszonyok kielégítésével más és más lesz a tengelykereszt képe.

173. §. Katonaperspektíva, madártávlati képek, békaperspektíva. Adott alakzatnak az eddig tárgyalt ábrázoló geometriai módszerek szerint készített képében parallel egyenesek képei a képsíkon parallel egyenesek. Alakzatnak oly képéről, melyben parallel egyenesek képei megint parallel egyenesek, azt szoktuk mondani, hogy a kép az alakzatnak parallel perspektív képe, röviden az alakzatnak egy parallel perspektívája.



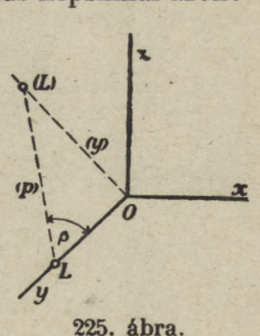
224. ábra.

Katonáék a multban és még most is erődítményszerű építkezések terveit, rajzait az ú. n. katonaperspektívában készítették. A katonaperspektíva a klinogonális axonometria speciális esete, ekkor alakzat és axonometrikus képsík természetes viszonylagos helyzete mellett megköveteljük, hogy a tengelykereszt minden tengelyén a rövidülési viszony az egységgel legyen egyenlő. Ha e feltételek kielégítésével (224. ábra) ugyanúgy, mint a 223. ábrában, megszerkesztjük a tengelykereszt klinogonális képét, akkor azt nyerjük, hogy a térbeli O pont klinogonális képe az axonometrikus képsík ama pontja, mely pont az O' pontnak a második képsíkba forgatottjával azonos, ha a forgatást az x_{12} tengely körül végezzük hol egyik, hol a másik értelemben. A tengelykereszt képében az x és y tengelyek mindig derékszöget alkotnak, míg a z tengely képének szöge az x, ill. y tengellyel attól függ, hogy a koordinátarendszert miképpen helyeztük el az axonometrikus képsíkkal szemben. Adott helyzet mellett két megoldást nyerünk itt is, az egyik megoldás felülnézet, a másik megoldás alulnézet. A vetítősugár a két képsíkból álló képsíkrendszerben ekkor profil egyenes, felülnézet esetében a vetítősugár az első felezősíkkal parallel, alulnézet esetében a vetítősugár a második felezősíkkal parallel. Az alakzatnak felülnézetes képe az alakzatnak katonaperspektívában ábrázolt képe, vagy madártávlati képe, ha pedig az alakzatnak fenti körülmények mellett alulnézetes képét szerkesztjük, akkor az alakzat képe az alakzat békaperspektívája.

A katonaperspektívának az eddigi axonometrikus ábrázolásokkal szemben legnagyobb előnye abban áll, hogy az alakzat alaprajzának axonometrikus képe az eredeti alaprajzzal egybevágó. E szerint kész alaprajzból az alakzat katonaperspektíváját úgy szerkesztjük, hogy az alaprajz egyes pontjain át tetszőleges irányú parallel egyeneseket vezetünk és ezekre az egyes pontok magassági koordinátáit valódi nagyságban felrakjuk.

174. §. Kavalierperspektívák. Eddig a klinogonális axonometriában tengelykereszt és axonometrikus képsík viszonylagos helyzetét úgy vettük fel, hogy a tengelykereszt egy tengelye az axonometrikus képsíkkal parallel legyen. Tegyük fel, hogy a tengelykereszt két tengelye, az x és z tengelye legyen parallel az axonometrikus képsíkkal. Mivel ekkor a felrajz síkja parallel az axonometrikus képsíkkal, az x és z tengelyek klinogonális képei derékszöget alkotnak; az y tengely a térben az axonometrikus képsíkra merőleges, tehát adott vetítősugár mellett az y tengely klinogonális képe az adott vetítősugárnak az axonometrikus képsíkon lévő orthogonális projekciójával parallel. Ha a vetítősugarat nem adjuk meg, akkor az y tengely klinogonális képét tetszőleges irányban rajzolhatjuk, de ekkor az y tengely klinogonális képe nyomvonala az axonometrikus képsíkra merőleges olyan síknak, mellyel a vetítősugár parallel.

Legtöbbször a felrajz síkját az axonometrikus képsíkkal azonosítjuk, ekkor az x tengely képe önmaga, z tengely képe önmaga, e két tengely metszéspontja a koordinátarendszer kezdőpontja, O, az y tengely képe az O pontra illeszkedő tetszőleges egyenes. (225. ábra.) A vetítősugár a tengelykereszt képével nincs meghatározva, ezt vagy avval adjuk meg, hogy megadjuk β képsíkszögét, vagy megadjuk az y tengely rövidülési viszonyát. A képsíkszög meghatározza a rövidülési viszonyt és megfordítva. Ha az y tengely rövidülési viszonyát ismerjük, akkor a képsíkszöget úgy nyerjük, hogy y tengelyt az y



225. ábra.

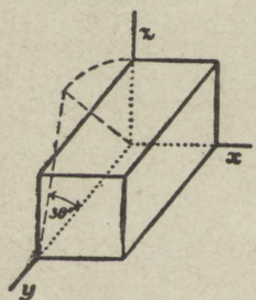
képe körül beforgatjuk az axonometrikus képsíkba, a beforgatott tengely a saját képére merőleges, a beforgatott tengelyen felveszünk egy tetszőleges pontot, (L), a megadott rövidülési viszony alapján meghatározzuk e pont képét, az L pontot, az L és (L) pontok összekötő egyenese a leforgatott vetítősugár, (p), a (p) egyenes és az y tengely képe adja a vetítősugár képsíkszögét.

$\beta = 45°$ esetében az y tengely rövidülési viszonya az egységgel egyenlő, tehát ekkor a derékszögű koordinátarendszerre vonatkoztatott kép izometrikus, minden más esetben dimetrikus.

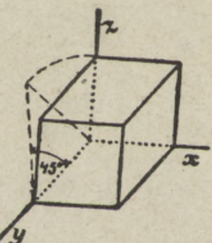
A klinogonális axonometriának ama esete, mikor az axonometrikus képsík két tengellyel parallel, a kavalierperspektíva. A kavalierperspektíva a leggyakrabban alkalmazott axonometrikus ábrázolási mód, mert egyrészt tengelykereszt, képsík és vetítősugár a legkönnyebben rekonstruálható, másrészt a koordinátarendszerre vonatkoztatott alakzat axonometrikus képének szerkesztése a legegyszerűbb, mivel $q_x = q_z = 1$ és q_y tetszőleges.

A katonaperspektíva is kavalierperspektívának tekinthető. Ha a katonaperspektívát, mint kavalier-féle perspektívát akarjuk nyerni, akkor az axonometrikus képsíkot az alaprajz síkjával azonosítjuk és erre vetítjük a tengelykeresztet oly módon, hogy a vetítősugár az axonometrikus képsíkkal 45°-os szöget alkosson.

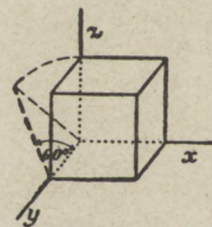
A 226., 227. és 228. ábrában ugyanannak a kockának egy-egy kavalierperspektíváját mutatjuk be. Az egyes esetekben a vetítősugár képsíkszöge 30°, 45°, illetve 60°. E képek szemlélete arról győz



226. ábra.



227. ábra.



228. ábra.

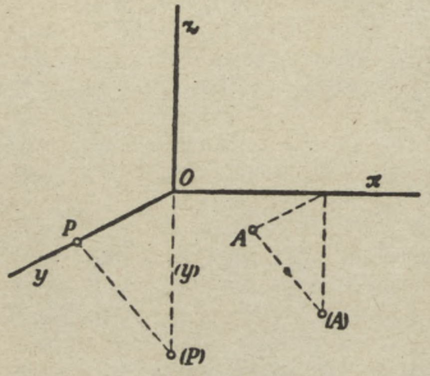
meg, hogy minél nagyobb a képsíkszög, annál képiesebb benyomást kelt a kocka, dacára annak, hogy minden kép helyes kép. Ha azt akarjuk, hogy minden kép az eredeti alakzat hű benyomását keltse, akkor felülről jobbról, a vetítősugár irányában kell szemlélni, ellenkező esetben az ábra torzkép benyomását kelti. A kép látszólagos torzulásai abból a szokásból erednek, hogy alakzatról készített bármely képet a rajz síkjára merőleges egyenes egy pontjából szemléljük, mely egyenesnek metszéspontja a képsíkkal nagyjából az ábra középpontja.

175. §. Térelemek ábrázolása, helyzetgeometriai feladatok. A klinogonális axonometria tárgyalt eseteiben az egyes térelemeket ugyanúgy ábrázoljuk, mint az orthogonális axonometriában. Adott tengelykeresztprojekció mellett a pontot adottnak tekintjük, ha ismerjük ferde axonometrikus képét és valamely rajzának axonometrikus képét. A pont klinogonális axonometrikus képéhez megadjuk rendesen a pont alaprajzának axonometrikus képét, akkor itt is a két adott kép összekötő egyenese a z tengely klinogonális axonometrikus képével parallel. Amennyiben az egyes tengelyek rövidülési viszonyait ismerjük, akkor meghatározható a térben a pont és derékszögű koordinátarendszer viszonylagos helyzete, de magának a pontnak rekonstrukciója a térben még nem lehetséges, ehhez szükséges az axonometrikus képsík, a tengelykereszt és vetítősugár viszonylagos helyzete.

A parallel projekcióban az egyenes és sík ábrázolását végeredményben mindig pont ábrázolására vezettük vissza, ebből következik, hogy a klinogonális axonometriában az egyenest és síkot ugyanúgy ábrázoljuk, mint az orthogonális axonometriában, mert a pont ábrázolása az orthogonális axonometriában ugyanúgy történik, mint a klinogonális axonometriában. De ebből az is következik, hogy a térelemek összekötési és metszési feladatait ugyanúgy kezeljük a klinogonális axonometriában, mint az orthogonális axonometriában. E szerint az egyenes pontjai közül itt is kiemeljük az egyenes első, második, harmadik nyompontját; a sík egyenesei közül pedig kiemelhetjük a sík első, második, harmadik nyomvonalát, továbbá a sík első, második és harmadik fővonalát. Az egyenes axonometrikus nyompontját, ill. a sík axonometrikus nyomvonalát és egy-egy axonometrikus fővonalát csak akkor tudjuk megszerkeszteni, ha tengelykereszt és axonometrikus képsík viszonylagos helyzetét ismerjük. Csak a kavalierperspektívában ismerjük a tengelykereszt és axonometrikus képsík viszonylagos helyzetét, ekkor, mint abban megállapodtunk, a felrajz síkja az axonometrikus képsík, s így ez esetben az egyenes második nyompontja az egyenes axonometrikus nyompontja, a sík második nyomvonala a sík axonometrikus nyomvonala.

176. §. Metrikus feladatok a klinogonális axonometriában. A tengelykereszt adott képe mellett a klinogonális axonometriában a metrikus feladatokat nem tudjuk megoldani. A metrikus feladatokat csak akkor oldhatjuk meg, ha a tengelykereszt képén kívül minden egyes tengelyen az ismeretlen egységnek képhosszát ismerjük, mert csak ezen adatok birtokában határozhatjuk meg az ismeretlen egység valódi nagyságát. Az ismeretlen egység konstruktív meghatározását egy későbbi fejezetben fogjuk tárgyalni, ebből majd kitűnik, hogy a szerkesztés sokkal hosszadalmasabb, semhogy gyakorlati alkalmazást nyerhetne. Tehát kizárólag gyakorlat szempontjából arra az álláspontra helyezkedünk, hogy metrikus feladatokat csak akkor oldunk meg klinogonális axonometriában, ha a tengelyek képein az egység képhosszát és magát az eredeti egységet ismerjük. Utóbbi adatok legközvetlenebbül a kavalierperspektívában állanak rendelkezésünkre, s így a gyakorlat szempontjából misem természetesebb, mint az, hogy klinogonális axonometriában metrikus feladatokat csak akkor oldunk meg, ha kavalierperspektívában operálunk. A kavalierperspektívában tárgyalandó metrikus feladatoknál mindenkor feltételezzük azt, hogy az axonometrikus képsík azonos a felrajz síkjával és hogy az y tengely rövidülési viszonya adott.

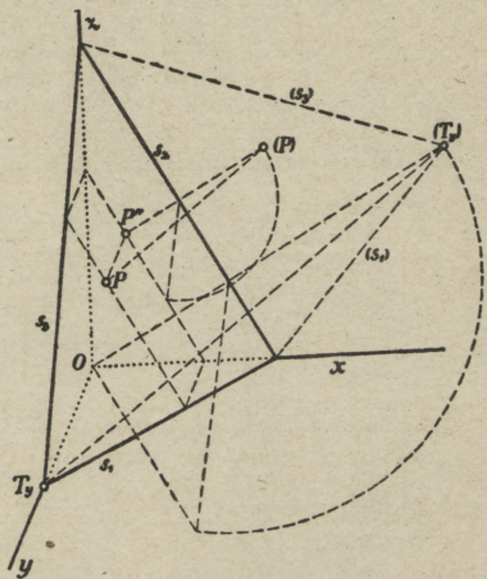
a) Az alaprajz síkjának beforgatása az axonometrikus képsíkba. Ha az alaprajz síkját forgatjuk az axonometrikus képsíkba, a forgatást az alaprajz síkjának axonometrikus nyomvonala körül végezzük, ez a nyomvonal maga az x tengely. (229. ábra.) Az y tengely leforgatottja, mivel az y tengely a térben az O pontra illeszkedő és az x tengelyre merőleges egyenes, a z tengely képével azonos egyenes. Az y tengely P pontjának leforgatottja a q_y rövidülési viszony alapján szerkeszthető. Ha pl. $q_y = \frac{2}{3}$, akkor a P pont képének az O ponttól való távolságát megfelezzük és $\overline{PO}$ távolság felét az y tengely leforgatottjára az O ponttól számítva háromszor felrakjuk, az így nyert távolság végpontja a leforgatott P pont, (P). Az alaprajz síkjának tetszőleges A pontjának leforgatását úgy szerkesztjük meg, hogy az A ponton át az y tengelylyel parallel egyenest vezetünk, ez metszi az x tengelyt egy pontban, e pont a leforgatásnál helybenmaradó pont, tehát az A ponton átmenő segédegyenes leforgatottja e pontra illeszkedő egyenes és egyébként az y tengely leforgatottjával parallel, mivel parallel egyenesek leforgatottjai parallelek. Az így nyert egyenesre felmérjük az A pont y koordinátájának képhosszát $^3/_2$-szer az x tengelytől számítva. Ha az alaprajz síkjára illeszkedő pont képét összekötjük ugyane pont leforgatottjával, akkor az előző szerkesztés alapján a rajz síkjában meghatározott irányú egyenest nyerünk, ez az irány kizárólag az y tengely rövidülési viszonyától függ. Tehát az alaprajz síkjában az x tengely minden pontjának ferde képe és leforgatottja összeesik, míg minden más pontjának képe és leforgatottja meghatározott irányú egyenesre illeszkedik, szóval az alaprajz síkjára illeszkedő elemek képei és leforgatottjai ferde axiális affinitásban lévő egyesített síkbeli rendszerekben megfelelő elemek. Ezt az affin vonatkozást előnyösen felhasználhatjuk akkor, ha az alaprajz síkjában fekvő adott síkidom ferde parallel képét kell szerkeszteni, ekkor a leforgatásban megszerkesztjük az adott síkidomot valódi nagyságban, majd meghatározzuk a megállapított affin vonatkozásban e síkidom megfelelőjét.



229. ábra.

Hasonlóan járhatunk el az oldalrajz síkjának az axonometrikus képsíkba forgatásánál, itt a forgatás tengelye z tengely és az y tengely leforgatottja az x tengely képével esik össze.

b) Általános helyzetű síknak beforgatása az axonometrikus képsíkba. Legyen adva kavalierperspektívában a tengelykereszt képe, egy általános helyzetű sík, S, három nyomvonala és tegyük fel, hogy az y tengely rövidülési viszonya, $q_y = \frac{2}{3}$. (230. ábra.) A forgatásnál a forgatási tengely a sík axonometrikus nyomvonala, ez a jelen esetben a sík második nyomvonalával azonos egyenes. Az orthogonális parallel projekcióban adott síkra illeszkedő pont képsíkba forgatottja a nyomvonal körül oly egyenesen van, mely egyenes a pontnak képsíkon lévő merőleges vetületére illeszkedik és merőleges a sík nyomvonalára; a leforgatott pontnak távolsága a sík nyomvonalától oly derékszögű háromszög átfogója, melynek egyik egyik befogója a pont merőleges vetületének távolsága a nyomvonaltól, másik befogója az eredeti pont és képsík távolsága. Az itt leírt utat követjük ferde parallel projekcióban adott síkra illeszkedő pont leforgatásánál. Legyen a síkra illeszkedő pont axonometrikus képe P, felrajzát a sík második fővonalával szerkesztettük meg, jele P'', a P'' pont egyúttal az eredeti P pont orthogonális projekciója az axonometrikus képsíkon s így a pont leforgatottja a P'' pontra illeszkedő és az s_2 egyenesre merőleges egyenesen lesz. A leforgatásnál szereplő derékszögű háromszög egyik befogója P'' és s_2 távolsága, másik befogója az eredeti P pontnak a P'' ponttól való távolsága, ez a távolság pedig a pont axonometrikus képének felrajzától való távolsága megszorozva az y tengely rövidülési viszonyának reciprok értékével, a mi esetünkben a másik befogó a rajzban látható $\overline{PP''}$ távolság felének háromszorosa.



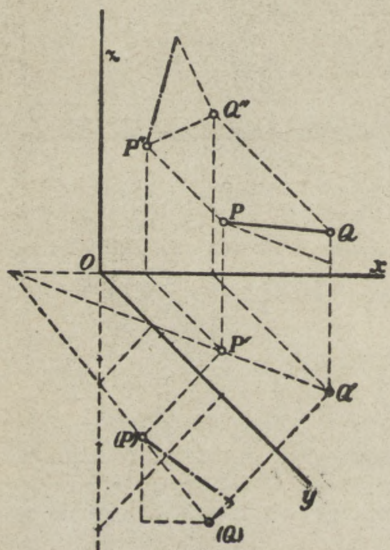
230. ábra.

Amennyiben a rajzban a síknak az y tengelyben lévő tengelypontja, T_y, hozzáférhető, ezt forgatjuk le. Ez csak annyiban előnyös, mert a sík e tengelypontjának felrajza a koordinátarendszer kezdőpontja, tehát külön nem kell megszerkeszteni. Ha az általános helyzetű sík egy pontját leforgattuk az axonometrikus képsíkba, akkor minden más pontjának leforgatását ama axiális affin vonatkozás alapján nyerhetjük, mely affin vonatkozás a síkbeli rendszer klinogonális képe és axonometrikus képsíkba való forgatottja között fennáll. Az affinitás tengelye a sík axonometrikus nyomvonala, mert ez egyenesre illeszkedő pont képe és leforgatottja összeesik, az affinitás irányát szolgáltatja oly egyenes, mely egyenes egy a síkra illeszkedő pont klinogonális képét összeköti e pont leforgatottjával.

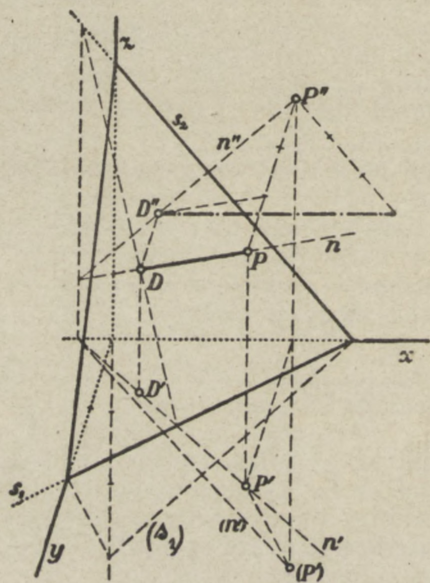
c) *Két pont távolsága.* Legyen adva kavalierperspektívában két pont, P és Q. (231. ábra.) A két pont által meghatározott távolság valódi nagyságát azon derékszögű háromszög átfogójaként nyerjük, melynek egyik befogója a távolság alaprajzának valódi nagysága, másik befogója a végpontokhoz tartozó első távolságok különbsége. A távolság alaprajzának valódi nagyságát az alaprajz síkjának az axonometrikus képsíkba való forgatásával nyerjük, a végpontokhoz tartozó első távolságok különbsége közvetlenül lemérhető, ez a rajzban a $\overline{PP'}$ és $\overline{QQ'}$ távolságok különbsége, mert e távolságok a z tengellyel parallel egyenesek és e tengelyen rövidülés nincs.

A két pont távolságát még ama derékszögű háromszög átfogójaként nyerhetjük, melynek egyik befogója a távolság felrajza, ez a rajzban valódi nagyságban látszik, mivel a felrajz síkja azonos az axonometrikus képsíkkal és másik befogója a távolság végpontjaihoz tartozó második távolságok különbsége. Utóbbi két második távolság különbségének valódi nagyságát úgy nyerjük, hogy meghatározzuk a rajzban szereplő $\overline{PP''}$ és $\overline{QQ''}$ távolságok különbségét és e különbségnek meghatározzuk a valódi nagyságát az y tengely adott rövidülési viszonya alapján, a rajzunkban $q_y = \frac{2}{3}$.

d) Egyenes és sík merőleges helyzetben. Legyen adva kavalierperspektívában az S sík első és második nyomvonalával, továbbá a $P(P, P')$ pont. (232. ábra.) Szerkesztessék meg az y tengely adott rövidülési viszonya mellett, $q_y = \frac{2}{3}$, a pont és sík távolsága. Ekkor



231. ábra.



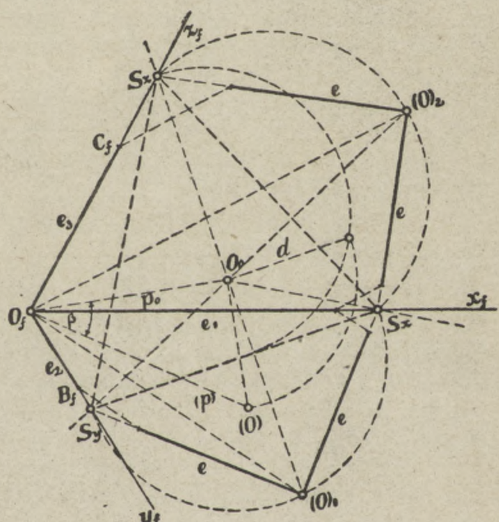
232. ábra.

az adott pontra illeszkedő és az adott síkra merőleges egyenest kell szerkeszteni. A térben a keresett normális alaprajza, ill. felrajza a pont alaprajzára illeszkedő és a sík első nyomvonalára merőleges egyenes, ill. a pont felrajzára illeszkedő és a sík második nyomvonalára merőleges egyenes. A szerkesztés egyes lépései: *a)* az alaprajz síkját az adott sík első nyomvonalával és az adott pont alaprajzával beforgatjuk az axonometrikus képsíkba, a beforgatott pontból a beforgatott nyomvonalra merőlegest állítunk, ez lesz a normális alaprajzának beforgatottja, ennek az egyenesnek megszerkesztjük affin megfelelőjét azon affin vonatkozás alapján, mely fennáll az alaprajz síkjának ferde képe és beforgatottja között, az így nyert egyenes lesz a keresett normális alaprajza; *b)* a felrajz síkjában minden valódi nagyságban látszik, tehát a normális felrajzát nyerjük, ha az adott pont felrajzára illeszkedő és a sík második nyomvonalára merőlegest rajzolunk; *c)* a normális alaprajzából és felrajzából megszerkesztjük a normális axonometrikus képét, megállapítjuk a normálisnak az adott síkkal való metszéspontját, a D pontot, végül megállapítjuk a $\overline{PD}$ távolság valódi nagyságát, ez lesz a pont és sík távolsága.

Pont és sík távolságának nyujtott szerkesztése utasításokat tartalmaz arra is, hogy miként kell adott pontra illeszkedő és adott egyenesre merőleges síkot szerkeszteni.

177. §. Az általános klinogonális axonometria. Eddig a klinogonális axonometria ama eseteit tárgyaltuk, mikor az axonometrikus képsík a derékszögű koordinátarendszer egy vagy két tengelyével parallel volt. Amennyiben az axonometrikus képsík a tengelykereszttel szemben egész általános helyzetű, akkor a derékszögű koordinátarendszerre vonatkoztatott alakzatnak képe általános klinogonális axonometrikus kép, *a módszer,* mellyel a képet megszerkesztjük, *az általános klinogonális axonometria.*

A derékszögű koordinátarendszer és képsík viszonylagos helyzetét megadjuk a nyomháromszöggel úgy, mint az orthogonális axonometriában, tehát e háromszög mindig hegyesszögű háromszög. (233. ábra.) A nyomháromszög magassági pontja a koordinátarendszer kezdőpontjának orthogonális projekciója az axonometrikus képsíkon, O_0. Legyen a kezdőpontnak a szokásos módon szerkesztett távolsága a képsíktól d. A kezdőpontnak klinogonális képét tetszőlegesen vehetjük fel, legyen az O_f. Ha az O_f pontot rendre a nyomháromszög csúcspontjaival összekötjük, akkor e három egyenes a tengelykereszt klinogonális axonometrikus képe. A nyomháromszög, az O_0 és O_f pontok meghatározzák a ferde vetítősugár helyzetét. T. i. az O_0O_f egyenes a vetítősugár orthogonális projekciója az axonometrikus képsíkon, a vetítősugár képsíkszögét pedig úgy nyerjük, hogy azt az $O_fO_0 = p_0$ egyenes körül a képsíkba forgatjuk, ekkor a leforgatott vetítősugár egy pontja az O_f pont, egy másik pontja az eredeti O pont leforgatottja, e pont az O_0 ponton átmenő, O_fO_0 egyenesre merőleges egyenesen az O_0 ponttól d távolságban van. Az $O_f(O)$ egyenes a vetítősugár leforgatottja, (p), a p_0 és (p) egyenesek szöge a vetítősugár képsíkszöge, β.



233. ábra.

Forgassuk az alaprajz síkját az axonometrikus képsíkba, akkor az alaprajz síkjának beforgatottja és ferde parallel képe axiális affin vonatkozásban van, az affinitás tengelye az S_xS_y egyenes, az affinitás iránya az $O_f(O)_1$ egyenes iránya, ha $(O)_1$ jelenti a koordinátarendszer kezdőpontjának beforgatottját az axonometrikus képsíkba. A felrajz síkját is beforgattuk az axonometrikus képsíkba, ferde kép és beforgatott közötti axiális affinitás tengelye S_xS_z, iránya az $O_f(O)_2$ egyenes iránya, ahol $(O)_2$ a koordinátarendszer kezdőpontjának beforgatottja az axonometrikus képsíkba. A koordinátarendszer tengelyeire felmértük az e egységet a kezdőponttól számítva és meghatároztuk az előbbi affinitások alapján minden tengelyen az egység képhosszát. Így $\overline{O_fA_f} = e_1$, $\overline{O_fB_f} = e_2$, $\overline{O_fC_f} = e_3$ az egység képhossza az x, az y, ill. a z tengely klinogonális axonometrikus képén.

Mivel minden tengely ferde képén az egység képhosszát ismerjük, a koordinátarendszerre vonatkoztatott bármely alakzatnak megszerkeszthetjük klinogonális axonometrikus képét.

Az általános klinogonális axonometriát a technikus csak akkor alkalmazza, ha egy derékszögű koordinátarendszerre vonatkoztatott alakzathoz hasonló alakzatnak helyes parallel képét kívánja megszerkeszteni. Alkalmazza pedig azért, mert a tengelykereszt képét egész tetszőlegesen veheti fel, továbbá tetszőlegesen veheti fel minden tengely képén az egység képhosszát. Szóval az adott alakzathoz hasonló alakzat axonometrikus ábrázolásánál az eddigi axonometrikus ábrázolási módszerekkel szemben a legnagyobb önkénnyel járhat el. Ezt a nagy szabadságot biztosítja az általános klinogonális axonometria legfontosabb tétele, a *Pohlke*-féle tétel.

Pohlke tétele: Ugyanazon síkban egy pontból kiinduló három tetszőleges távolság, feltéve, hogy e távolságok között legföljebb egy nulla és a távolságok egyenesei által bezárt szögek között is csak legföljebb egy nulla, mindig a tér egy pontjából kiinduló három egyenlő távolság parallel képe, mely távolságok egyenesei kölcsönösen egymásra merőlegesek és az egyenlő távolságok eredeti hossza az adatok által meghatározott távolság.

Pohlke tételének bizonyítását előkészítjük az affin síkbeli rendszerek tárgyalásával.

178. §. Affin síkbeli rendszerek. Valamely síkbeli rendszer parallel képe a P képsíkon és a síkbeli rendszer képsíkba forgatottja között axiális affin vonatkozást állapítottunk meg. Axiális affin vonatkozásban lévő síkbeli rendszerek már ismeretes tulajdonságain kívül az affin rendszerek oly tulajdonságait említjük meg, melyeket eddig nem hangoztattunk.

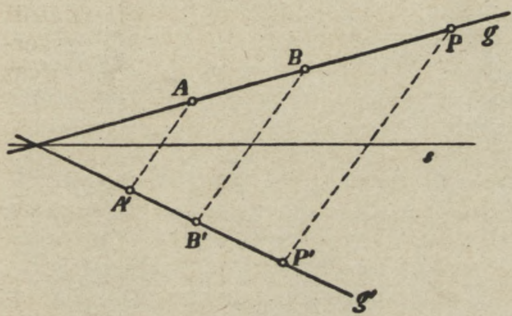
Legyen az egyik síkbeli rendszer tetszőleges g egyenesére illeszkedő három pont A, B, P (234. ábra), az egyenes, illetőleg pontok megfelelői a másik síkbeli rendszerben legyenek rendre g', A', B', P', akkor

$$\frac{AP}{PB} = \frac{A'P'}{P'B'} \quad \text{vagy} \quad \frac{AP}{A'P'} = \frac{PB}{P'B'} = \lambda.$$

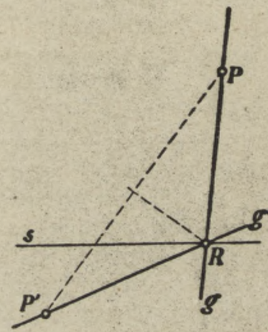
A két egyenlőség közül az első azt mondja, hogy az egyik egyenesen felvett három pont osztóviszonya egyenlő a megfelelő egyenesen fekvő megfelelő pontok osztóviszonyával. A másik egyenlőség pedig azt mondja, hogy megfelelő egyeneseken megfelelő szegmentumok aránya állandó. Ha két egyenes pontjai között oly kölcsönös és egyértelmű vonatkozás áll fenn, mely vonatkozás szerint megfelelő szegmentumok hányadosa állandó, akkor az egyenes pontsorokról azt mondjuk, hogy azok hasonló pontsorok. Két megfelelő szegmentum hányadosa, λ, a hasonló pontsorok hasonlósági tényеzője. E szerint kimondhatjuk, hogy *affin síkbeli rendszerekben megfelelő egyenes pontsorok hasonló pontsorok. Megfelelő parallel pontsorok hasonlósági tényezője ugyanaz; megfelelő, de nem parallel pontsorok hasonlósági tényezője általában különböző.*

Ha hasonló pontsorok esetében a hasonlósági tényező, $\lambda = 1$, akkor e pontsorokban megfelelő szegmentumok egyenlők, az ilyen pontsorokról azt mondjuk, hogy azok kongruens pontsorok.

Axiális affinitásban lévő síkbeli rendszerek esetében az affinitás tengelyével tetszőleges parallel egyenesen fekvő pontsor a megfelelő pontsorral kongruens. Nemcsak a tengellyel parallel



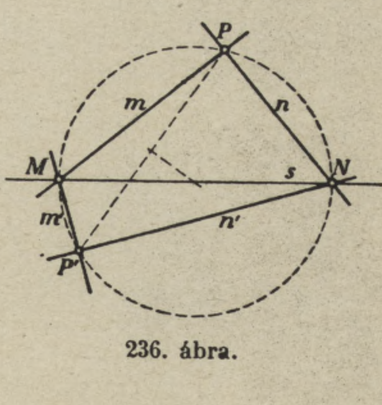
234. ábra.



235. ábra.

egyeneseken lévő pontsorok kongruensek. Hogy más kongruens pontsorokhoz juthassunk, vegyünk fel az adott axiális affinitásban tetszőleges pontpárt, P és P' pontokkal. (235. ábra.) Ha ekkor az affinitás s tengelyének tetszőleges Q pontját összekötjük a P és P' pontokkal, akkor ezek az egyenesek megfelelő egyenesek, továbbá $\overline{PQ}$ és $\overline{P'Q}$ megfelelő távolságok. Ilyen módon egyenlő és megfelelő távolságokhoz akkor jutunk, ha az affinitás tengelyén a pontot úgy választjuk, hogy az a P és P' pontoktól egyenlő távolságban legyen, ezt az R pontot a PP' távolság felező merőlegese metszi ki az affinitás tengelyén.

Orthogonális axiális affinitás esetében a kongruens pontsorok most bemutatott szerkesztése újból az affinitás tengelyével parallel egyenesekhez vezet. E szerint *affin síkbeli rendszereknél az egyik síkbeli rendszerben a parallel egyeneseknek két rendszerét nyerjük, mely egyeneseken lévő pontsorok a megfelelő pontsorokkal kongruens pontsorok. A parallel egyenesek két rendszere egyesül, ha az affinitás orthogonális affinitás.*



236. ábra.

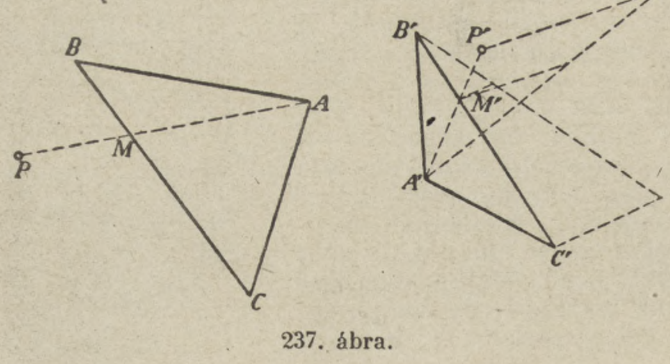
Axiális affin vonatkozásban lévő két síkbeli rendszer egyikében felvett két egyenes szöge általában nem lesz egyenlő a megfelelő egyenesek szögével, de mindenkor találhatunk megfelelő derékszögeket. Ha axiális affin síkrendszerekben megfelelő derékszögeket kívánunk szerkeszteni, akkor elégséges, ha két megfelelő sugársorban szerkesztjük meg azokat. (236. ábra.) Legyen megint P és P' megfelelő pontpár, akkor a PP' távolság felező merőlegese metszi az affinitás tengelyét egy pontban, ha e pont körül P pontra illeszkedő kört rajzolunk, mely kör egyúttal a P' pontra is illeszkedik, úgy e kör az affinitás tengelyét két pontban metszi. Legyenek e metszéspontok M és N, akkor úgy a P, mint a P' pontból e pontok felé menő sugarak derékszöget alkotnak és a szögek szárai megfelelő sugarak. E szerkesztést alkalmazva orthogonális affin vonatkozásban lévő síkbeli rendszerekre, a megfelelő derékszögpárok szárairól megállapíthatjuk azt, hogy az egyik szár és annak megfelelője parallel az affinitás tengelyével, a másik szár és annak megfelelője egy affinitási sugárral összeeső két egyenes. *E szerint minden axiális affinitásban minden pont körüli sugársorban van egy oly derékszög, melynek megfelelője megint derékszög. Az orthogonális affinitásban a megfelelő derékszögek szárai közül két megfelelő az affinitás tengelyével parallel.*

179. §. Síkbeli rendszerek általános affinitása. Síkbeli rendszerek affin vonatkozását általánosítjuk, ha a síkbeli rendszerek együttes fekvését és axiális helyzetét megbontjuk oly módon, hogy az egyik síkbeli rendszert a hozzátartozó elemek viszonylagos helyzetének megváltoztatása nélkül tetszőlegesen elmozdítjuk. Ekkor megfelelő egyenesek metszéspontjai már nem lesznek egy egyenesen, megfelelő pontok összekötő egyenesei nem lesznek parallel egyeneseken, de megfelelő egyeneseken lévő pontsorok hasonló pontsorok maradnak és megfelelő pontok körül van egy megfelelő derékszögpár.

Kölcsönös és egyértelmű vonatkozásban lévő síkbeli rendszerek, melyekben pontnak pont, egyenesnek egyenes, illeszkedő elemeknek illeszkedő elemek, egyenes pontsoroknak hasonló egyenes pontsorok felelnek meg általános affin vonatkozásban lévő síkbeli rendszerek.

Három megfelelő pontpár mindig meghatározza két síkbeli rendszer általános affin vonatkozását.

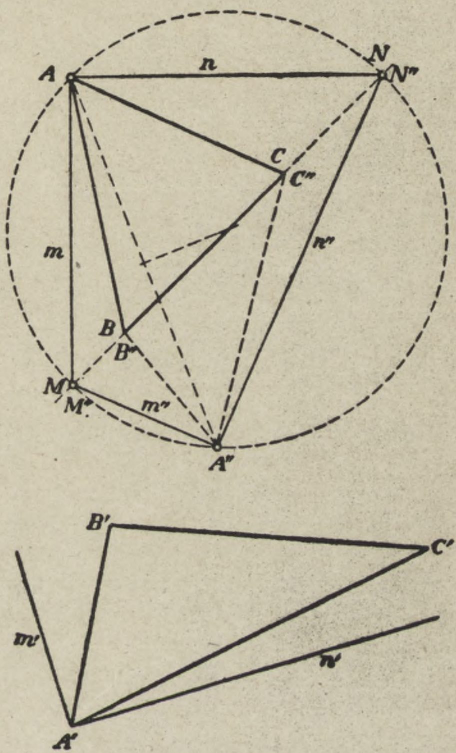
Legyen az egyik síkbeli rendszer három pontja A, B, C, e pontok megfelelői a másik síkbeli rendszerben A', B', C'. (237. ábra.) Hogy az első sík P pontjának megfelelőjét, a P' pontot megszerkeszthessük, a P pontot összekötjük az az ABC háromszög A csúcspontjával, ez



237. ábra.

az egyenes metszi a háromszög szemközt fekvő oldalát M pontban. Úgy e pontnak, mint az AM egyenes P pontjának megfelelőjét megállapítjuk azon az alapon, hogy megfelelő pontsorok hasonló pontsorok. Tetszőleges egyenes megfelelőjének szerkesztését az egyenesre illeszkedő két pont megfelelőjének szerkesztésére vezetjük vissza.

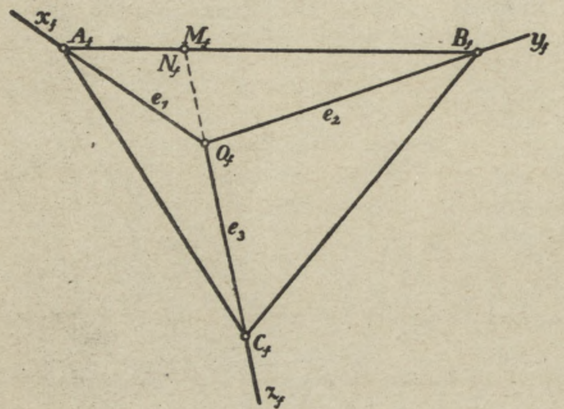
Általános affin vonatkozásban lévő síkbeli rendszerekben megfelelő pontok körüli sugársorokban a megfelelő derékszögeket egy harmadik síkbeli rendszer közbeiktatásával állapítjuk meg. Legyen **A** és **A'** affin síkbeli rendszerekben két megfelelő háromszög ABC és $A'B'C'$. (238. ábra.) Ha meg akarjuk szerkeszteni az A és A' centrumú sugársorokban a megfelelő derékszögeket, közbeiktatjuk az **A''** síkbeli rendszert. Az **A''** síkbeli rendszert úgy választjuk, hogy hasonló legyen az **A'** síkbeli rendszerrel, ugyanakkor a μ hasonlósági tényezőt úgy állapítjuk meg, hogy az **A'** rendszerhez tartozó $\overline{B'C'}$ távolságnak megfelelője, $\overline{B''C''}$ távolság az **A''** rendszerben, az **A** rendszerben lévő $\overline{BC}$ távolsággal legyen egyenlő. Ekkor **A** és **A''** síkbeli rendszerek az ABC és $A''B''C''$ megfelelő háromszögek révén szintén affin vonatkozásban lévő síkbeli rendszerek és pedig oly affin vonatkozásban lévő síkbeli rendszerek, melyekben esetleg megszerkesztett megfelelő derékszögpárnak az **A** síkbeli rendszerhez tartozó derékszögének megfelelője az **A'** síkbeli rendszerben megint derékszög, mert **A'** és **A''** közötti hasonlósági kapcsolat a síkbeli rendszerek szögeinek nagysági viszonyain nem változtat. E körülmény igen egyszerű szerkesztést nyujt az **A** és **A'** síkbeli rendszerek megfelelő derékszögeinek szerkesztésére. Az **A** és **A''** síkbeli rendszerek megfelelő derékszögpárját fogjuk először megszerkeszteni, a szerkesztést ekkor azért végezhetjük, mert az **A''** síkbeli rendszer síkját az **A** síkbeli rendszerrel igen könnyen egyesíthetjük úgy, hogy **A** és **A''** axiális affin vonatkozásban legyen. Az egyesítést úgy kell végrehajtani, hogy a BC pontsor és a vele kongruens pontsor, $B''C''$, megfelelő elemei illeszkedők legyenek, evvel máris biztosítottuk a két rendszer között az axiális affinitást. Az ábrában **A** és **A''** rendszereket axiális affin helyzetben vettük fel. Miután ekkor az A és A'' középpontú megfelelő sugársorokban meghatároztuk a megfelelő derékszögeket, az **A** rendszerben nyert derékszög szárainak megfelelőit megszerkesztve



238. ábra.

az **A'** rendszerben az **A** és **A'** rendszerek megfelelő derékszögeit állapítottuk meg.

180. §. Pohlke tételének bizonyítása. A Pohlke tételének különböző bizonyításai közül az affin síkbeli rendszerek előző tárgyalásaival a tétel Schwarz-féle bizonyítását készítettük elő. Legyen adva a rajz síkjában, a képsíkban, az O_f, A_f, B_f, C_f pontokból álló alakzat (239. ábra), ahol O_f jelenti a térbeli derékszögű koordinátarendszer kezdőpontjának ferde parallel képét, O_fA_f egyenes az x tengely ferde parallel képe és az $\overline{O_fA_f}$ távolság a koordinátarendszer kezdőpontjától az x tengelyre felmért egységnek ferde parallel képe, hasonlóan O_fB_f egyenes az y tengely képe, O_fC_f a z tengely képe, B_f, C_f pontok pedig az egységvégpontok képei. A tengelyeken lévő egységvégpontok szabályos háromszög csúcspontjai, legyen ez a háromszög, $ABC\triangle$ az egységvégpontok háromszöge. Tehát $A_fB_fC_f$ háromszög az egységvégpontok háromszögének ferde parallel képe és az ábrában látható további három egyenes a tengelykereszt képe.



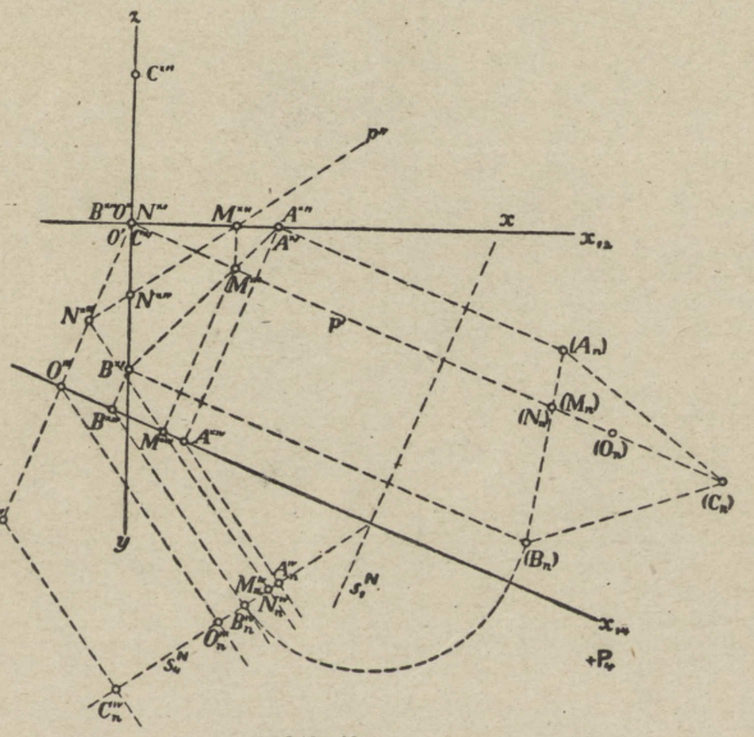
239. ábra.

Pohlke tételének konstruktív igazolását akkor nyujtottuk, ha sikerül tengelykereszt, képsík és vetítősugár oly viszonylagos helyzetét, továbbá az egység ama nagyságát megszerkeszteni, melyre nézve a tengelykereszt és egységvégpontok háromszögének képe az adott képpel kongruens.

Az adott projekció alapján mindenekelőtt megszerkesztjük a térbeli tengelykereszt és vetítősugár viszonylagos helyzetét. T. i. a z tengely képe metszi az AB egyenes képét az $M_f \equiv N_f$ pontban, ez a pont a tér két pontjának közös képe, az egyik pont, M, az AB egyenes pontja, a másik pont, N, a z tengely pontja, e pontok meghatározzák a vetítősugár helyzetét a térben, mivel e pontok axonometrikus födőpontok. Hogy tengelykereszt és vetítősugár viszonylagos helyzetét megállapíthassuk, vegyük fel orthogonális parallel projekcióban két képsíkon a tengelykeresztet úgy, hogy az alaprajz síkja azonos legyen az első képsíkkal és a felrajz síkja azonos legyen a második képsíkkal. (240. ábra.) Mivel az e egység valódi hosszát nem ismerjük, azt egyelőre tetszőlegesen vesszük fel. A felvett $e^{\times}$ egységgel megállapítjuk az egyes tengelyeken az egységvégpontokat, ezek a rajzban feltüntetett $A^{\times}$, $B^{\times}$, $C^{\times}$ pontok. Mint tudjuk, parallel projekcióban egy egyenesen felvett három pont osztóviszonya egyenlő az egyenes képén e pontok osztóviszonyával, az $M^{\times}$ pontot az $A^{\times}B^{\times}$ egyenesen és az $N^{\times}$ pontot a $OC^{\times}$ egyenesen úgy szerkesztjük meg, hogy

$$\frac{A^\times M^\times}{M^\times B^\times} = \frac{A_f M_f}{M_f B_f}, \quad \frac{O N^\times}{N^\times C^\times} = \frac{O_f N_f}{N_f C_f},$$

legyen. Az így megszerkesztett $M^\times$, $N^\times$ pontok összekötő egyenese, $p\,(p', p'')$, a vetítősugár iránya. Az $A^\times$, $B^\times$, $C^\times$ pontokon átmenő és p egyenessel parallel egyenesek háromoldalú hasáb élei. Ha sikerül a térben oly S sík helyzetének szerkesztése, mely sík a háromoldalú hasábot az $A_f B_f C_f$ háromszöggel hasonló háromszögben metszi, akkor e síkon a tengelykereszt képe a tengelykereszt adott képével kongruens lesz. A kívánt síkhelyzet megszerkesztése végett először

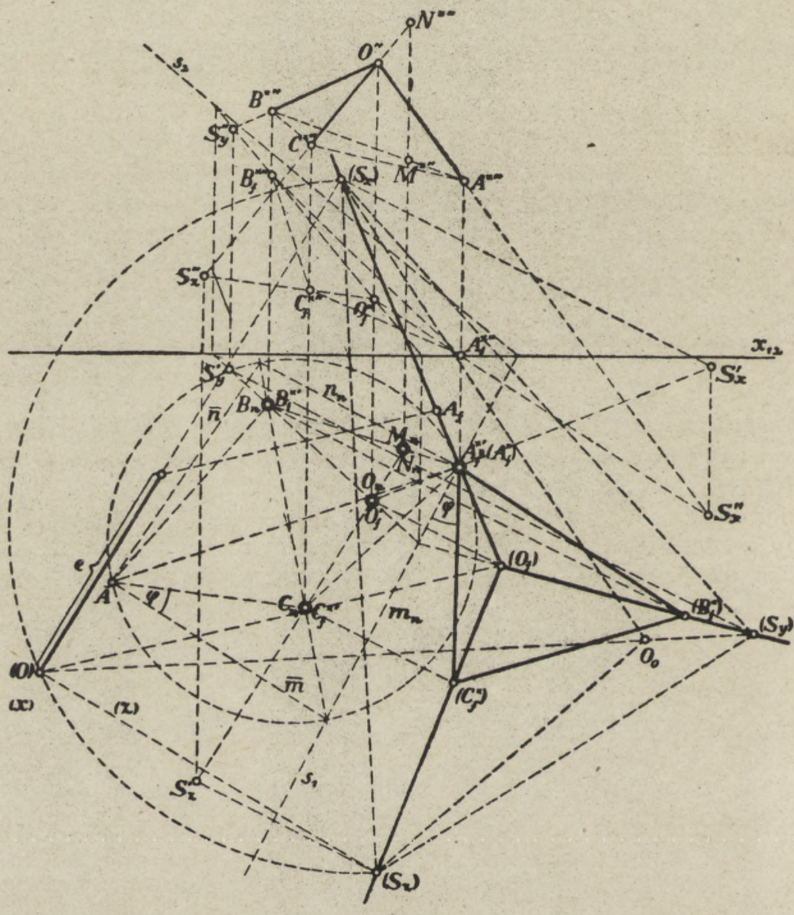


240. ábra.

megszerkesztjük a hasáb normálmetszetét valódi nagyságban, az $A_n B_n C_n$ háromszöget, és megállapítjuk rendre az $O, A^\times, B^\times, C^\times, M^\times, N^\times$ pontok távolságát a normálmetsző síktól egy oly negyedik képsíkon, mely parallel a hasáb éleivel. Ezek után a hasábot újból megrajzoljuk, de úgy, hogy a normálmetszet az első képsíkban legyen és feltüntetjük a második projekcióban a hasáb oldalélein a térbeli derékszögű koordinátarendszer eddig is kitüntetett pontjait. (241. ábra.)

Az S síkot a következő meggondolások alapján nyerjük. Az első vetítő hasáb első nyompoligonja, $A_n B_n C_n \ldots$ és a hasáb tetszőleges síkmetszetének első képsíkba forgatottja között orthogonális affin vonatkozás áll fenn, a megfelelő derékszögek pedig ez esetben mindig úgy helyezkednek el, hogy két megfelelő szár a metsző sík első nyomvonalával parallel. Mivel a síkmetszet valódi nagysága az

$A_fB_fC_f$ háromszöggel hasonló, megszerkesztjük az első képsíkban a B_nC_n fölé az $A_fB_fC_f$ háromszöggel hasonló háromszöget, $\bar{A}B_nC_n$, és megállapítjuk az A_n és $\bar{A}$ megfelelő pontok körüli sugársorokban a megfelelő derékszögeket, ezek $m_n \perp n_n$ és $\bar{m} \perp \bar{n}$. A normálmetszet síkjában fekvő derékszög szárai közül el kell dönteni, hogy melyik lesz a metsző sík nyomvonalával parallel. Hivatkozással arra, hogy a metsző síkra illeszkedő tetszőleges egyenes és a sík első fővonala által



241. ábra.

bezárt szögnek a vetülete az első képsíkon mindig kisebb, mint az eredeti szög, pusztán szemlélettel megállapíthatjuk, hogy az m_n egyenes lesz a metsző sík első fővonalával parallel egyenes, mert m_n és A_nC_n egyenesek által bezárt szög kisebb, mint az $\bar{m}$ és $\bar{A}C_n$ egyenesek által bezárt szög. E szerint a metsző sík első nyomvonala az m_n egyenessel parallel. Tudjuk, hogy a hasáb parallel síkmetszetei egybevágók, a metsző sík első nyomvonalát az m_n egyenessel azonosnak választjuk és az $\bar{m}$ és $\bar{A}C_n$ egyenesek által bezárt φ szöget az

m_n egyenes mellé felrakjuk, úgy, hogy a szög csúcspontja az A_n ponttal azonos legyen. Ekkor a szög másik szára jelenti a keresett metsző sík ama egyenesének leforgatását, melynek első képe az A_nC_n egyenes. Evvel a keresett síkmetszet első képe és leforgatottja közti affin vonatkozás meg van határozva, a síkmetszet leforgatása, $A_f^\times B_f^\times C_f^\times$... majd a sík állása, S (s_1, s_2) meghatározható. Rajzunk pontosságának ellenőrzésére szolgál az a körülmény, hogy az $(A_f^\times)(B_f^\times)(C_f^\times)$ háromszög az adott $A_fB_fC_f$ háromszöggel hasonló, hasonló pedig azért, mert a szerkesztés szerint

$$A_fB_fC_f\,\triangle \sim \bar{A}B_nC_n\,\triangle \text{ és } \bar{A}B_nC_n\,\triangle \sim (A_f^\times)(B_f^\times)(C_f^\times)\,\triangle,$$

az utóbbi két háromszög azért hasonló, mert az első háromszög rendszeréhez tartozó $\bar{A}C_n$ egyenes megfelelőjét úgy vettük fel, hogy az a másik rendszerben a megfelelő derékszögek egyik szárával ugyanazt a szöget alkossa, mint megfelelője a derékszögszár megfelelőjével. A rajzban megszerkesztettük a metsző síkban a térbeli derékszögű koordinátarendszer nyomháromszögét az által, hogy az egyes tengelyek metszéspontját állapítottuk meg a síkon és ezt az $S_xS_yS_z$ háromszöget szintén leforgattuk az első képsíkba, ugyanakkor a leforgatásban (S_y) $(B_f^\times)$ egyenes az y tengelynek a metsző síkon lévő ferde vetületének leforgatottja, hasonlóan nyerjük a többi tengely ferde képének leforgatását.

Az első képsíkot axonometrikus képsíknak választva a leforgatott nyomháromszög magassági pontja a koordinátarendszer kezdőpontjának orthogonális vetülete az első képsíkon. Ha ekkor a felrajz síkját beforgatjuk az axonometrikus képsíkba és előzőleg az x tengely ferde képén felmérjük a 239. ábrából az adott O_fA_f távolságot, akkor az x tengely leforgatottján nyerjük az egység valódi hosszát.

FÜGGELÉK.

181. §. Síkgörbék. Valamely tetszőlegesen felvett síkban egy pontnak, egy egyenesnek helyzetét úgy adtuk meg, hogy felsoroltuk azokat a feltételeket, melyeket a szerkesztendő pont, egyenes a síkban megadott fix helyzetű elemekkel szemben kielégíteni tartozik. Pl. ha a síkban A, B, C fix helyzetű pontok, akkor feladatunk lehet a sík oly pontjának szerkesztése, mely pont az adott pontok által meghatározott háromszög csúcspontjaitól egyenlő távolságban van, vagy ama pont meghatározása, mely pont a háromszög oldalaitól egyenlő távolságban van. Mint tudjuk, az első esetben a megoldások száma egy, a második esetben a megoldások száma négy. A most említett esetekben a megoldások száma véges szám, de a felsorolt feltételek lehetnek olyanok is, hogy a megoldások száma nem véges szám, ekkor a feladat megoldása a pontoknak, illetőleg egyeneseknek egy mértani helyéhez vezet. Pl. a síkban felvett derékszögű koordinátarendszer mellett szerkesztessenek meg ama pontok, melyek az

$$2 < x < 7, \; 3 < y < 5$$

feltételeket kielégítik. E pontok egy oblongum belső pontjai, tehát ez oblongum belső pontjai a sík pontjainak egy mértani helye.

E fejezetben a pontok néhány oly geometriai helyét fogjuk tárgyalni, mely pontokhoz tartozó derékszögű koordináták közti kapcsolat algebrai egyenlettel kifejezhető. Az egyenletet kielégítő pontok a pontoknak egy egyméretű sokasága, egy síkgörbe pontjai. Az egyenlet a síkgörbe egyenlete.

Kössük össze valamely adott síkgörbe két pontját, a P és Q pontokat, egy egyenessel, akkor ez az egyenes a síkgörbe egy szelője, míg a $\overline{PQ}$ távolság a síkgörbe egy húrja. Ha a Q pont helyzetét a síkgörbén úgy változtatjuk, hogy a $\overline{PQ}$ távolság mindig kisebb és kisebb legyen, akkor a PQ szelő egy határhelyzet felé közeledik, a szelő e határhelyzete a síkgörbe P pontjához tartozó érintője. A síkgörbe tetszőleges P pontjához tartozó érintőjéről azt fogjuk mondani, hogy az érintő a síkgörbét két végtelen közel fekvő pontban metszi vagy az érintő a görbe két szomszédos pontjának összekötő egyenese.

A síkgörbe P pontjához tartozó normálisán értjük a P pontra illeszkedő és a P ponthoz tartozó érintőre merőleges egyenest.

Síkgörbe összes pontjaihoz tartozó érintők a síkgörbét burkolják. A síkgörbe e szerint nemcsak mint pontalakzat, hanem az egyenesek egyméretű sokaságának burkolójaként fogható fel, a síkgörbe az egyenesek enveloppe-ja.

Síkgörbét úgy fogunk rajzolni, hogy a síkgörbének megszerkesztjük egymástól véges távolságban fekvő pontjait, megállapítjuk az egyes pontokban az érintőket, azután a megszerkesztett pontokat egy folytonos görbe vonallal úgy kötjük össze, hogy a vonal a pontokhoz tartozó érintőket érintse. Hogy a megszerkesztett egyes pontok milyen távolságban legyenek, az a rajz méretarányától és a rajzoló gyakorlottságától függ.

182. §. Ismeretes tételek és mértani helyek: 1. A síkban adott ponttól adott távolságban fekvő pontok körvonal pontjai, a kör középpontja az adott pont, sugara az adott távolság.

2. Ama körök középpontjainak mértani helye, melyek a sík adott M és N pontján átmennek, egy egyenes, az egyenes az adott pontok távolságát merőlegesen felezi.

3. Ama körök középpontjainak mértani helye, melyek egy adott egyenest az egyenes adott pontjában érintenek, az adott ponton átmenő és az adott egyenesre merőleges egyenes.

4. Ama körök középpontjainak mértani helye, melyek egy adott kört a kör adott pontjában érintenek, az adott ponton átmenő körsugár.

5. Két ponton átmenő körök körsort alkotnak, e pontok a körsor alappontjai. Ama pontok mértani helye, mely pontok hatványa a körsor összes köreire egyenlők, az alappontok összekötő egyenese, ez az egyenes a körsor hatványvonala.

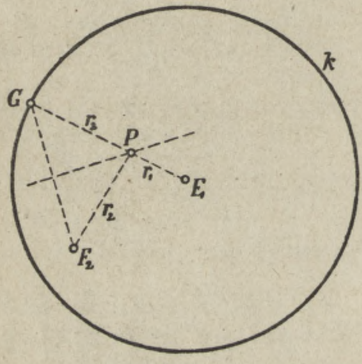
6. A körsor hatványvonalának egy pontjából a körsor köreihez rajzolt érintők érintési pontjai egy körvonal pontjai, melynek középpontja a hatványvonalon felvett pont.

7. A síkban tetszőlegesen felvett három kör esetében csak egy oly pont van, melynek hatványa a három körre nézve egyenlő, e hatványközéppont a párosával vett körök hatványvonalainak közös pontja. A hatványközéppontból az adott körökhöz rajzolt érintők érintési pontjai oly körön fekvő pontok, melynek középpontja a hatványközéppont.

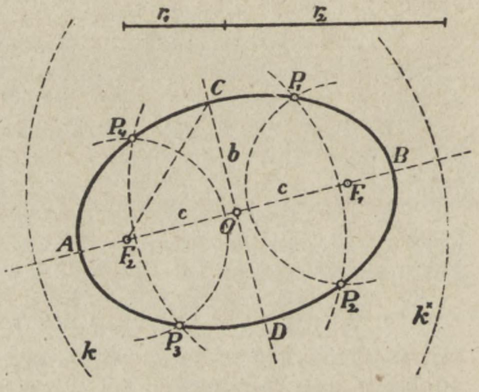
8. Adott körsor és a körsorhoz nem tartozó egy tetszőleges adott kör esetében a síknak van egy oly pontja, melynek hatványa az összes felvett körökre egyenlő, e pont a körsor alappontjait összekötő egyenesén az a pont, melyet rajta a körsor tetszőleges körének és a körsorhoz nem tartozó körnek hatványvonala megállapít. E pontból a körsorhoz nem tartozó körhöz vont érintők érintési pontjai ama pontok, mely pontokban a körsor egy-egy köre a körsorhoz nem tartozó kört érinti.

Az ellipszis.

183. §. Az ellipszis alaptulajdonságai. Foglalkozni fogunk ama körök középpontjainak mértani helyével, melyek egy adott kört érintenek és a kör belsejében fekvő adott ponton átmennek. Legyen az adott k kör középpontja F_1 és sugara $2a$, e kör belsejében fekvő pont pedig F_2. (242. ábra.) Mindenekelőtt megszerkesztjük annak a körnek középpontját, mely a k kört annak tetszőlegesen felvett G pontjában érinti és az adott F_2 ponton átmegy, vagyis megszerkesztjük a keresett mértani helynek egy tetszőleges pontját. Azon körök középpontjai, melyek k kört G pontban érintenek, a GF_1 egyenesen vannak, azon körök középpontjai, melyek a G és F_2 pontokon átmennek, a $\overline{GF_2}$ távolság felező merőlegesén vannak. Mindkét feltételt kielégítő kör középpontja tehát a GF_2 felező merőlegesének és GF_1 egyenes közös pontja, P. A P pont a mértani hely tetszőleges pontja. Kössük össze a P pontot az F_2 ponttal, akkor PF_2G háromszög egyenlőszárú háromszög s így $\overline{PF_2} = \overline{PG}$, továbbá $\overline{PF_2} + \overline{PF_1} = 2a$. Ha $\overline{PF_2} = r_2$ és $\overline{PF_1} = r_1$, akkor az utolsó relációt így írhatjuk, hogy $r_1 + r_2 = 2a$. Mivel a körök középpontjainak szerkesztésénél az F_1, F_2 pontok állandó pontok és P pont változó, mondhatjuk, hogy a



242. ábra.



243. ábra.

körök középpontjainak mértani helye egyúttal azon pontok mértani helye, mely pontok két ponttól való távolságainak összege állandó, a mértani helyként nyert görbe vonal az ellipszis.

Az $r_1 + r_2 = 2a$ reláció alapján az ellipszis pontjait úgy szerkesztjük (243. ábra), hogy felveszünk egy a $2a$ távolságnál kisebb, de különben tetszőleges r_1 távolságot, az F_1 pont körül r_1 sugárral kört rajzolunk, e kör ama pontja, melynek távolsága az F_2 ponttól $2a - r_1 = r_2$, az ellipszis pontja. Az F_2 ponttól r_2 távolságban fekvő összes pontok az F_2 középpontú és r_2 sugarú körön vannak. A rajzolt körök közös pontjai az ellipszis pontjai. Az F_1, F_2 pontok az ellipszis gyujtópontjai, az ellipszis tetszőleges pontjának távolságai a gyujtópontoktól a tetszőleges ponthoz tartozó vezérsugarak, radiuszvektorok.

Ha az előbbi r_1 távolsággal az F_2 pont körül, majd az r_2 távolsággal az F_1 pont körül kört rajzolunk, akkor e körök metszéspontjai szintén az ellipszis pontjai. Tehát két körzőnyílással az ellipszisnek négy pontját szerkeszthetjük meg, az ellipszis egy pontnégyesét nyerjük, a P_1, P_2, P_3, P_4 pontokat. A pontnégyes pontjai mindig oly oblongum csúcspontjai, melynek egyik szimmetria tengelye a gyujtópontok összekötő egyenese, másik szimmetria tengelye a gyujtópontok távolságát merőlegesen felezi, e szimmetria tengelyek e szerint a szerkesztett pontnégyestől független egyenesek, ez azt mondja, hogy minden ellipszisnek két szimmetria tengelye van, ezeket az egyeneseket az ellipszis tengelyeinek mondjuk. Tetszőleges pontnégyessel nyert oblongum átlói a szimmetria tengelyek közös pontjára illeszkedő egyenesek. A tengelyek közös pontja az ellipszis középpontja, az ellipszis centrális szimmetriával bíró síkgörbe; a szimmetria centruma, O, a gyujtópontok távolságát felezi. A gyujtópontnak az ellipszis középpontjától való távolsága az ellipszis lineáris excentricitása, állandó jele: c.

Az ellipszis szimmetria viszonyaiból egyúttal az is következik, hogy az ellipszis nemcsak azon körök középpontjainak mértani helye, melyek a k kört érintik és az F_2 ponton átmennek, hanem ugyanakkor mértani helye azon körök középpontjainak, melyek az F_1 ponton átmennek és az F_2 pont körül $2a$ sugárral rajzolt k^x kört érintik.

Az $r_1 + r_2 = 2a$ reláció alapján megszerkeszthetjük az ellipszis tengelyeire illeszkedő pontokat. Legyen a gyujtópontokra illeszkedő tengely és ellipszis egy közös pontja A, akkor $\overline{AF_2}+\overline{AF_1}=2\overline{AF_2}+\overline{F_2F_1}$, ha itt $\overline{AF_2}=m$ és $\overline{F_1F_2}=2c$, a legutolsó egyenlet így is írható: $2m+2c=2a$, vagyis $m+c=a$. E szerint az ellipszisnek a gyujtópontokon átmenő tengelyén lévő pontjai, A és B az ellipszis középpontjától a távolságban vannak, vagyis $\overline{AB}=2a$. Az ellipszis másik tengelyén fekvő pontok a gyujtópontoktól egyenlő távolságban vannak, hiszen e tengely minden pontja a gyujtópontoktól egyenlő távolságban van, s így az ellipszisnek e tengelyre illeszkedő pontjai, C és D a gyujtópontoktól a távolságban fekvő pontok. Legyen $\overline{CD}=2b$, akkor F_2OC háromszög oly derékszögű háromszög, melynek átfogója a, egyik befogója b, másik befogója c. Derékszögű háromszögben az átfogó mindig a legnagyobb oldal, ebből $2a>2b$, vagyis $\overline{AB}>\overline{CD}$. A nyert egyenlőtlenség alapján azt mondjuk, hogy az ellipszisben a gyujtópontokon átmenő egyenes a nagytengely, a nagytengely és ellipszis közös pontjai által határolt véges távolság az ellipszis nagytengelyének hossza. A C és D pontokra illeszkedő tengely az ellipszis kistengelye, ugyanazon pontok által határolt véges távolság a kistengely hossza.

Szimmetria tengellyel rendelkező síkgörbe ama pontjai, melyek a szimmetria tengelyére illeszkednek, a síkgörbe csúcspontjai, e szerint az ellipszisnek előbb megszerkesztett A, B, C, D pontjai az ellipszis csúcspontjai.

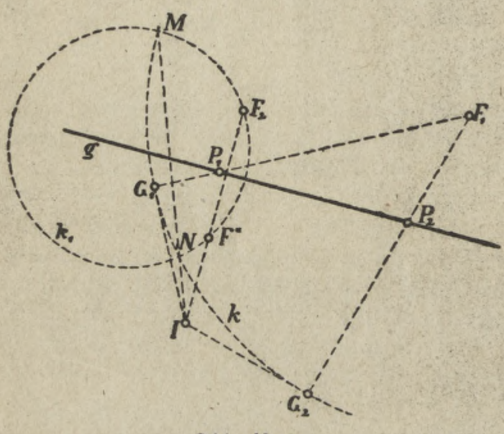
Az ellipszis pontjait vonatkoztathatjuk derékszögű koordinátarendszerre, ha a rendszer tengelyei az ellipszis tengelyeivel azonos egyenesek és az ellipszis nagytengelye az abszcisszák tengelye, akkor az ellipszis egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

184. §. Egyenes és ellipszis metszéspontjai. Legyen adva a k kör, sugara $2a$, középpontja F_1, továbbá a k kör belsejében az F_2 pont. Legközelebbi feladatunk ez adatokkal meghatározott ellipszis és a sík tetszőlegesen adott g egyenes közös pontjainak meghatározása. (244. ábra.) Ekkor tulajdonképpeni feladatunk abban áll, hogy szerkesztessék meg a g egyenesen oly körnek középpontja, mely kör a k kört érinti és az F_2 ponton keresztül megy. Ama

15*

körök, melyeknek középpontjai a g egyenesre illeszkedő pontok és F_2 ponton átmennek, a sík még egy meghatározott pontján mennek át, e pont, $F^\times$, az F_2 pont tükörképe a g egyenesre vonatkozólag. Tehát a keresett körök ama körsornak körei, melynek alappontjai az F_2 és $F^\times$ pontok; e körsornak ama köreit kell megszerkeszteni, melyek a k kört érintik. E végből megrajzoljuk a körsor egy tetszőleges k_1 körét úgy, hogy az a k kört két pontban messe, ha e metszéspontok M és N, akkor az MN és $F_2F^\times$ egyenesek közös I pontjából a k körhöz vont érintők érintési pontjai, G_1 és G_2, a k kör ama pontjai, mely pontokban a körsorhoz tartozó körök a k kört érintik. Mindkét kör középpontja rajt van a g egyenesen, továbbá a G_1F_1, illetőleg a G_2F_1 egyenesen, utóbbi egyenesek metszéspontjai a g egyenessel, P_1 és P_2, a g egyenes metszéspontjai az ellipszissel.



244. ábra.

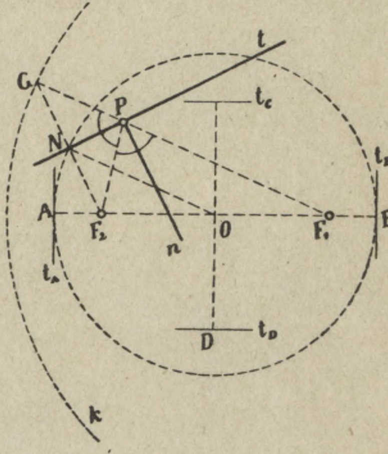
Mivel az I pontból a k körhöz két érintő szerkeszthető, a sík tetszőleges egyenese az ellipszist két pontban metszi. Egyenes és algebrai síkgörbe közös pontjainak száma a síkgörbe rendszáma, az ellipszis tehát másodrendű görbe vonal, amit különben egyenletének fokszáma is mutat.

Egyenes és ellipszis közös pontjai különböző valós pontok, ha I a k kör külső pontja; ha az I pontból a k körhöz vont érintők összeesők, vagyis az I pont a k körvonalra illeszkedő pont, akkor e szerkesztésnél szereplő g egyenes az ellipszist két összeeső pontban metszi, ekkor a g egyenes az ellipszis érintője; ha az I pont a k kör belső pontja, akkor a szerkesztésnél szereplő g egyenes az ellipszist nem metszi, ilyenkor azt mondjuk, hogy az egyenes az ellipszist képzetes pontokban metszi.

Mikor lesz az I pont a k körön? Az I pont akkor lesz a k körvonalra illeszkedő pont, ha az F_2 pontnak a g egyenesre vonatkozó tükörképe, $F^\times$, a k körvonalnak pontja, mivel ekkor $F^\times \equiv I$, ugyanekkor $I \equiv G_1 \equiv G_2$.

185. §. Érintő feladatok. a) *Az ellipszis egy pontjában az érintő szerkesztése.* Legyen adva F_1, F_2, $2a$. (245. ábra.) Megrajzolva a k kört, megszerkesztjük ama kör középpontját, mely kör a k kört annak tetszőlegesen választott G pontjában érinti és az F_2 ponton keresztül megy. Legyen e kör középpontja P, a P pont szerkesztésénél az $\overline{F_2G}$ távolság felező merőlegesét használtuk fel. Mivel e felező merőlegesre az F_2 tükörképe a k körre illeszkedő G pont, a felező merőleges az ellipszis érintője, az érintő érintési pontja a P pont. Tehát, mikor az ellipszis pontjait, mint körök középpontjainak mértani helyét keressük, akkor egy-egy pont szerkesztésénél a ponthoz tartozó érintőt is szerkesztettük meg.

Az ellipszis érintőjének szerkesztése arról tanuskodik, hogy az F_2 pont tükörképe, ellenpontja, tetszőlegesen szerkesztett érintőre vonatkozólag a k körre illeszkedő pont. E szerint a k kör a gyujtópontnak az érintőkre vonatkozó ellenpontjainak mértani helye, ezért a k kört ellenkörnek mondjuk. Ellipszisnek két ellenköre van, egy-egy ellenkörnek középpontja az ellipszis egy-egy gyujtópontja és sugara az ellipszis nagytengelye.



245. ábra.

Legyen a 245. ábrában a megszerkesztett t érintő és F_2G egyenes metszéspontja N, e metszéspont a gyujtópontból az érintőre bocsátott merőleges talppontja, e talppontok mértani helye az ellipszisnek a gyujtópontra vonatkozó talpponti görbéje. Könnyen igazolható, hogy e talpponti görbe kör. Ha összekötjük az N pontot az ellipszis középpontjával, akkor az F_2GF_1 és F_2NO hasonló háromszögeket nyerjük, hasonlók azért, mert az F_2 melletti szög közös és e szöget bezáró oldalak aránya egyenlő. Mivel két megfelelő oldal közül az egyik kétszerese a másiknak, a $\overline{GF_1} = 2a$ oldal az $\overline{NO}$ oldalnak kétszerese, vagyis $\overline{NO} = a$. Az ellipszis középpontja körül a sugárral rajzolt kör, az ellipszis főköre, ez az ellipszisnél a gyujtópont talpponti görbéje. Az ellipszis nagytengelyének végpontjai, A és B a főkör diametrál fekvő pontjai.

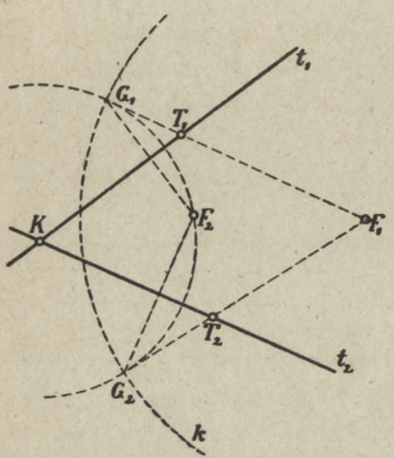
Az ellipszis P pontjához tartozó érintő szerkesztéséből, mivel t a PF_2G háromszög szimmetriálisa, még az is következik, hogy az ellipszis tetszőleges pontjához tartozó normálisa e pont felé menő vezérsugarak szögét felezi, míg az érintő a radiuszvektorok mellékszögét felezi.

Az ellipszis érintőjének megismert szerkesztését alkalmazhatjuk az ellipszis csúcspontjaira is. Ekkor azt nyerjük, hogy a csúcspontokhoz tartozó normálisok a tengelyekkel azonos egyenesek, az érintők a tengelyekre merőleges egyenesek.

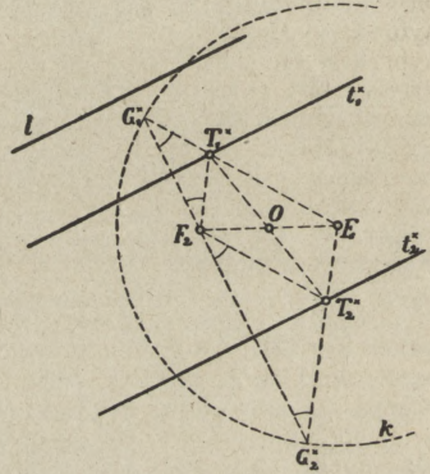
b) *A sík tetszőleges pontjára illeszkedő érintők.* A 245. ábrában szerkesztett t érintőnek minden pontja az F_2 gyujtóponttól és e gyujtópontnak az érintőre vonatkozó ellenpontjától, a G ponttól egyenlő távolságban van. E szerint, ha a sík K pontjára illeszkedő ellipszis érintőket meg akarjuk szerkeszteni, akkor a keresett érintőkhöz tartozó ellenpontok a K ponttól ugyanakkora távolságban vannak, mint amilyen távolságban van a K pont az F_2 ponttól. (246. ábra.) Vagyis a K pontra illeszkedő érintőket úgy szerkesztjük meg, hogy $\overline{KF_2}$ távolsággal K körül kört rajzolunk, e kör metszi az ellenkört a G_1 és G_2 pontokban, a $\overline{G_1F_2}$ távolság felező merőlegese, t_1, az egyik érintő, a $\overline{G_2F_2}$ távolság felező merőlegese, t_2, a másik érintő, továbbá G_1F_1 egyenes, illetőleg G_2F_1 egyenes kimetszi egy-egy érintőn az érintő érintési pontját, e pontok T_1 ill. T_2.

Az adott K pont körül rajzolt kör az ellenkört általában két pontban metszi, s így az ellipszis síkjában fekvő tetszőleges pontra általában az ellipszis két érintője illeszkedik. Síkgörbe esetében a sík tetszőleges pontjára illeszkedő érintők száma az algebrai síkgörbe osztályszáma. Eredményeink szerint az ellipszis másodosztályú görbe.

c) *Ellipszisnek adott egyenessel parallel érintői.* Adott ellipszisnél tetszőleges l egyenessel parallel érintőkhöz tartozó ellenpontok az eddigiek szerint közvetlenül nyerhetők. (247. ábra.) Az ellenpontokat az ellenkörön ott nyerjük, ahol az F_2 pontra illeszkedő adott



246. ábra.

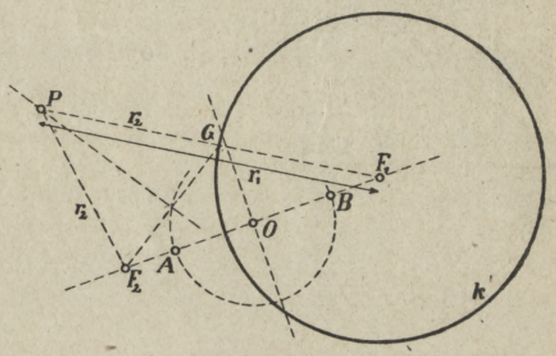


247. ábra.

egyenesre merőleges egyenes az ellenkört metszi, ha e pontok $G_1^\times$ és $G_2^\times$, akkor $\overline{F_2G_1^\times}$ távolság felező merőlegese az egyik érintő, $t_1^\times$, és az $\overline{F_2G_2^\times}$ távolság felező merőlegese a másik érintő, $t_2^\times$, az érintők $T_1^\times$, illetőleg $T_2^\times$ érintési pontjait az ismeretes módon szerkesztjük meg. Megrajzolva a $T_1^\times F_2$ és $T_2^\times F_2$ egyeneseket, a következő egyenlőszárú háromszögeket nyerjük: $\triangle T_1^\times G_1^\times F_2$, $\triangle T_2^\times G^\times F_2$, $\triangle F_1G_1^\times G_2^\times$, ez egyenlőszárú háromszögekben a különböző alapok melletti szögek mind egyenlők, de akkor $T_1^\times F_2$ és $T_2^\times F_1$, továbbá $T_1^\times F_1$ és $T_2^\times F_2$ parallel egyenesek, vagyis $T_1^\times$, F_1, $T_2^\times$, F_2 pontok parallelogramma csúcspontjai. Parallelogramma átlói mindig felezik egymást, tehát $\overline{F_1F_2}$ átló felezési pontja, az ellipszis középpontja, mindig illeszkedik parallel érintők érintési pontjainak összekötő egyenesére. Ha az ellipszis középpontjára illeszkedő húrt átmérőnek mondjuk, akkor most bebizonyítottuk, hogy az ellipszis tetszőleges átmérőjének végpontjaihoz tartozó érintők parallel egyenesek.

A hyperbola.

186. §. A hyperbola alaptulajdonságai. Keressük meg ama körök mértani helyét, melyek egy adott k kört érintenek és a körön kívül fekvő F_2 adott ponton átmennek. Legyen a k kör középpontja F_1, sugara $2a$. (248. ábra.) A mértani hely tetszőleges pontját ugyanúgy szerkesztjük meg, mint az ellipszisnél. Ha a megszerkesztett pont P, akkor a ponthoz tartozó radiuszvektorok különbsége állandó, t. i. $r_1 - r_2 = 2a$. E szerint a jelen esetben a körök középpontjainak geometriai helye egyúttal azon pontok mértani helye, mely pontoknak két ponttól való távolságainak különbsége állandó, a mértani hely hyperbola.



248. ábra.

Az $r_1 - r_2 = 2a$ reláció alapján két körzőnyílással mindenkor a hyperbola négy pontját nyerjük, a négy pont által meghatározott oblongum kéttengelyű szimmetriája alapján mondhatjuk, hogy a hyperbolának is van két tengelye, a két tengely metszéspontja a hyperbola középpontja, O. A hyperbolánál a gyujtópontokra illeszkedő tengelyt a hyperbola valós tengelyének, a másik tengelyt a hyperbola képzetes tengelyének mondjuk, mert a valós tengelyen fekvő csúcspontok, A és B, a hyperbola középpontjától a távolságban fekvő pontok valós pontok, a képzetes tengelyen a hyperbolának valós pontjai nincsenek.

Egy-egy gyujtópontnak a hyperbola középpontjától való távolsága a hyperbola lineáris excentricitása, állandó jele c. Míg az ellipszisnél a fél nagytengely a lin. excentricitásnál nagyobb volt, addig a hyperbolánál a fél nagytengely kisebb a lin. excentricitásnál. Az ellipszisnél láttuk, hogy $b^2 = a^2 - c^2$ volt, a hyperbolánál a b távolságot úgy vezetjük be, hogy a $b^2 = c^2 - a^2$ egyenlőségnek tegyen eleget. Utóbbi egyenlőség felhasználásával a hyperbola egyenlete, ha pontjait oly derékszögű koordinátarendszerre vonatkoztatjuk, melynek tengelyei a hyperbola tengelyeivel azonos egyenesek és valós tengelye az abszcisszák tengelye, a következő:

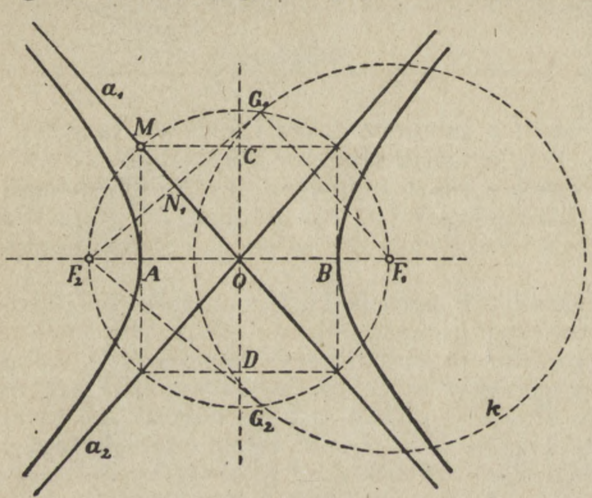
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Egyenes és hyperbola metszéspontjait ugyanúgy szerkesztjük meg, mint az ellipszisnél. Minden egyenes a hyperbolát két pontban metszi, e pontok valósak és egymástól különbözők, ha az F_2 pontnak ellenpontja az adott egyenesre nézve, $F^{\times}$, a k ellenkörre nézve külső pont; ha $F^{\times}$ a k körre eső pont, akkor a két metszéspont összeesik, az egyenes a hyperbola érintője; ha pedig az $F^{\times}$ pont az ellenkör belső pontja, akkor az egyenes a hyperbolát nem metszi valós pontokban.

A hyperbola egy érintőjét megszerkesztettük, ha az $\overline{F_2G}$ távolság felező merőlegesét megrajzoljuk, ahol G a k ellenkör tetszőleges pontja, ugyanakkor a GF_1 egyenes kimetszi az érintőn az érintő érintési pontját, a T pontot. A szerkesztés alapján kimondhatjuk azt is, hogy a hyperbola tetszőleges érintője felezi az érintési ponthoz menő radiuszvektorok szögét, míg a normális e szög mellékszögét felezi.

A hyperbolánál is megkülönböztethetünk főkört, e kör a hyperbola talpponti görbéje a gyujtópontra vonatkozólag, a főkör középpontja a hyperbola középpontja, sugara, a, a hyperbola valós tengelyének fele. A hyperbola főköréhez ugyanúgy jutunk, mint az ellipszis esetében.

A hyperbolánál a sík tetszőleges K pontjára illeszkedő, illetőleg tetszőleges g egyenessel parallel érintőket ugyanúgy szerkesztjük meg, mint az ellipszisnél. Szerkesszük meg a hyperbola ama érintőit, melyek a hyperbola középpontjára illeszkednek. (249. ábra.) Ekkor az O pont körül $\overline{OF_2}$ távolsággal egyenlő sugarú kört rajzolunk, e kör a k ellenkört a G_1, G_2 pontokban metszi, az $\overline{F_2G_1}$ távolság felező merőlegese, a_1, lesz az egyik érintő, az $\overline{F_2G_2}$ távolság felező merőlegese, a_2, lesz a másik érintő. Ha az a_1 érintő érintési pontját kívánjuk megállapítani, akkor az a_1 egyenes és az F_1G_1 egyenes metszéspontját kell megszerkeszteni, e metszéspont az a_1 egyenes végtelenben fekvő pontja, mert az a_1 egyenes parallel az F_1G_1 egyenessel, t. i. az a_1 egyenest úgy szerkesztettük, hogy az merőleges legyen az F_2G_1 egyenesre, és F_1G_1 ugyanerre az egyenesre merőleges, mivel az $F_2G_1F_1 \sphericalangle$ félkörben fekvő kerületi szög. E szerint a hyperbolának két olyan érintője van, mely érintők érintési pontjai végtelenben fekvő pontok. Tetszőleges síkgörbe oly végesben fekvő érintője, melynek érintési pontja a végtelenben van, a síkgörbe asymptotája. A hyperbolának két asymptotája van, és pedig csak kettő, mivel a k ellenkörnek csak két oly G pontja van, mely pontokra nézve az $F_2GF_1 \sphericalangle$ derékszög.



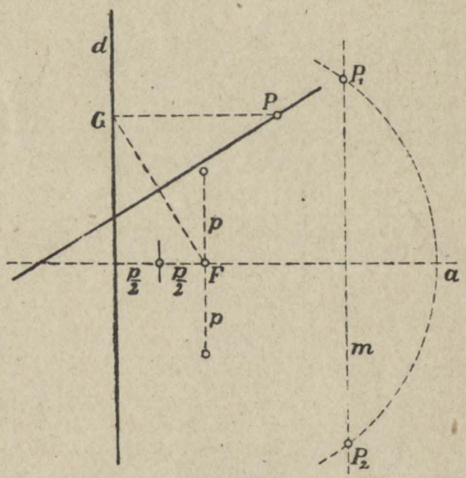
249. ábra.

Síkgörbe asymptotái a síkgörbe megrajzolását rendkívül megkönnyítik, ezért a hyperbolánál a megszerkesztett pontok görbe vonallal való összekötése előtt mindig megszerkesztjük az asymptotákat. Az asymptoták egy szerkesztési módját a hyperbolánál az asymptoták előbbi szerkesztéséből nyerhetjük. Legyen a 249. ábrában az a_1 asymptota és F_2G_1 egyenes metszéspontja N_1, akkor F_2N_1O háromszög derékszögű háromszög, átfogója, $F_2O = c$, egyik befogója, $N_1O = a$ a szerkesztés szerint, ebből következik, hogy másik befogója, $F_2N_1 = b$. A hyperbola A csucspontján átmenő és a hyperbola valós tengelyére merőleges egyenes messe az a_1 asymptotát az M pontban, akkor MAO derékszögű háromszög az előbbi háromszöggel egybevágó háromszög, mert a két háromszög egyik szöge közös és egy-egy befogó a valós tengely fele. Így a hyperbola asymptotáinak szerkesztésére a következő eljárást nyerjük: A hyperbola középpontja körül a lineáris excentricitással egyenlő sugarú kört rajzolunk, e kör és csúcsérintő közös pontjai a hyperbola asymptotáinak pontjai, egy-egy ilyen pont a hyperbola középpontjával meghatározza az asymptotát.

A parabola.

187. §. A parabola alaptulajdonságai. Eddig ama körök középpontjainak mértani helyét kerestük, melyek az adott k kört érintették és a kör síkjának meghatározott pontján átmentek. A k kör helyett vegyük a d egyenest, vagyis határozzuk meg ama körök középpontjainak mértani helyét, melyek a d egyenest érintik és a tetszőlegesen felvett F ponton átmennek.

Ama kör középpontja, mely kör a d egyenest annak tetszőlegesen felvett G pontjában érinti, a G pontban a d egyenesre állított merőlegesen van. (250. ábra.) Az F és G pontokon átmenő körök középpontjai az $\overline{FG}$ távolság felező merőlegesén vannak. A nyert egyenesek közös pontja, P, a mértani hely tetszőleges pontja. A szerkesztés alapján közvetlenül megállapíthatjuk, hogy a mértani hely minden pontja a d egyenestől és az F ponttól egyenlő távolságban van, a mértani hely parabola. A parabola gyujtópontja F, míg d a parabola vezéregyenese.



250. ábra.

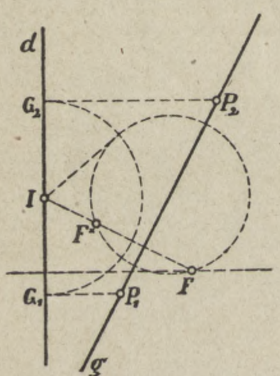
Mivel a parabola ama pontok mértani helye, mely pontok egy egyenestől és egy ponttól egyenlő távolságban vannak, a parabola egyes pontjait úgy is szerkeszthetjük meg, hogy felveszünk a vezéregyenessel tetszőleges parallel m egyenest, körzőbe vesszük az m és d egyenesek távolságát és e távolsággal egyenlő sugarú kört rajzolunk az F pont körül, mint középpont körül, e kör metszi az m egyenest két pontban, e pontok a parabola pontjai, P_1, P_2. Ilyen módon mindig a parabola két pontját szerkesztjük meg, mely pontok az F gyujtóponton átmenő és a vezéregyenesre merőleges egyenesre nézve orthogonális szimmetriában fekvő pontok, e szerint a parabola pontjai úgy párosíthatók, hogy e párok pontjai egy egyenesre nézve szimmetrikusan fekvő pontok.

A gyujtóponton átmenő és a vezéregyenesre merőleges eme egyenes a parabola tengelye, a.

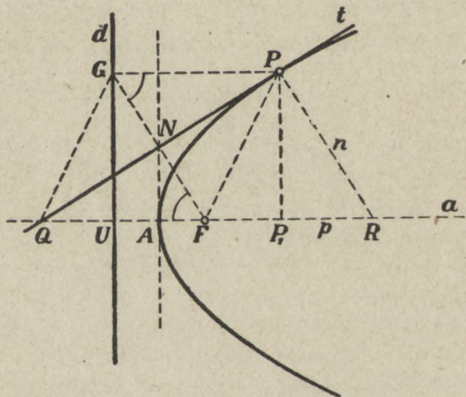
Ha az előbbi eljárással megszerkesztjük a parabola ama pontjait, melyek a gyujtóponton átmenő és vezéregyenessel parallel egyenesen vannak, akkor ez egyenesen fekvő parabolapontok a gyujtóponttól ugyanolyan távolságban vannak, mint amilyen távolságban van a gyujtópont a vezéregyenestől. Amennyiben a gyujtópont és vezéregyenes távolságát p-vel jelöljük, mondhatjuk, hogy a parabolának gyujtópontjára illeszkedő és a vezéregyenessel parallel húrjának nagysága $2p$. A p távolságot a parabola paraméterének mondjuk.

A gyujtópont és vezéregyenes távolságát felező pont, A, a parabola pontja, mert e pont a gyujtóponttól és vezéregyenestől egyenlő távolságban van. Az A pont a parabola tengelyére illeszkedő pont, vagyis az A pont a parabola csúcspontja. A parabola csúcspontja a vezéregyenestől és a fókusztól $\frac{p}{2}$ távolságban van.

Parabola és egyenes metszéspontjait úgy szerkesztjük meg, hogy megállapítjuk a gyujtópontnak tükörképét, az $F^{\times}$ pontot, az adott g egyenesre nézve, és akkor további feladatunk abból áll, hogy $F, F^{\times}$ alappontokkal bíró körsor ama köreit szerkesszük meg, melyek a parabola vezéregyenesét érintik. (251. ábra.) Messe a körsor alappontjainak összekötő egyenese a parabola vezéregyenesét az I pontban, az



251. ábra.



252. ábra.

I pontból a körsor bármely köréhez vont érintő érintési darabja egyenlő, tehát egyenlő az I pontból ama körhöz vont érintő érintési darabjával is, mely kör a vezéregyenest érinti. E szerint megszerkesztjük a körsor tetszőleges köréhez az I pontból az érintőt, ez érintő érintési pontjának távolságát az I ponttól felmérjük ugyancsak az I ponttól a vezéregyenesre, az így nyert G_1, G_2 pontok lesznek ama pontok, melyekben a keresett körök a vezéregyenest érintik, e pontokon átmenő és a vezéregyenesre merőleges egyenesek kimetszik a g egyenesen ez egyenes és parabola metszéspontjait, a P_1, P_2 pontokat.

Ha a g egyenesre vonatkozólag a gyujtópont tükörképe a parabola vezéregyenesére illeszkedő pont, akkor az egyenes a parabolát két összeeső pontban metszi, az egyenes a parabola érintője. (252. ábra.) Ebből következik, hogy a parabolánál a gyujtópont ellenpontjainak mértani helye az összes parabolaérintőkre nézve a vezéregyenes. Ha G a vezéregyenes tetszőleges pontja, akkor $\overline{GF}$ távolság felező merőlegese a parabola érintője, az érintő érintési pontja a G pontra illeszkedő és a vezéregyenesre merőleges egyenesnek metszéspontja az érintővel, P.

Messe a parabola tengelye a vezéregyenest az U pontban, akkor az $\overline{FU}$ távolság felező merőlegese a parabola érintője a parabola csúcspontjában. A csúcsérintő felezi az $\overline{FG}$ távolságot az N pontban, e pont a parabola tetszőleges érintőjén a gyujtópontból az érintőre bocsátott merőlegesnek talppontja. E szerint a parabolánál a gyujtópont talpponti görbéje a csúcsérintő.

A parabola pontjait vonatkoztatva oly derékszögű koordinátarendszerre, melynek x tengelye azonos a parabola tengelyével, y tengelye a csúcsérintő, a parabola egyenlete

$$y^2 = 2px.$$

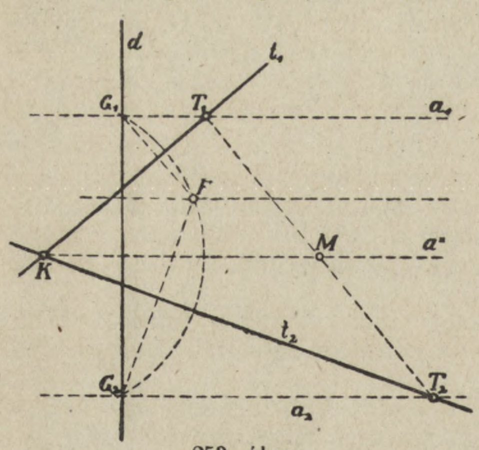
A parabola P pontjához tartozó érintője messe a parabola tengelyét a Q pontban, e pont az $\overline{FG}$ távolság felező merőlegesére illeszkedő pont, de akkor nemcsak FGP háromszög, hanem FGQ háromszög is egyenlőszárú háromszög. E két egyenlőszárú háromszög egybevágó, mert a két háromszögnek közös az alapja és $PGF\sphericalangle = QFG\sphericalangle$, evvel bebizonyítottuk, hogy a $PGQF$ négyszög rhombus. A rhombus oldalainak egyenlőségéből következik, hogy a parabola tetszőleges érintője a parabola tengelyét oly pontban metszi, melynek a gyujtóponttól való távolsága egyenlő a gyujtópontnak az érintő érintési pontjától való távolságával. A rhombus átlóinak tulajdonságai alapján pedig mondhatjuk, hogy az N pont nemcsak az $\overline{FG}$ távolságnak, hanem $\overline{PQ}$ távolságnak is felezési pontja. A $\overline{PQ}$ távolságot röviden a parabola tangensének nevezzük, tehát a parabola csúcsérintője felezi az érintő tangensdarabját. Legyen továbbá a P pont orthogonális vetülete a parabola tengelyén P_1, és a parabola P pontjához tartozó normális metszéspontja a parabola tengelyével, R, akkor $\overline{QP_1}$ távolság a parabola P pontjához tartozó subtangens és a $\overline{P_1R}$ távolság a subnormális. Az előzők alapján közvetlenül kimondhatjuk, hogy a parabola csúcspontja a parabola minden subtangensének felezési pontja, továbbá pedig a GUF és PP_1R háromszögek egybevágóságából azt nyerjük, hogy a parabola subnormálisa mindig a parabola parameterével egyenlő.

A parabola érintőjével kapcsolatos most levezetett tulajdonságok mindegyike egy-egy utasítás a parabola tetszőleges pontjához tartozó érintő szerkesztésére.

A parabola vezéregyenese (és a végtelenben fekvő egyenes) a parabola síkját két félsíkra bontja, az egyik félsík tartalmazza a parabola gyujtópontját, a másik nem. Ha egy g egyenesnek a parabolával való metszéspontjait szerkesztjük, akkor először megszerkesztjük a gyujtópontnak tükörképét az adott egyenesre nézve. Amennyiben e pont, $F^\times$, ama félsíkra illeszkedik, mely félsíkra a gyujtópont is illeszkedik, akkor g egyenes a parabolát két különböző valós pontban metszi, ha $F^{\times}$ az ellentétes félsíkra esik, akkor a g egyenes a parabolát két képzetes pontban metszi.

A parabola síkjában fekvő egyenesek közül külön kiemeljük a parabola tengelyével parallel egyeneseket. Legyen egy ilyen egyenes az $a^{\times}$ egyenes. Ha az $a^{\times}$ egyenesnek a parabolával való metszéspontját kívánjuk megállapítani, akkor az általános utasítást követve azt nyerjük, hogy a jelen esetben az I pont a vezéregyenes végtelenben fekvő pontja. Mivel az I pont a jelen esetben a vezéregyenes végtelenben fekvő pontja, ebből következik, hogy az $a^{\times}$ egyenes és parabola közös pontjaiból az egyik végesben fekvő pont, míg a másik pont végtelenben fekvő pont, és az utóbbi ponthoz tartozó érintő a parabola síkjának végtelenben fekvő egyenese. Vagyis a parabolának van egy és csakis egy végtelenben fekvő pontja, ez a parabola tengelyének végtelenben fekvő pontja, e pontban a parabola érintője a parabola síkjának egyetlen végtelenben fekvő egyenese. E szerint minden parabola síkjának végtelenben fekvő egyenesét érinti, az érintési ponton átmenő minden végesben fekvő egyenes a parabola tengelyével parallel, minden ilyen egyenes a parabola átmérője, a parabola tengelye a parabola főátmérője.

A parabola érintőjének szerkesztéséből kitűnik, hogy a parabola vezéregyenese ugyanazt a szerepet játssza a parabolánál, mint az ellenkör az ellipszisnél, illetőleg a hyperbolánál. Az ellipszis, illetve hyperbola ellenkörére való hivatkozással a parabola adott egyenessel parallel érintőjét úgy szerkesztjük meg, hogy a gyujtópontból az adott egyenesre merőlegest bocsátunk, ez az egyenes metszi a vezéregyenest egy pontban, e pont és gyujtópont távolságát merőlegesen felező egyenes a keresett érintő. E szerkesztéssel csak egy végesben fekvő, adott egyenessel parallel érintőt nyerünk, az ellipszisnél, illetőleg hyperbolánál e feladat megoldásaként nyert másik végesben fekvő érintőjét helyettesíti a parabola síkjának végtelenben fekvő egyenese, t. i. e végtelenben fekvő egyenes a sík minden végesben fekvő egyenesével parallel.

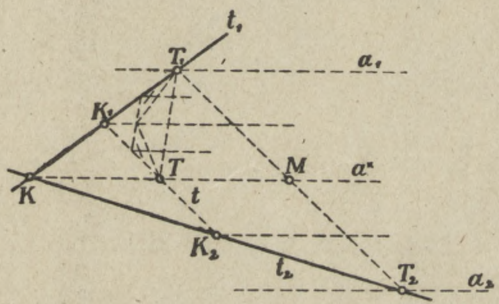


253. ábra.

Adott vezéregyenes és gyujtópont mellett szerkesszük meg a parabola ama érintőit, melyek a tetszőleges K pontra illeszkednek. (253. ábra.) Alkalmazva ama szerkesztést, melyet az ellipszisnél e feladat megoldására nézve megállapítottunk, a K pont körül $\overline{KF}$ sugarú kört rajzolunk, e kör a parabola vezéregyenesét a G_1, G_2 pontokban metszi, akkor $\overline{G_1F}$, illetőleg $\overline{G_2F}$ távolság felező merőlegese a keresett érintő, t_1, illetőleg t_2. A G_1 pontra illeszkedő parabolaátmérő, a_1, metszi a t_1 érintőt a T_1 pontban, e pont a t_1 érintő érintési pontja, hasonlóan nyerjük a t_2 érintőn a T_2 érintési pontot, melyet a G_2 pontra illeszkedő parabolaátmérő, a_2, a t_2 érintőn megállapít.

Megrajzolva a 253. ábrában a K pontra illeszkedő $a^\times$ átmérőt, ez átmérő felezi a $\overline{G_1G_2}$ távolságot, felezi az érintők érintési pontjaival határolt parabolahúrt, felezi az érintési pontokra illeszkedő parabolaátmérők által határolt síksávot, az $a^\times$ egyenes a síksáv középvonala. Külön kiemeljük, hogy e középvonal felezi a K pontban t_1, illetőleg t_2 érintőn ama távolságot, melyet az érintőn a T_1 és T_2 pontokra illeszkedő átmérők megállapítanak. A parabola e tulajdonsága alapján megszerkeszthetjük a parabola további érintőit és az érintők érintési pontjait, ha ismerjük a parabola két érintőjét és ez érintők érintési pontjait.

Legyen adva a parabola két érintője t_1, t_2 és ez érintők érintési pontjai T_1, T_2. (254. ábra.) Ha K a két adott érintő illeszkedési pontja és M a $\overline{T_1T_2}$ távolság felezési pontja, akkor KM egyenes a parabola



254. ábra.

egy $a^\times$ átmérője. A parabola T_1 pontjára illeszkedő átmérője, a_1, az $a^\times$ egyenessel parallel, hasonlóan nyerjük a T_2 pontra illeszkedő a_2 átmérőt. Messe az $a^\times$ átmérő a parabolát a még egyelőre ismeretlen T pontban, akkor a T ponthoz tartozó t érintő az adott t_1 érintőt oly K_1 pontban metszi, mely pont illeszkedik az a_1 és $a^\times$ egyenesekkel határolt síksáv felező egyenesére, szóval K_1 a T_1K távolság felezési pontja. Hasonlóan nyerjük, hogy az ismeretlen T ponthoz tartozó érintő, t, metszi a t_2 érintőt a K_2 pontban, ahol K_2 a T_2K távolság felezési pontja. A K_1 és K_2 pontokat megszerkeszthetjük, e pontokra illeszkedő egyenes, t, a parabola újabb érintője, ugyanakkor t és $a^\times$ közös pontja a megszerkesztett érintő érintési pontja, T. E szerkesztésből kitűnik, hogy T a $\overline{KM}$ távolság felezési pontja, továbbá az, hogy az új érintő, t, az adott érintők érintési pontjainak összekötő egyenesével parallel.

*

Az ellipszis, a hyperbola és a parabola másodrendű és másodosztályú síkgörbék. A másodrendű görbék osztályába tartozik a kör is, mert a kör oly ellipszis, melynek két gyujtópontja összeesik. A másodrendű görbék analitikai tárgyalásából kitűnik, hogy el nem fajuló (vagyis két egyenesre szét nem eső) valós másodrendű görbe csak ellipszis, vagy hyperbola, vagy parabola lehet. Az ábrázoló geometriában az el nem fajuló valós *másodrendű görbék osztályozásának alapja a másodrendű görbe és c görbe síkjára illeszkedő végtelenben fekvő egyenesének viszonylagos helyzete.* Ha a görbének egy valós pontja sem illeszkedik síkjának végtelenben fekvő egyenesére, akkor a görbe ellipszis, mert az ellipszis minden valós pontja végesben fekvő pont, mivel minden pontja ellenkörének belső pontja; ha a görbének két különböző valós pontja illeszkedik síkjának végtelenben fekvő egyenesére, akkor az hyperbola; ha a görbe két összeeső valós pontja illeszkedik síkjának végtelenben fekvő egyenesére, akkor a görbe parabola.

A másodrendű görbéket *kúpszeleteknek* is mondjuk, mert kimutatható, hogy minden el nem fajuló valós másodrendű kúp egy-egy síkmetszete lehet ellipszis, lehet hyperbola és lehet parabola.

Észrevett sajtóhibák.

Az 54. oldalon a 61. ábrában N' helyett A' és N'' helyett A'' irandó.

A 116. oldalon a 119. ábrában O helyett T irandó.

A 203. oldalon a 221. ábrában $(T^{\times})$ helyett $(T)^{\times}$ irandó.

Dr. Romsauer Lajos

Ábrázoló geometria

MÁSODIK KÖTET

A síkgörbék, a térgörbék és a görbe felületek ábrázoló geometriája, kótás projekció és a centrális projekció

250 szöveg közötti ábrával

FRANKLIN-TÁRSULAT KIADÁSA

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

ROMSAUER:
Ábrázoló geometria

I

N. M.