ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIA

ÍRTA

Dr. ROMSAUER LAJOS

MŰEGYETEMI NYILV. R. TANÁR

MÁSODIK KÖTET

A SÍKGÖRBÉK, A TÉRGÖRBÉK ÉS A GÖRBE FELÜLETEK ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIÁJA, A KÓTÁS PROJEKCIÓ ÉS A CENTRÁLIS PROJEKCIÓ

250 SZÖVEG KÖZÖTTI ÁBRÁVAL

MÁSODIK KIADÁS

FRANKLIN-TÁRSULAT

Udvardy György
XI Orlay utca 3 IV. 1

ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIA

ÍRTA

Dr ROMSAUER LAJOS

MŰEGYETEMI NYILV. R. TANÁR

MÁSODIK KÖTET

A SÍKGÖRBÉK, A TÉRGÖRBÉK ÉS A GÖRBE FELÜLETEK ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIÁJA, A KÓTÁS PROJEKCIÓ ÉS A CENTRÁLIS PROJEKCIÓ

250 SZÖVEG KÖZÖTTI ÁBRÁVAL

MÁSODIK KIADÁS

FRANKLIN-TÁRSULAT

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

ELŐSZÓ AZ ELSŐ KIADÁSHOZ.

Ábrázoló geometriám második és befejező kötetében nagy súlyt fektettem a technikus igényeinek kielégítésére. Vannak fejezetek, melyek elsősorban az építészt s mérnököt, és olyanok, melyek főleg a gépészmérnököt érdeklik. Így, ha az építész s mérnök csak a legszükségesebb ábrázoló geometriai ismeretek elsajátítására törekszik, az 5—12. §-okat, az 50. §-t, a 61—67. §-kat, a 87—92. §-okat és a 109—114. §-okat, hasonlóan a gépészmérnök a 31. §-t, a 49. §-t, a 72. §-t, a 77. § *g)—i)* pontjait, a 84. §-t és a 115—165. §-okat mellőzheti.

Megjegyzem, hogy könyvem teljesebb lenne, ha függelék alakjában a projektív geometriának legelemibb részeit is tárgyalnám. Mivel azonban Műegyetemünkön ezeket az ismereteket a mennyiségtani előadások keretében nyujtjuk, és könyvem terjedelmének kellő határokat is kívántam szabni, tárgyalásaimban az elemi projektív geometriát ismeretesnek tételeztem fel.

Ábráimnak a nyomda számára történt előkészítését itt is hálásan köszönöm *Remsey Győző*, *Vigassy Lajos* és *Zigány Ferenc* tanár uraknak, kik különben nem egy esetben igen értékes tanáccsal szolgáltak, de nagy köszönettel tartozom a *Franklin-Társulatnak* is, mely feltűnő előzékenységgel könyvem megjelenését lehetővé tette.

A szerző.

TARTALOM.

ELSŐ FEJEZET.

Síkgörbék.

Speciális síkgörbék.

Síkgörbék ábrázolása.

MÁSODIK FEJEZET.

Kúpfelületek, hengerfelületek.

Térgörbék.

Görbe felületek.

A csavarvonal.

Másodrendű kúp- és hengerfelületek áthatása.

Forgási felületek.

A gömb.

Általános forgási felületekre vonatkozó szerkesztések.

Az egyköpenyű forgási hyperboloid.

Másodrendű felületek.

Torzfelületek, csavarfelületek.

HARMADIK FEJEZET.

A kótás projekció.

Terepfelületek.

A centrális projekció.

ELSŐ FEJEZET.

SÍKGÖRBÉK.

1. §. Síkgörbékről általánosságban. Minden görbe vonal valamely mozgó pont pályája. Ha a görbe vonal minden pontja egy és ugyanazon síkra illeszkedik, akkor a görbe vonal *síkgörbe*, ellenkező esetben *térgörbe*. A legtöbb esetben a mozgó pontról feltesszük azt, hogy mozgása megadott törvények szerint történik, e törvények alapján megszerkesztjük a mozgó pont egyes helyzeteit és az így nyert pontokat görbe vonallal összekötjük.

A mozgás megadott törvényei szerint származtatott görbét egyes tulajdonságainak megállapítása végett síkjában felvett derékszögű koordinátarendszerre vonatkoztatjuk. A görbe pontjaihoz tartozó rendezők változó mennyiségek, a változás törvényeit a mozgás törvényeiből vezetjük le. Vagyis x és y egy szintén változó t mennyiségnek határozott függvényei, pl.

$$x=\varphi\ (t),\ y=\psi\ (t),$$

ahol t egy-egy meghatározott értéke a mozgó pont pillanatnyi helyzetét rögzíti. A t változó mennyiséget *paraméternek* mondjuk, ez lehet a mozgás momentán helyzeteit szabályozó távolság, szög, idő stb. A változó koordináták fenti függvénykapcsolatait együttesen a síkgörbe paraméteres egyenletrendszerének nevezzük.

A síkgörbe paraméteres egyenletrendszeréből a t paramétert kiküszöbölhetjük, ekkor a nyert egyenlet általános alakja

$$f(x,\ y)=0$$

a síkgörbe egyenlete. Ha ez az egyenlet algebrai egyenlet, vagyis az $f(x, y)$ függvény az x, y változók racionális egész függvénye valós együtthatókkal, akkor görbénk *algebrai görbe*, még pedig n-edrendű, ha $f(x,\ y)=0$ egyenlet legmagasabb dimenziójú tagjának dimenziója n. Ha a síkgörbe nem fejezhető ki algebrai egyenlettel, akkor a görbét *transzcendensnek* mondjuk.

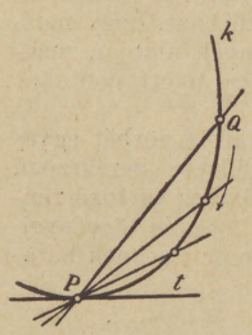
A síkgörbe egyenletét komplex értékpárok is kielégítik, egy-egy ilyen értékpárhoz tartozó pontok a síkgörbe képzetes pontjai. Ha a síkgörbe képzetes pontjait a síkgörbe pontjaihoz tartozóknak tekintjük, akkor kimondhatjuk a síkgörbék következő tételét :

A síkgörbe síkjára illeszkedő minden egyenes az n-edrendű síkgörbét n pontban metszi.

Az a körülmény, hogy az algebrai síkgörbénél egy egyenesre illeszkedő pontok száma állandó, a síkgörbék osztályozásához vezet. Így az egyetlen elsőrendű síkgörbe az egyenes, másodrendű görbék a kúpszeletek stb.

Amennyiben algebrai síkgörbénél az $f(x, y)=0$ egyenlet bal oldala két vagy több egész függvény szorzatára bontható, a síkgörbe alacsonyabbrendű síkgörbékből tevődik össze. Ilyenkor azt mondjuk, a síkgörbe *szétesik, elfajul, degenerál.* Így két véges pontban metsző egyenes, két parallel egyenes, két összeeső egyenes, vagyis egy kétszer számított egyenes elfajuló másodrendű görbék.

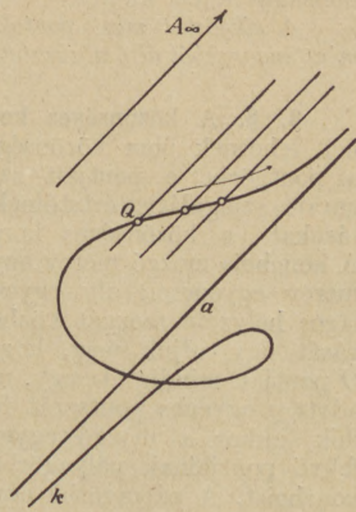
2. §. Az érintő. Miközben a mozgó pont pályagörbéjét befutja, minden pillanatban határozott, de folyton változó haladási iránnyal rendelkezik. Ezt az irányt a görbe egy P pontjára nézve megközelítőleg egy egyenessel adhatjuk meg, azzal az egyenessel, mely a görbe P pontját a görbe valamely szomszédos Q pontjával összeköti. E megközelítés annál pontosabb, minél közelebb választjuk a P ponthoz a szomszédos pontot. Ebből arra következtetünk, hogy a keresett haladási irány a P pont körül forgó egyenes határhelyzete, a forgó egyenes e határhelyzethez azáltal közeledik, hogy a P pont szomszédos Q pontját, a P ponthoz mindig közelebb és közelebb választjuk. *A síkgörbe P és Q pontjára illeszkedő egyenesről azt mondjuk, hogy az a görbe szelője. E szerint a görbe pillanatnyi haladási iránya a szelő határhelyzete, e határhelyzetű egyenest a görbe P pontjához tartozó érintőjének nevezzük, míg a P pont az érintő érintési pontja.* Ha P és Q összeeső pontok, akkor ezek összekötő egyenese határozatlan. Megállapodunk abban, hogy ha a Q pont a mozgó pont pályáján a P ponthoz minden határon túl közeledik, az érintő a két összeeső pont összekötő egyenese. Ezt sokszor úgy fogjuk kifejezni, hogy az érintő a görbe két végtelen közel fekvő pontjának vagy a görbe két szomszédos pontjának összekötő egyenese (1. ábra).



1. ábra.

A síkgörbe tetszőleges pontját a síkgörbén két, esetleg több oldalról közelíthetjük meg. Ha e két- vagy többféle megközelítés mellett a szelő határhelyzete mindig egy és ugyanazon egyenes, akkor azt mondjuk, hogy a görbe pontja *a görbe közönséges pontja.*

Síkgörbének lehetnek végtelenben fekvő pontjai is. Síkgörbe végtelenben fekvő pontját megadjuk végesben fekvő egyenes végtelenben fekvő pontjával. Ha a síkgörbe végtelenben fekvő A pontját összekötjük a síkgörbe tetszőleges végesben fekvő Q pontjával, akkor az AQ egyenes a síkgörbe szelője, e szelő természetesen a síkgörbe végtelenben fekvő pontját jellemző egyenessel parallel (2. ábra). Amennyiben a Q pont helyzetét a síkgörbén oly módon változtatjuk, hogy az a síkgörbe végtelenben fekvő pontja felé haladjon, a változó AQ egyenes parallel sugársort ír le. Ha a Q pont az A ponthoz határtalanul közeledik, akkor a parallel sugársor sugarai egy végesben fekvő egyeneshez közelednek, ez az egyenes, mely a sugársor egyeneseinek határhelyzete, a síkgörbe végtelenben fekvő pontjához tartozó érintő. *Síkgörbe végtelenben fekvő pontjához tartozó érintője a síkgörbe asymptotája.* Síkgörbe szerkesztett asymptotája a síkgörbe rajzolását lényegesen megkönnyíti, mert az asymptota meghatározásából következik, hogy a síkgörbe pontjai mindig közelebb és közelebb jutnak az asymptotához, ha a pontok közelebb és közelebb jutnak a síkgörbe végtelenben fekvő pontjához.



2, ábra.

Síkgörbe P pontbeli érintőjére merőleges és P ponton átmenő egyenes a síkgörbe normálisa a P pontban.

Az $f(x, y) = 0$ egyenlettel adott síkgörbénél x meghatározott értékéhez tartozik a síkgörbe egy (esetleg több) meghatározott P pontja. Az $x - \triangle x$ és $x + \triangle x$ intervallumhoz tartozó pontok a síkgörbe egy részét jelölik ki, a görbe e részére illeszkedő pontok a görbe P pontjának véges környezetéhez tartozó pontok. Ha $\triangle x$ végtelen kicsi, akkor ez új intervallumhoz tartozó görbepontok a P végtelen kis környezetéhez tartozó pontok. Ha a jövőben görbe valamely pontjához tartozó környezetbeli pontjairól fogunk tárgyalni, akkor általában feltesszük, hogy e pontok a pont végtelen kis környezetéhez tartoznak.

Síkgörbe tetszőleges P pontjához tartozó t érintő a végtelenben fekvő egyenessel együtt a síkgörbe síkját két részre bontja, az érintő egyik és másik oldalán fekvő részekre. Az infinitesimális geometria bebizonyítja, hogy a síkgörbe tetszőleges pontjához tartozó környezetbeli pontok a ponthoz tartozó érintő egyik oldalán vannak és csak az ilyen érintőről mondjuk azt, hogy az a síkgörbe közönséges érintője. Az érintő definíciójából következik, hogy amint az érintési pont környezetéhez tartozó pontokkal az érintési pont felé közeledünk, e pontok az érintőtől mindig kisebb és kisebb távolságban vannak. Síkgörbe közönséges P pontjának környezetéhez tartozó pontok e viselkedését a pont közönséges t érintőjével szemben úgy szoktuk kifejezni hogy a síkgörbe a P pont környezetében a sík tetszőleges pontja felé konkáv oldalát mutatja, ha e pont az érintő ama oldalán van, amely oldalon a P környezetbeli pontok vannak, ugyanakkor az érintő másik oldalán fekvő pontja felé a síkgörbe a P pont környezetében konvex oldalát mutatja.

n-edrendű síkgörbe és egyenes közös pontjaiból, ha az egyenes a síkgörbe érintője, egy pont kétszer számítandó pont, e pont az érintő érintési pontja. Ezt indokolja egyrészt az érintő származtatása, másrészt érintő és síkgörbe metszéspontjainak analitikai meghatározásánál az a körülmény, hogy a metszéspontok abszcissza értékeit szolgáltató n-edfokú egyenletnek az érintesi ponthoz tartozó abszcissza érték az egyenletnek kétszeres gyöke.

Ha a síkgörbe minden pontjában megszerkesztjük az érintőt, akkor az érintők összességükben az eredeti síkgörbét burkolják, a síkgörbe az érintő egyenesek burkoltjaként mutatkozik, a görbe az egyenesek enveloppe-ja.

A síkbeli rendszer dualitási elve szerint a síkgörbének, mint pontalakzatnak, duál megfelelője a síkgörbe, mint az érintő egyenesek burkoltja. E szerint a síkgörbe pontjaira vonatkozó helyzetgeometriai tételnek síkbeli duáltétele a duál síkgörbe érintőinek helyzetgeometriai tulajdonságát fejezi ki.

A síkgörbét mint pontokból álló alakzatot tekintve pontgörbének és mint sugarakból álló alakzatot tekintve sugárgörbének mondjuk.

3. §. A közönséges konchois. A pontgörbének, ill. sugárgörbének lehetnek nem közönséges pontjai, ill. nem közönséges sugarai, a pontgörbe e pontjait szinguláris pontoknak, a síkgörbe e sugarait szinguláris érintőinek mondjuk. A legegyszerűbb szingularitásokat a közönséges konchoissal kapcsolatban ismerhetjük meg. A konchois mozgó merev egyenesre illeszkedő pont pályagörbéje, ahol merev egyenesen oly egyenest értünk, melyen a pontok viszonylagos helyzete mozgás közben nem változik. A merev egyenes mozgását úgy adjuk meg, hogy az egyenes mozgás közben a sík fix O pontján mindig átmegy, míg az egyenes egy másik M pontja a sík adott g egyenes pontsorát futja be. Ha O és g elemek nem illeszkedők, akkor a mozgó egyenesnek M ponttól adott l távolságban fekvő pontjainak pályagörbéi együttesen szolgáltatják a közönséges konchoist. A pályagörbe egyes pontjait úgy szerkesztjük meg, hogy az O centrumú sugársor minden sugarára a sugár és g egyenes közös M pontjából számítva mindkét értelemben felmérjük az l távolságot, a távolság végpontjai a konchois pontjai. A konchois görbéknek különböző típusait nyerjük, ha az O és g elemek által meghatározott a távolságot az adott l távolsággal szemben különbözően választjuk. Így a

3.	ábrában	látható	konchoisnál	$a < l$,
4.	«	«	«	$a = l$,
5.	«	«	«	$a > l$.

A konchois egyenletét polárkoordinátákban közvetlenül felírhatjuk, ha O a pólus és a O pontból a g egyenesre bocsátott merőleges egyenes a tengely, ekkor a konchois szerkesztése alapján

$$r = \frac{a}{\cos\varphi} + l,$$

ha pedig a görbe pontjait derékszögű koordinátarendszerre vonatkoztatjuk, melynek középpontja O és az abszcisszák tengelye az előbbi polártengely, akkor az $x = r\cos\varphi$ és $y = r\sin\varphi$ összefüggések felhasználásával a konchois egyenlete

$$(x-a)^2(x^2+y^2)-l^2x^2=0.$$

Ez az egyenlet azt mutatja, hogy a konchois negyedrendű síkgörbe, tehát a síkgörbe síkjára illeszkedő minden egyenes négy pontban metszi. Messük a görbét a koordinátarendszer kezdőpontjára illeszkedő $y=mx$ egyenessel, ekkor a metszéspontok abszcisszáira vonatkozó egyenletből

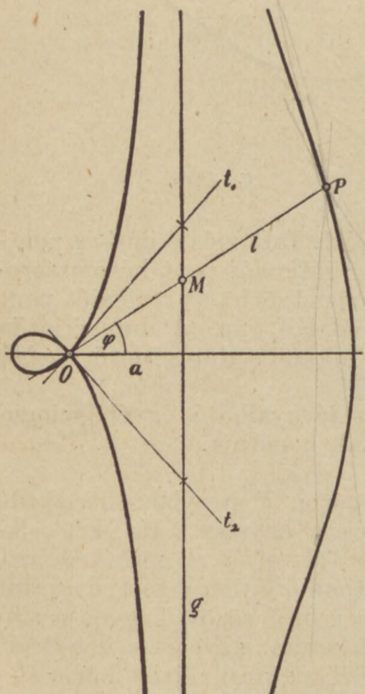
$$x^2[(x-a)^2(1+m^2)-l^2]=0,$$

leolvashatjuk, hogy az O pontra illeszkedő minden egyenes a görbét négy oly pontban metszi, melyek közül kettő a koordinátarendszer kezdőpontjával összeesik, mert az $x=0$ gyök az egyenletnek kétszeres gyöke. Az O pont a görbének szinguláris pontja, mert e pontra illeszkedő minden egyenes a görbét két összeeső pontban metszi, e pontról azt mondjuk, hogy a sík *duplapontja*, kettőspontja, a görbe e pontban önmagát metszi.

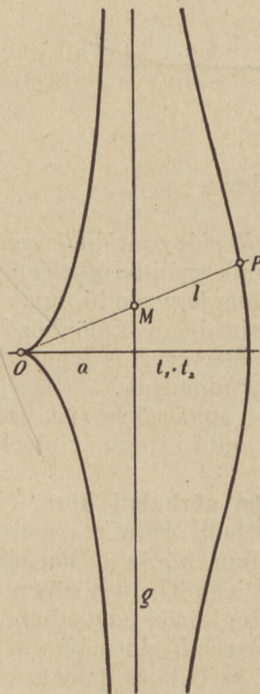
Messük a görbét a koordínátarendszer kezdőpontjára illeszkedő oly egyenessel, melyre nézve az m iránytényező, $m = \pm \frac{1}{a} \sqrt{l^2-a^2}$. Ekkor a metszéspontok abszcisszáira vonatkozó egyenlet a következő alakot ölti:

$$x^2[(x-a)^2-a^2]=0.$$

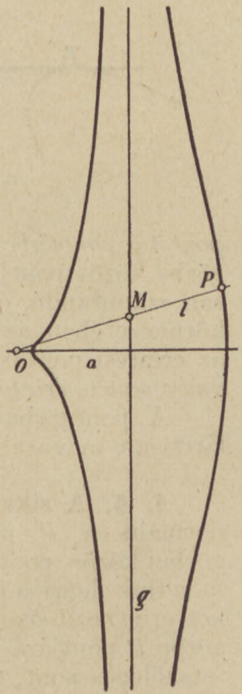
Az egyenletnek $x=0$ gyöke háromszoros gyöke, vagyis a kezdőpontra illeszkedik két különleges helyzetű egyenes; minden ilyen egyenes a



3. ábra.



4. ábra.

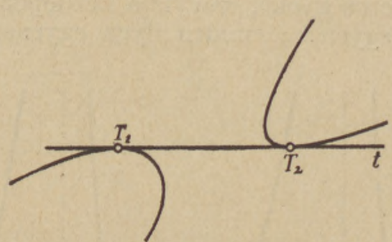


5. ábra.

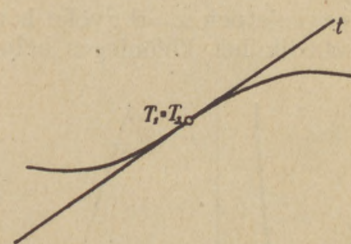
görbét három összeeső pontban metszi, e speciális helyzetű egyenesekről és csak ezekről fogjuk azt mondani, hogy ezek a síkgörbe duplapontjához tartozó érintők.

A konchois O duplapontjában a két érintő lehet két különböző valós egyenes (3. ábra), t_1, t_2, ekkor a duplapont a görbe *közönséges duplapontja*, röviden duplapontja, melyen át a síkgörbe valósan kétszer megy. Ha a duplapontban a két érintő összeesik (4. ábra), akkor a duplapontot a görbe csúcspontjának mondjuk. *A csúcspontban a görbének egy kétszer számítandó érintője van,* $t_1 \equiv t_2$, *és az érintési pont környezetében a görbe az érintő két különböző oldalán van.* Ha végül a duplapontban *a két érintő képzetes* (5. ábra), akkor e duplaponton keresztül a görbe kétszer képzetesen megy, *a duplapontot a síkgörbe izolált vagy remete pontjának mondjuk.*

A pontgörbe tárgyalt pontszinguláritásaiból nyerhetjük a sugárgörbe sugárszingulárisait a dualitás elve alapján. A duplapontnak duál megfelelője *a duplaérintő* és a duplaponthoz tartozó két érintő megfelelője a duplaérintőre illeszkedő két érintési pont. A t duplaérintőn a két érintési pont, T_1 és T_2, lehet két különböző valós pont (6. ábra), akkor a duplaérintő a síkgörbe *közönséges duplaérintője*, röviden duplaérintő. *Ha a duplaérintőn a két érintési pont összeesik,* $T_1 \equiv T_2$ (7. ábra), *akkor a duplaérintőt a síkgörbe inflexiós érintőjének, az érintési*



6. ábra.



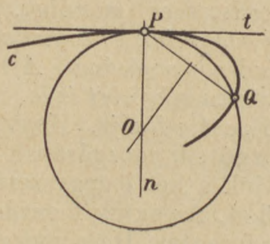
7. ábra.

pontot a pontgörbe inflexiós pontjának mondjuk. Inflexiós érintő és pontgörbe közös pontjainak számbavételénél az inflexiós pont háromszorosan számítandó, és megjegyzendő, hogy a pontgörbe az inflexiós pont környezetében az érintő két különböző oldalán van. A duplaérintőn az érintési pontok képzetesek is lehetnek, akkor a duplaérintőt *izolált* vagy *remete érintőnek* mondjuk.

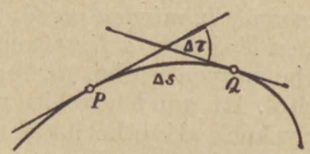
A pontgörbe és sugárgörbe itt nem tárgyalható egyéb szinguláritásait magasabbrendű szinguláritásoknak mondjuk.

4. §. A síkgörbe görbületi köre. Síkgörbe P pontjára illeszkedő normális a P pontbeli érintőre merőleges egyenes. Ha két síkgörbe közös pontjában közös a normális, akkor a síkgörbékről azt mondjuk, hogy a két síkgörbe a közös pontban érinti egymást, e szerint két érintkező síkgörbe közös pontjában az érintő közös. Legyen a síkgörbe P pontjára illeszkedő normálisa n és erre az egyenesre illeszkedő tetszőleges pont, O. Az O középpontú és OP sugárral rajzolt kör a síkgörbét P pontban érinti, mert a görbe és kör közös P pontjában a normális közös. Ebből látható, mivel az O pontot az n egyenesen tetszőlegesen választottuk, hogy végtelen sok a síkgörbét adott pontjában érintő kör van. A P pontban érintkező körök közül mindig van egy, mely a síkgörbe további adott Q pontjára illeszkedik, ekkor az érintkező kör középpontját az n egyenesen a $\overline{PQ}$ távolság felező merőlegese metszi ki (8. ábra). Ha a Q pontot a c görbén változtatjuk, akkor a Q pont változó helyzetével változik a P pontban érintkező és Q pontra illeszkedő k kör sugara és középpontja. Síkgörbe közönséges pontjában mindig bekövetkezik az az eset, hogy a k kör meghatározott határhelyzetbe megy át, ha a görbén mozgó Q pont minden határon túl a P ponthoz közeledik, e határhelyzetű kör a görbe P pontjában a simuló kör. Simuló körnek mondjuk azért, mert e kör a P pontban érintkező körök közül a görbéhez legjobban simul, hiszen e kör származtatásánál fogva a síkgörbe három szomszédos pontjára illeszkedik, míg minden más érintkező kör csak két szomszédos pontjára illeszkedik.

Feltéve, hogy az eredetileg adott síkgörbe maga is kör, akkor e kör minden pontjában a simuló kör az adott körrel azonos kör. Síkgörbe inflexiós pontjában a simuló kör az inflexiós érintővel azonos egyenesbe megy át, ekkor a símuló kör sugara végtelen nagy.



8. ábra.



9. ábra.

Síkgörbe P és Q pontjaihoz tartozó érintők általában véges szöget alkotnak, ugyanakkor az érintők érintési pontjai a görbén véges ívdarabot jelölnek ki, ha a szög $\Delta\tau$ és az ív hossza Δs, akkor $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$ hányados a görbe $\widehat{PQ}$ ívének középgörbülete (9. ábra). Így r sugarú kör bármely ívdarabjához tartozó középgörbület $g=\frac{1}{r}$. Síkgörbe $\widehat{PQ}$ ívéhez tartozó középgörbület általában meghatározott határértéket vesz fel, ha az ívdarab hossza minden határon túl a nulla felé konvergál, e határérték a görbe P pontbeli görbülete. A görbület e meghatározásából következik, hogy kör esetében a kör minden pontjában a görbület ugyanaz és mindig $g=\frac{1}{r}$.

A c görbe P pontjában a simuló kör azon kör határhelyzeteként is fogható fel, mely kör a görbét nemcsak a P pontban, hanem ennek szomszédos Q pontjában is érinti, de akkor ez egyúttal azt is jelenti, hogy a görbe P pontjában a görbület egyenlő a görbe e pontjához tartozó simuló kör görbületével. Ebből következik, hogy *síkgörbe tetszőleges pontjában a görbület e ponthoz tartozó simúló kör sugarának reciprok értékével egyenlő, ez oknál fogva a simuló kört görbületi körnek, a simuló kör középpontját görbületi középpontnak is mondjuk.*

Síkgörbe csúcspontjában a görbület végtelen nagy, mert e pontban az oszkuláló kör sugara nulla, míg inflexiós pontban a görbület nulla.

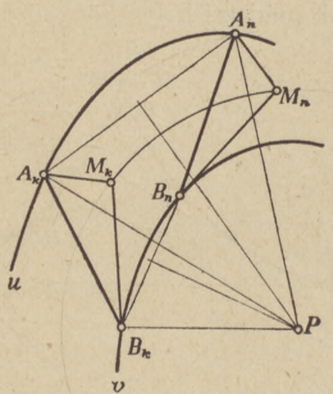
Síkgörbe P pontjának környezetbeli pontjaiban a görbületek különbözők, a görbület pontról-pontra változik, a P ponttal haladva a síkgörbén az egyik értelemben a görbület általában nagyobbodik, míg a másik értelemben haladva a görbület kisebbedik. Ebből következik, hogy a P pontban meghatározott simuló kör a síkgörbét a P pontban nemcsak érinti, hanem egyúttal metszi is. Az érintési pont környezetéhez tartozó ama pontok, melyekben a görbület a P ponthoz tartozó görbületnél nagyobb, a P pontbeli simuló kör belsejében vannak, ellenkező esetben a körön kívül vannak.

Speciális síkgörbék.

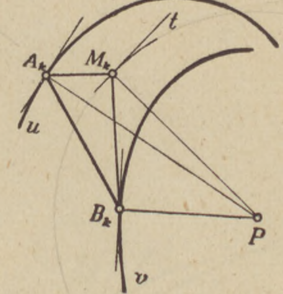
5. §. Merev síkbeli rendszer mozgásáról. *Azt a síkbeli rendszert, melyre illeszkedő pontok és egyenesek a sík mozgásánál viszonylagos helyzetüket nem változtatják, merev síkbeli rendszernek mondjuk. A merev síkbeli rendszer síkját egy másik fix síkkal egyesítjük és egyesített helyzetben gondoljuk a merev síkbeli rendszer minden mozgásánál. A merev sík, röviden mozgó sík, minden pontja mozgás közben síkgörbét ír le, e síkgörbével födésben lévő görbe a fix síkon a mozgó pont pályája.* Hogy egy-egy pályagörbe milyen görbe, az függ a mozgó sík mozgásának törvényszerűségétől. Itt mindenekelőtt megemlítjük a két legegyszerűbb mozgást, melyeknek alávethetjük a mozgó síkot. Az egyik mozgás a *translatio* vagy eltolás, a másik a *rotatio* vagy forgatás. Ha a mozgó síkot a fix síkban eltoljuk, akkor a mozgó sík minden pontja egyenest ír le, minden egyenes parallel a fix síkban lévő és az eltolás irányát jelentő egyenessel. Ha a mozgó síkot a fix sík egy pontja körül forgatjuk, akkor a mozgó síkban e ponttal, *a mozgás pólusával*, födésben lévő pont helyben marad, míg minden más pont kört ír le, ahol a kör sugara a mozgó pont távolsága a pólustól.

Általában a $\sum^{\times}$ merev síknak síkbeli mozgása a $\sum$ fix síkkal szemben teljesen meg van határozva, ha a mozgó sík két pontjának pályagörbéjét megadjuk. Legyen a mozgó sík $A^{\times}$ pontjának pályagörbéje u és $B^{\times}$ pontjának pályagörbéje v, továbbá legyen $A^{\times}$, ill. $B^{\times}$ egy pillanatnyi helyzete A_0, ill. B_0. A mozgó sík merev sík, tehát az $A^{\times}$ és $B^{\times}$ pontok távolsága változatlan távolság s így ha $A^{\times}$ az u pályán mozog és $B^{\times}$ a v pályán mozog, kell hogy minden pillanatnyi helyzetben a két pont távolsága ugyanaz legyen. Ekkor az $A^{\times} B^{\times}$ egyenes és vele együtt a $\sum^{\times}$ sík teljesen meghatározott mozgást végez, mert az $A^{\times}$ pont egy helyzetéhez általában a $B^{\times}$ pontnak egy és csakis egy helyzete tartozik, ha az egyik pont igen kis elmozdulásánál a másik pont igen kis elmozdulását tételezzük fel.

Mivel a $\sum^{\times}$ sík mozgása e sík $A^{\times}$ és $B^{\times}$ pontjának a $\sum$ síkban az u, ill. v pályagörbékkel meg van határozva, a merev $\sum^{\times}$ sík minden $M^{\times}$ pontja a $\sum$ síkban meghatározott görbét ír le, mert mozgás közben $M^{\times}$, $A^{\times}$ és $B^{\times}$ pontok viszonylagos helyzete nem változik. Az $A^{\times}$, $B^{\times}$, $M^{\times}$ pontok egyes helyzeteit a $\sum$ síkban indexek hozzácsatolásával fogjuk egymástól megkülönböztetni. Vegyük fel a $\sum$ síkban az $A^{\times}$, $B^{\times}$, $M^{\times}$ pontoknak A_k, B_k, M_k és A_n, B_n, M_n két momentán helyzetét (10 ábra), és szerkesszük meg az $A_k A_n$ és $B_k B_n$ távolságok felező merőlegeseinek közös P pontját, akkor a k-ik helyzetből az n-ik helyzetet közvetlenül úgy is nyerhetjük, hogy a $\sum^{\times}$ merev rendszert a P pólus körül forgatjuk addig, míg A_k, az A_n pontba jut, ugyanakkor a szerkesztés alapján B_k jut B_n pontba és M_k jut az M_n pontba. Szóval két momentán helyzet közül az egyik a másikba forgatható. Tegyük fel, hogy az előbbi két helyzet két szomszédos helyzet, vagyis az egyiket a másikból végtelen kis elmozdulással nyertük, akkor $\overline{A_k A_n}$ felező merőlegese az u görbe A_k pontjára illeszkedő normálisa lesz, ugyanúgy lesz $\overline{B_k B_n}$ felező merőlegese a v görbe B_k pontjára illeszkedő és az $\overline{M_k M_n}$ felező merőlegese az $M^{\times}$ pont pályagörbéjének M_k pontjára illeszkedő normálisa (11. ábra),



10. ábra.



11. ábra.

Az A_k és B_k pontokra illeszkedő pályanormálisok metszéspontja, P, *két szomszédos momentán helyzet pólusa, a momentán pólus.* Szóval a $\sum^{\times}$ sík minden pillanatnyi elmozdulása koncentrikus körök mentén történik, a körök közös középpontja a momentán pólus, a momentán pólus pillanatról-pillanatra állandóan változó pont. Az $M^{\times}$ pont pályagörbéje e szerint végtelen sok végtelen kis körívből tevődik össze, de akkor a pályagörbe tetszőleges pontjában az érintő merőleges a momentán normálisra, utóbbi összeköti az érintési pontot a momentán pólussal.

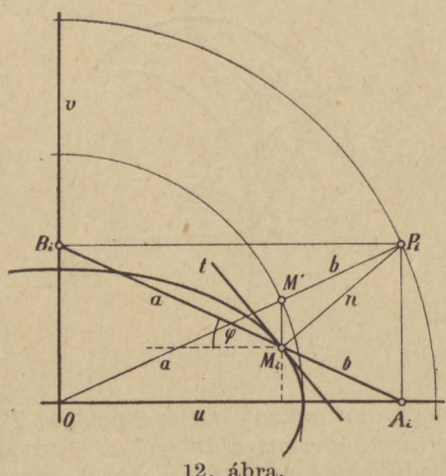
6. §. Példa merev síkbeli rendszer mozgására. Legyenek $A^{\times}$ és $B^{\times}$ pályagörbéi O metszésponttal az u és v egymásra merőleges egyenesek és állapítsuk meg ama pont pályagörbéjét, melyet az $A^{\times} B^{\times}$ egyenesre illeszkedő $M^{\times}$ leíró pont befut (12. ábra). Ha A_i, B_i, M_i az $A^{\times}$, $B^{\times}$, $M^{\times}$ pontok egy momentán helyzete és e helyzetben $A_i B_i$ egyenes az u egyenessel φ szöget alkot és u, v egyenesek derékszögű koordinátarendszer tengelyei, melyre $M^{\times}$ pont pályagörbének pontjait vonatkoztatjuk, továbbá ha $\overline{A_i M_i} = b$ és $\overline{M_i B_i} = a$, akkor a pályagörbe paraméteres egyenletrendszere

$$x=a \cos \varphi,\ y=b \sin \varphi.$$

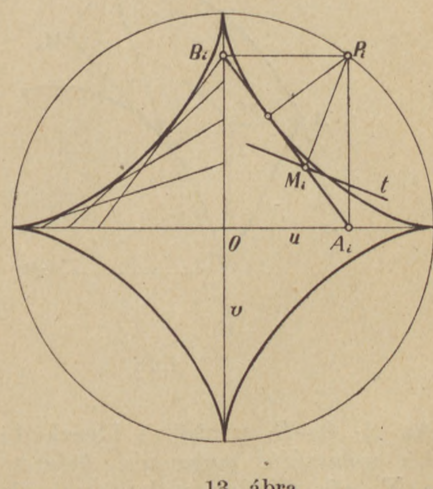
A nyert egyenletrendszer alapján mondhatjuk, hogy a vizsgált pályagörbe ellipszis, melynek fél nagytengelye a, fél kistengelye b. Tehát a

$\Sigma^{\times}$ mozgó síkbeli rendszer minden az $A^{\times}B^{\times}$ egyenesre illeszkedő $M^{\times}$ pontjának pályagörbéje ellipszis. Kimutatható, hogy a mozgó sík minden pontjának pályagörbéje ellipszis, melynek tengelyei általában az u, v egyenesektől különböző egyenesek.

Az ábrában feltüntetett helyzethez a momentán pólust úgy nyerjük, hogy az u pályagörbének A_i pontjára illeszkedő normálisát, vagyis az u egyenesre az A_i pontban a merőlegest megrajzoljuk, ez egyenesnek a v egyenesre annak B_i pontjában állított merőleges egyenessel való metszéspontja, P_i, a momentán pólus. A szerkesztésből kitűnik, hogy az $\overline{OP_i}$ távolság az $\overline{A_i B_i}$ távolsággal egyenlő, ám O az u, v egyenesek közös pontja *fix* pont és $\overline{A_i B_i}$ távolság fix távolság, amiből következik, hogy a momentán pólusok mértani helye kör, középpontja



12. ábra.



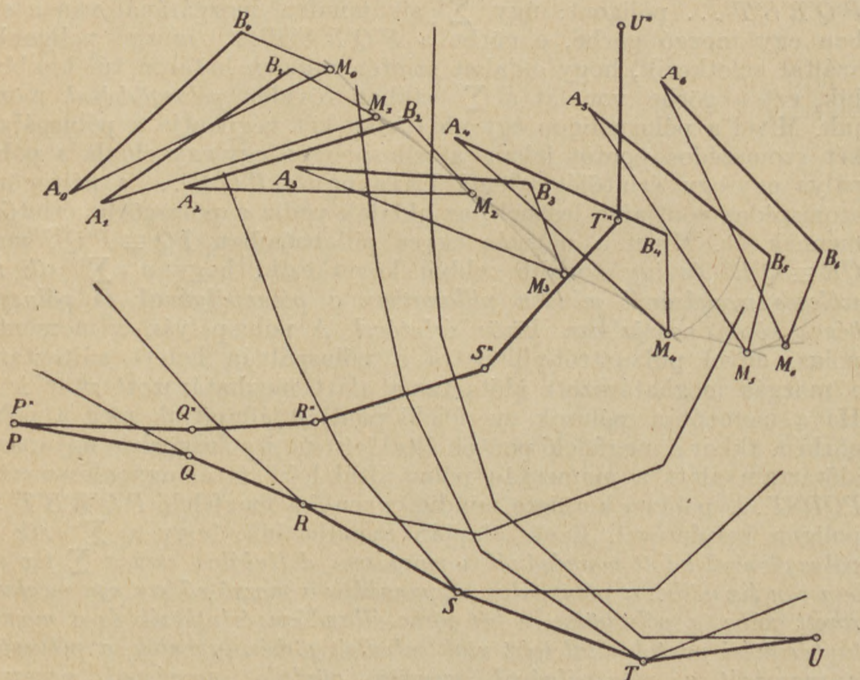
13. ábra.

O, sugara $\overline{A^{\times} B^{\times}}$. Az ellipszis M_i pontjában az érintő az előzők szerint az $M_i\, P_i$ egyenesre merőleges. Messük az OP_i egyenest az M_i ponton átmenő v egyenessel parallel egyenessel az M' pontban, akkor $\overline{OM'} = a$ és $\overline{M'P_i} = b$. E megállapításokkal az ellipszis megszerkesztett M_i pontjára illeszkedő normális és érintő meghatározására új utasítást nyertünk. E szerint az M_i ponton át az ellipszis kistengelyével parallel egyenest vezetünk, ez az egyenes metszi az ellipszissel koncentrikus a sugarú kört az M' pontban, ha az OM' egyenesre felmérjük O-tól számítva az $a + b$ távolságot, akkor e távolság végpontja szolgáltatja az M_i pontra illeszkedő normális P_i pontját. Közvetlenül belátható az is, hogy a normális új szerkesztésénél az ellipszis tengelyeinek szerepe felcserélhető.

Még megemlítjük, hogy a $\Sigma^{\times}$ sík mozgásánál e síkra illeszkedő minden egyenes sugárgörbét ír le. A példaként tárgyalt esetben maga az $A^{\times} B^{\times}$ leíró egyenes által burkolt görbe, az astroida (13. ábra), van négy valós csúcspontja és három duplaérintője, az egyik duplaérintő a sík végtelenben fekvő egyenese, különben hatodrendű és negyedosztályú síkgörbe.

7. §. Póluspálya, pólusgörbe. Gördülő mozgás. Tegyük fel, hogy a $\sum^{\times}$ síkbeli rendszer az *o* helyzetből az *1* helyzetbe jut azáltal, hogy a P pólus körül forog φ_1 szöggel, az *1* helyzetből a *2* helyzetbe azáltal, hogy a Q pólus körül forog φ_2 szöggel, a *2* helyzetből a *3* helyzetbe azáltal, hogy az R pólus körül forog φ_3 szöggel,... stb. $\sum^{\times}$ e mozgásánál a pólusok ugrásszerűen változnak, a $\sum$ síkban e pólusok, ha azokat a mozgás rendje szerint egyenesekkel összekötjük, egy poligon csúcspontjai, legyen rövid időre e poligon a póluspoligon (14. ábra).

Ezek után mondhatjuk, hogy a $\sum^{\times}$ síknak e pontban tárgyalt mozgása szabályozást nyert a $PQRS, \ldots$ póluspoligon és a $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots$



14. ábra.

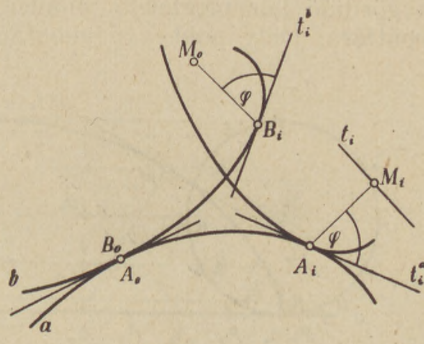
stb. szögek által. Ugyanezt a mozgást még másképpen, azaz más adatokkal is szabályozhatjuk; hogy ez adatok birtokába juthassunk, így okoskodunk: Amikor a $\sum^{\times}$ síkot P körül φ_1 szöggel elforgattuk, akkor mindenesetre van a $\sum^{\times}$ síkban oly $Q^{\times}$ pont, mely az elforgatás után a Q ponttal azonos pont lesz, a $Q^{\times}$ pontot úgy nyerjük, hogy a PQ egyenest a P körül φ_1 szöggel ellenkező értelemben forgatjuk, a Q pont elforgatottja a $Q^{\times}$ pont. Amikor a $\sum^{\times}$ síkot P körül φ_1 szöggel, majd Q körül φ_2 szöggel elforgatjuk, akkor van a $\sum^{\times}$ sík kezdő helyzetében oly $R^{\times}$ pont, mely a P, majd Q pont körül történt elforgatás után az R ponttal azonos pont lesz. Hasonlóan van a $\sum^{\times}$ síkban oly $S^{\times}$ pont, mely a P, Q, R pontok körüli ismeretes mértékű elforgatások után az S ponttal azonos pont lesz. A $\sum^{\times}$ sík kezdő helyzetében a $P^{\times} \equiv P$, $Q^{\times}$, $R^{\times}$, $S^{\times}$ stb. pontok ugyancsak poligon csúcspontjai, nevezzük ezt mozgó poligonnak. A mozgó poligon bevezetésével a $\sum^{\times}$ sík ismertetett mozgását így is adhatjuk meg: Forgassuk a $\sum^{\times}$ síkot a rajta lévő elemekkel, tehát a rajta lévő $P^{\times}Q^{\times}R^{\times}S^{\times}\ldots$ poligonnal együtt először P körül addig, míg a $Q^{\times}$ a Q pontba jut, azután a Q pont körül addig, míg $R^{\times}$ az R pontba jut, azután R pont körül addig, míg $S^{\times}$ pont S pontba jut és így tovább.

Az 5. §-ban a $\sum^{\times}$ sík tetszőleges mozgását az $A^{\times}$ és $B^{\times}$ pontok pályagörbéivel adtuk meg, ugyanakkor láttuk, hogy e mozgás végtelen sok végtelen kis rotációs mozgásból tevődik össze. *A momentán pólusok mértani helye görbe vonal, ezt a görbe vonalat a $\sum$ fix síkban a mozgás póluspályájának mondjuk.* E póluspálya a 14. ábra szerint azáltal keletkezik, hogy $PQRST\ldots$ oldalait minden határon túl kisebbítjük. És valamint a 14. ábrában a mozgó síkban megállapítottunk $P^{\times}Q^{\times}R^{\times}S^{\times}T^{\times}\ldots$ poligont, úgy $\sum^{\times}$ sík minden mozgásánál van e síkban egy mozgó görbe, e görbe a $P^{\times}Q^{\times}R^{\times}S^{\times}T^{\times}\ldots$ mozgó poligonból azáltal keletkezik, hogy oldalait szintén minden határon túl kisebbítjük, ezt a görbe vonalat a $\sum^{\times}$ síkban röviden *pólusgörbének* mondjuk. Mivel a póluspoligon egy oldalának két végpontja a póluspályán két szomszédos pontot jelent, a póluspoligon egy-egy oldala a póluspálya egy-egy érintőjét jelenti. Ugyanúgy a $P^{\times}Q^{\times}R^{\times}\ldots$ a pólusgörbe szomszédos pontjaivá lesznek, az oldalak pedig a pólusgörbe érintőibe mennek át. Mivel a mozgás egyes pillanataiban $PQ \equiv P^{\times}Q^{\times}$, majd $QR \equiv Q^{\times}R^{\times}$ és így tovább, ebből következik, hogy a $\sum^{\times}$ *sík tetszőleges mozgásánál minden pillanatban a póluspályának és pólusgörbének közös pontja van közös érintővel.* A póluspályán a momentán pólus, mivel pillanatról-pillanatra a póluspályán helyét változtatja, a mozgás meghatározott időtartama alatt meghatározott utat ír le. Ha a momentán pólusok megfelelő pontjait állapítjuk meg a pólusgörbén, akkor a megfelelő pontok által leírt út a pólusgörbén ugyanazon időtartam alatt a momentán pólus által leírt úttal egyenlő, mert a $PQRST\ldots$ poligon kerülete mindig egyenlő a megfelelő $P^{\times}Q^{\times}R^{\times}S^{\times}T^{\times}\ldots$ poligon kerületével. Ezek alapján mondhatjuk, hogy a $\sum^{\times}$ *sík két pályagörbével adott mozgásánál a mozgással definiálva van a $\sum$ fix síkban egy fix görbe, a póluspálya, ugyanakkor a mozgó síkban egy meghatározott görbe, a pólusgörbe, e két görbe állandóan érintkezik és a momentán érintési pontok által leírt utak mindkét görbén egyenlők, a pólusgörbe e mozgását a póluspályával szemben gördülő mozgásnak nevezzük.* Eredményeink annak kijelentésére jogosítanak, hogy a $\sum^{\times}$ sík $A^{\times}$ és $B^{\times}$ pontok pályagörbéivel adott mozgása mindig azonos a $\sum^{\times}$ meghatározott gördülő mozgásával. *A gördülő mozgás jellemzésére meg kell adni a $\sum$ fix síkban a fix póluspályát,* röviden *a mozgás alapgörbéjét, továbbá meg kell adni a $\sum^{\times}$ sík gördülő pólusgörbéjét egy helyzetben,* amikor a gördülő görbe az alapgörbét egy pontban érinti, ezt az adott helyzetet sokszor a mozgás kezdő helyzetének fogjuk mondani. A $\sum^{\times}$ sík immár jellemzett gördülő mozgásánál *a sík minden $M^{\times}$ pontja a $\sum$ fix síkban görbét ír le, tekintettel arra, hogy e görbe a $\sum^{\times}$ sík gördülő mozgása által keletkezik, az $M^{\times}$ pont által leírt görbét rulettának mondjuk. Mivel minden síkgörbe mozgó sík egy pontja által leírt görbe és mozgó sík minden mozgása gördülő mozgás, minden síkgörbe rulettának minősíthető.*

8. §. Ruletta pontjainak és érintőinek szerkesztése. A jelölések egyszerűsítése végett legyen az alapgörbe a, a gördülő görbe b, minden alapgörbére illeszkedő pont legyen A_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, a gördülő görbére illeszkedő pont B_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, ha egy A és B pontnak indexe egyenlő, ez jelentse azt, hogy a két pont a gördülés egy pillanatában azonos pontok lesznek, a rulettát leíró pont legyen M, egyes helyzeteiben M_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ A bevezetett jelölések alapján mondhatjuk, hogy a b görbének az a görbén való gördülésénél mindig

$$\widehat{A_iA_n} = \widehat{B_iB_n}.$$

Adott alapgörbe, gördülő görbe és leíró pont mellett szerkeszszük meg a leíró pont valamely helyzetét (15. ábra). Ha a gördülő görbe kezdő helyzete b_0, akkor e helyzetében érinti az alapgörbét az $A_0 \equiv B_0$ pontban. Vegyük fel az alapgörbe tetszőleges A_i pontját és szerkesszük meg a leíró pont M_i helyzetét, vagyis M ama helyzetét, midőn a gördülésnél a momentán érintési pont a felvett A_i pont. Akkor először megszerkesztjük a gördülő b görbe b_0 helyzetében a B_i pontot úgy, hogy $\widehat{B_0B_i} = \widehat{A_0A_i}$ legyen, az így nyert pontban megrajzoljuk a gördülő görbe t_i^b érintőjét és végül összekötjük a B_i pontot az M_0 ponttal és jelöljük a B_i ponthoz tartozó érintőnek szögét a B_iM_0 egyenessel, φ-vel. Az M pont



15. ábra.

i-ik helyzetét ez előkészítés után úgy nyerjük, hogy az A_i pontban megszerkesztjük a t_i^a érintőt, s mivel e helyzetben a t_i^a érintő azonos lesz a t_i^b érintővel és B_i azonos lesz az A_i ponttal, a t_i^a mellé A_i csúcsponttal felmérjük a φ szöget és e szög szabad szárára felmérjük az o helyzet szerint a $\overline{B_iM_0}$ távolságot az A_i ponttól számítva, a távolság végpontja a keresett M_i pont. E pontban az M pont által leírt görbe érintője merőleges arra az egyenesre, mely a szerkesztett pontot a momentán érintési ponttal összeköti, vagyis $t_i \perp M_iA_i$.

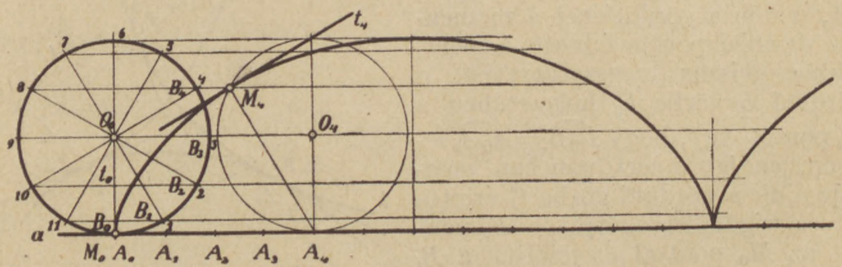
Egyes rulettták szerkesztésénél alapgörbének és gördülő görbének igen egyszerű görbéket fogunk választani, nevezetesen

a) az alapgörbe	*egyenes,*	a gördülő görbe	*kör,*			
b) «	«	*kör,*	«	«	«	*egyenes,*
c) «	«	*kör,*	«	«	«	*kör.*

9. §. A közönséges cykloisok. *Körnek egyenesen való gördülésével származtatott ruletták a közönséges cykloisok.* E cykloisok három fajtáját különböztetjük meg a szerint, hogy a leíró M pont a gördülő körnek pontja, vagy a körön kívül fekvő pont, vagy a kör belsejében fekvő pont.

1. Legyen a leíró pont a gördülő kör pontja, és tegyük fel, hogy a mozgás kezdő helyzetében $A_0 \equiv B_0 \equiv M_0$ (16. ábra). A leíró pont egyes helyzeteinek szerkesztését úgy rendezzük be, hogy a gördülő kört egyenlő részekre osztjuk, az osztó pontok rendre B_0, B_1, $B_2, \ldots$,

majd felmérjük az a alapegyenesre a gördülő kör kerületét és ezt ugyanannyi részre osztjuk, mint a gördülő kört, az osztó pontok rendre A_0, A_1, A_2,... Ha az M_4 pontot akarjuk nyerni, akkor a B_4 pont azonos lesz az A_4 ponttal, az A_4 momentán érintési pont alapján megrajzoljuk a gördülő kör 4-ik helyzetét és e körre lemásoljuk a leíró pont és B_4 pont viszonylagos helyzetét, amint az a gördülő kör kezdő helyzetében látható. Az M_4 pont szerkesztéséből megállapítható, hogy e pont úgy is nyerhető, hogy a gördülő kör kezdő helyzetében a B_4 pontra illeszkedő és az alapegyenessel parallel egyenesen meghatározzuk az A_4 ponttól $\overline{M_0B_4}$ távolságban fekvő egyik pontot, ezáltal a gördülő kör momentán középpontjának szerkesztése és megrajzolása feleslegessé válik. Az M_4 pontban az érintő az M_4A_4 egyenesre merőleges, ebből következik, hogy az érintő mindig illeszkedik a gördülő kör megfelelő momentán helyzetében a gördülő kör ama pontjára, mely pont a momentán pólus dinametrál fekvő pontja. E



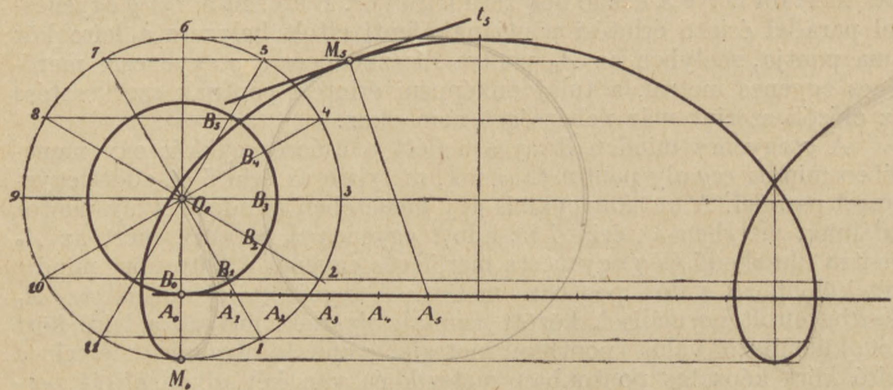
16. ábra.

megjegyzés alapján megszerkeszthetjük a cyklois érintőjét az M_0 pontban is, az érintő ekkor az alapegyenesre merőleges. A gördülő körnek M pontja által leírt görbe végtelen sok kongruens menetből tevődik össze, egy menetet akkor ír le az M pont, ha az alapegyenesen a momentán érintési pont a gördülő kör kerületével egyenlő távolságot fut be. A nyert görbének vannak pontszingularitásai, a görbének végtelen sok csúcspontja van, más szingularitása nincs. Ezért ezt a közönséges cykloist csúcsos cykloisnak mondjuk.*

2. Gördüljön kör egyenesen, de legyen a leíró pont a gördülő körön kívül (17. ábra). A gördülés kezdő helyzetében vegyük fel az M leíró pontot, melynek jele akkor M_0, az O_0A_0 egyenesen. A cykloïs gyors és pontos szerkesztése végett bevezetünk egy ú. n. leíró kört, e kör gördülő körrel koncentrikus és a leíró ponton megy keresztül. Egy-egy pontnak és a pontban az érintőnek szerkesztése helyett, ami különösebb nehézséget úgysem okoz, megbeszéljük a cykloïs pontjainak rövidített szerkesztését. A gördülő kört beosztjuk 12 egyenlő részre, majd felmérjük az alapegyenesre A_0 ponttól számítva a gördülő kör kerületét és ezt is felosztjuk 12 egyenlő részre, így nyerjük a B_0, B_1, B_2,... és A_0, A_1 A_2,... pontokat, végül a leíró kört is beosztjuk 12 egyenlő

* A csúcsos cykloïs pontjainak szerkesztése alapján közvetlenül kapjuk parameteres egyenletrendszerét. Ha az alapegyenes az abszcisszák tengelye, A_0 a koordinatarendszer kezdőpontja, t a gördülő kör elfordulási szöge, akkor $x = r\ (t - \sin t)$, $y = r\ (1 - \cos t)$.

részre, de úgy, hogy a gördülő kör egy osztópontja és a leíró kör egy osztópontja egy-egy körsugárra illeszkedő pontok legyenek. Miután a leíró kör *0, 1, 2,*... osztópontjain át az alapegyenessel parallel egyeneseket vezettünk, a cyklois pl. M_5 pontját úgy nyerjük, hogy az *5* ponton átmenő egyenesen meghatározozzuk azt a pontot, mely-

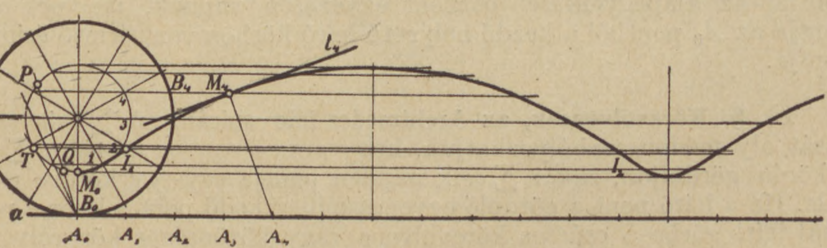


17. ábra.

nek A_5 momentán érintési ponttól való távolsága nagyságra nézve az *5* és A_0 pontok távolságával egyenlő. Indokolásul megemlítjük, hogy míg a gördülő kör a *O* helyzetből az *5* helyzetbe jut, e mozgás két komponens mozgás eredőjeként fogható fel. Az egyik komponens szerint a kezdő helyzeti gördülő- és leíró kört a közös középpont körül *360°*-nak $\frac{5}{12}$-részével kell elforgatni, a másik szerint mindkét kört a gördülő kör kerületének $\frac{5}{12}$-részével az alapegyenes irányában kell eltolni.

A nyert cyklois szintén végtelen sok kongruens menetből áll, a görbének végtelen sok duplapontja van, minden duplapontban az érintők valósak és különbözők, a görbe végtelen sok hurkot alkot, azért hurkolt cykloisnak mondjuk.

3. Végül, ha a gördülő kör belsejében választjuk a leíró pontot (18. ábra), akkor a görbe egyes pontjainak és érintőinek szerkesztését



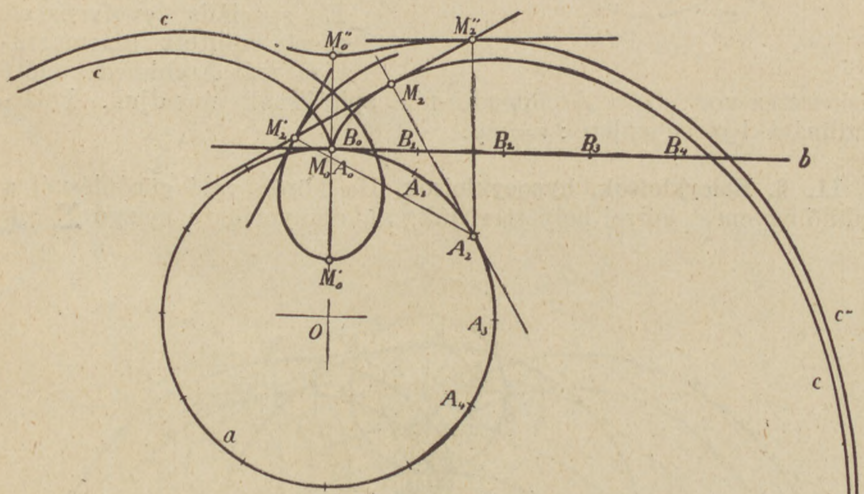
18. ábra.

ugyanúgy végezzük, mint a hurkolt cykloisnál, és ha itt is bevezetünk leíró kört, akkor az előbbi gyorsított szerkesztést itt is szószerint alkalmazhatjuk. A megszerkesztett görbe a közönséges nyujtott cyklois, e görbe végtelen sok pontjában az érintő inflexiós érintő.

A közönséges cykloisok mindegyikénél adott egyenessel parallel érintő érintési pontját is megszerkeszthetjük. Ha a cykloisoknál minden egyes pontot a pontra illeszkedő érintővel és normálissal együtt önmagával párhuzamosan eltoljuk úgy, hogy a mindenkori normálisra illeszkedő momentán érintési pont az A_0 ponttal azonos legyen, akkor eltolt helyzetben az összetartozó érintők és normálisok metszéspontjainak mértani helye a kezdő helyzetű leíró kör. E szerint adott g egyenessel parallel érintő érintési pontjának fenti eltolt helyzete a leíro kör ama pontja, melyben az A_0 pontra illeszkedő és a g egyenesre merőleges egyenes metszi, a tulajdonképpeni érintési pontnak szerkesztése az előzők szerint már nehézséget nem okoz.

A g egyenes minden iránya mellett a csúcsos cyklois egy menetében mindig *egy* oly pontot találunk, melyben az érintő az adott egyenessel parallel. A hurkolt cyklois egy menetében mindig *két* oly pontot találunk, melyben az érintő az adott egyenessel parallel, mert az A_0 pontra illeszkedő és g egyenesre merőleges egyenes a leíró kört mindig két különböző valós pontban metszi. A nyujtott cykloisnál az A_0 pontba eltolt normálisok között vannak olyanok, melyek a leíró kört két különböző valós pontban metszik, vannak olyanok, melyek a leíró kört képzetes pontokban metszik és van két olyan eltolt normális, melyek a leíró kört két szomszédos pontban metszik, ezek a leíró körnek A_0 pontra illeszkedő érintői. Legyen egy eltolt normális a leíró körnek valós szelője P, Q metszéspontokkal, akkor a nyujtott cykloisnak P és Q pontok magasságában lévő pontjaiban az érintő a felvett szelőre merőleges. Ha a PQ szelőt az A_0 pont körül forgatjuk az A_0 ponton átmenő érintő helyzete felé, akkor a P és Q metszéspontok mindig közelebb jutnak egymáshoz, végül a T pontban összeesnek. És ha az eltolt normális pillanatnyi helyzeteinek megfelelően megállapítjuk a nyujtott cyklois egy menetében a pontokat, melyekben az érintők normálisra merőlegesek, úgy azt látjük, hogy az érintők érintési pontjai a nyujtott cykloison is mindig közelebb jutnak egymáshoz, végül pedig a T pont magasságában összeesnek. Tehát a nyujtott cyklois T pont magasságában lévő pontjában két érintő összeesik, vagyis e pontban az érintő duplaérintő, de olyan duplaérintő, melyen a két érintési pont is összeesik, vagyis a duplaérintő inflexiós érintő. E szerint a nyujtot cykloisnak inflexiós pontjai az alapegyenessel parallel egyenesen vannak, melynek egy pontja az A_0 pontból a kezdő helyzetű leíró körhöz vont érintő érintési pontja.

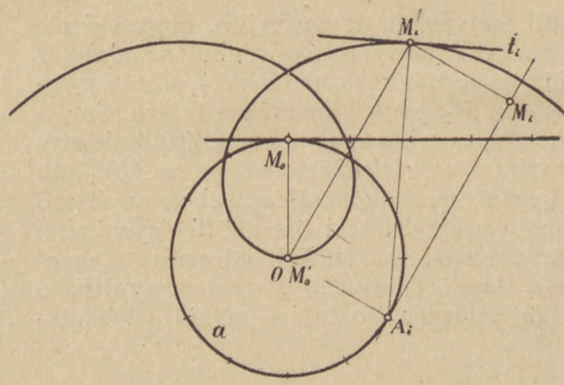
10. §. Körevolvensek, az Archimedes-féle spirális. A $\sum^x$ sík mozgását oly módon szabályozhatjuk, hogy annak egy egyenese a $\sum$ sík a körén gördüljön, ekkor $\sum^x$ sík minden pontja egy-egy körevolvenst ír le. Ha a leíró pont a gördülő egyenesre illeszkedő pont, akkor e pont által leírt görbe a csúcsos körevolvens vagy közönséges körevolvens; ha a leíró pont és az alapkör a gördülő egyenes egy oldalán vannak, akkor nyerjük a hurkolt körevolvenst; ha a leíró pont és alapkör a gördülő egyenes különböző oldalán vannak, akkor nyerjük a nyujtott körevolvenst. A három görbét egy ábrán szemléltetjük (19. ábra), a leíró pontok kezdő helyzetei M_0, M'_0, M''_0. A görbe egyes pontjainak szerkesztését úgy rendezzük be, hogy az alapkört, mondjuk, *12* egyenlő részre osztjuk, a gördülő egyenes b_0 kezdő helyzetére az A_0 ponttól számítva felmérjük az alapkör kerületét és ezt is *12* egyenló részre osztjuk. A leíró pontok második helyzeteit úgy nyerjük, hogy először megszerkesztjük az M pont második helyzetét, e végből az alapkör A_2 pontbeli érintőjére felmérjük az alapkör kerületének $\frac{2}{12}$-részét megfelelő értelemben, a nyert pont az M_2 pont, e pontban az érintőre, a gördülő egyenes második helyzetére, merőleges egyenest állítunk és erre M_2 ponttól számítva felmérjük szintén megfelelő értelemben az A_0M_0', ill. A_0M_0'' távolságot. A megszerkesztett pontok mindegyikében az érintő merőleges a pont és az A_2 momentán érintési összekötő egyenesére. Az ábrában c a közönséges körevolvens, c' a hurkolt körevolvens és c'' a nyujtott körevolvens. Ha az a alapkört hajlítható, de nem nyujtható szállal körülvesszük és azt a kör helyzetváltoztatása nélkül a kör sík-



19. ábra.

jában úgy fejtjük le, hogy a szál kifeszítve maradjon, akkor a szál minden pontja körevolvenst ír le, innen ered az evolvens elnevezés.

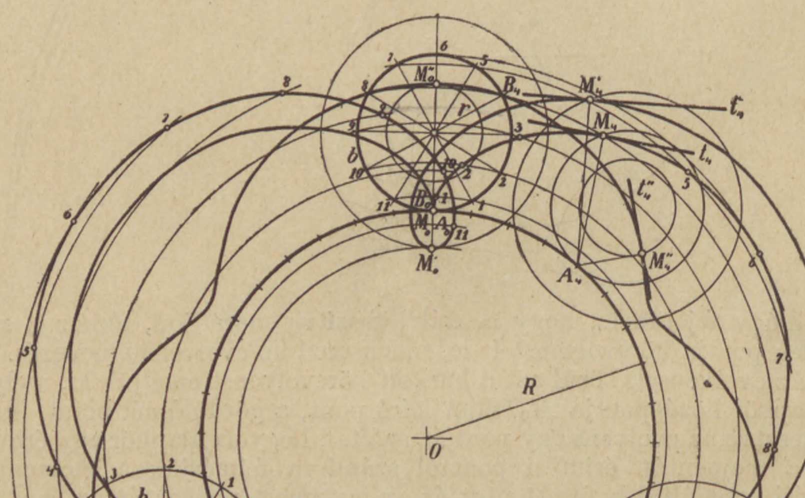
Az evolvensek közül azt a hurkolt körevolvenst emeljük ki, melyet az alapkör középpontja M_0, mint leíró pont, a gördülésnél befut. Megszerkesztve az evolvens egy pontját azáltal, hogy az alapkör egy érintőjére a momentán érintési ponttól számítva felmérjük a momentán érintési pont által befutott utat és az így nyert ponton át az érintőre merőleges egyenesre felmérjük az alapkör sugarát, a szerkesztésnél az $O, A_i, M_i\, M_i'$ pontokat szerepeltettük (20. ábra), e pontok oblongum csúcspontjai, az OM_i' oldal mindig a gördülő egyenes momentán helyzetével parallel és nagyságra nézve a momentán érintési pont által befutott úttal egyenlő. Ha az alapkör *12* egyenlő részre való osztásával szerkesztjük meg az evolvens pontjait, akkor az előbbi oblongumra való hivatkozással a görbe egyes pontjait úgy nyerjük, hogy az egyes körsugarakra egymásután a kör középpontjától számítva felmérjük az alapkör kerületének $\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \ldots$ stb. részét. Tehát ezt a speciális evolvenst úgy szerkesztjük meg, hogy egy sugársor egyenlő elosztású sugaraira a sugársor középpontjától számítva rendre egy tetszőlegesen felvett távolság *1-szeresét*, *2-szeresét*, *3-szorosát*... felmérjük, ahol a tetszőleges távolság az alapkör kerületének n-edrésze, ha a szerkesztésnél



20. ábra.

felhasznált összes félsugarak száma n. E szerkesztés alapján a görbét úgy is származtathatjuk, hogy egy egyenes egy az egyenesre illeszkedő fix pont körül egyenletes sebességgel forog és ugyanakkor a forgó egyenesen egy pont egyenletes sebességgel halad, a mozgó pont által definiált görbe a fentivel azonos evolvens. E speciális evolvensnek most említett származtatása már Archimedes előtt is ismeretes volt, azért Archimedes-féle spirálisnak mondjuk. Polárkoordinátákban egyenlete : $r = m\varphi$.

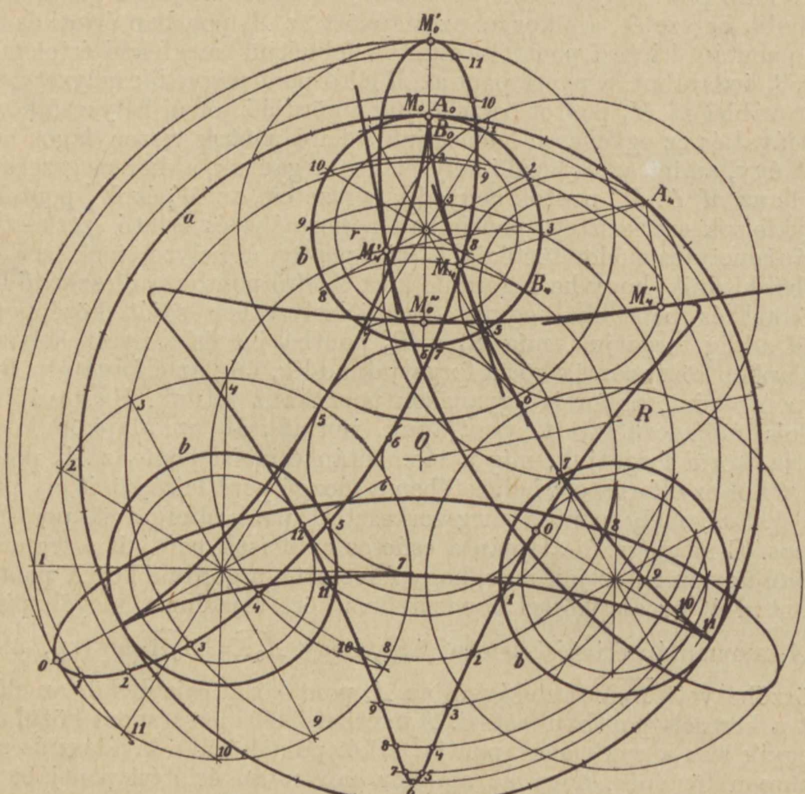
11. §. Epicykloisok, hypocykloisok. Ha körön való gördülésnél a gördülő egyenest körrel helyettesítjük, akkor nyerjük a mozgó $\sum^{x}$ sík



21. ábra.

pontjai által leírt epi-, ill. hypocykloisokat. A rulettát epicykloisnak mondjuk, ha a b gördülő kör az a alapkört kívülről érinti, ellenkező esetben hypocykloisnak. Úgy az epi-, mint a hypocykloisoknak három fajtáját különböztetjük meg, a közönséges vagy csúcsos, a hurkolt és nyujtott epi-, ill. hypocykloist.

Legyen az a alapkör sugara R, a gördülő kör sugara r és tegyük fel, hogy $R=3r$. A cykloisok szerkesztése szempontjából mindegy, hogy a gördülő kör az alapkört kívülről (21. ábra) vagy belülről (22. ábra)



$R : r = 3 : 1$

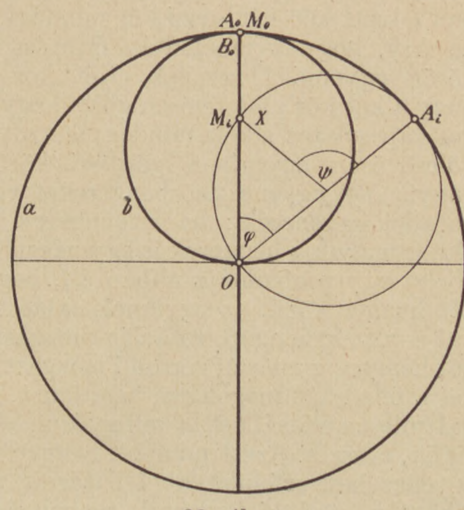
22. ábra.

érinti. A gördülő kört egyenlő részekre osztjuk és egy ily rész ívdarabjával egyenlő ívdarabot állapítunk meg az alapkörön. Ha $R=3r$, akkor az alapkör kerülete a gördülő kör kerületének háromszorosa s így a jelen esetben a gördülő körön felvett ívdarabbal egyenlő ívdarabot az alapkörön úgy nyerünk, hogy az alapkör kerületének harmadrészét annyi egyenlő részre osztjuk, ahány részre a gördülő kört osztottuk. Amennyiben az alapkör és gördülő kör sugarainak viszonya nem racionális, akkor csak közelítő szerkesztéssel állapíthatjuk meg a körökön az egyenlő ívdarabok végpontjait. Itt mindjárt az egyenlő ívdarabok felmérésével kapcsolatban megemlíthetjük, hogy az R és

r viszonyának racionális értéke mellett a cykloisok meneteinek száma véges, a cyklois zárt görbe, ellenkező esetben a menetek száma végtelen, a cyklois nyitott.

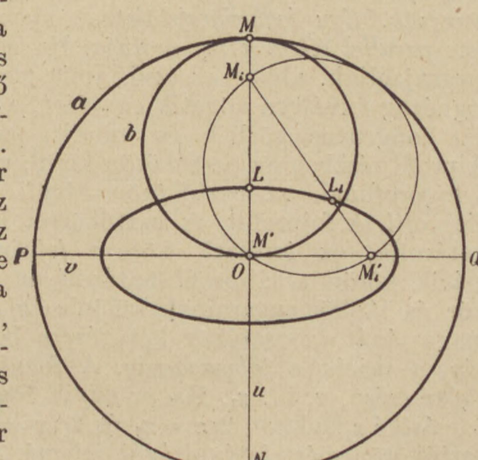
A gördülés kezdő pillanatában érintse a gördülő kör az alapkört az $A_0 \equiv B_0$ pontban és legyenek a gördülő kör B_0 pontjára illeszkedő körsugáron az egyes leíró pontok kezdő helyzetei M_0, M'_0, M''_0, e pontok közül egy a gördülő kör pontja, egy e körön kívül fekvő pont és egy a kör belsejében felvett pont. Ha meg akarjuk szerkeszteni minden egyes leíró pont negyedik helyzetét, akkor megrajzoljuk a gördülő kör negyedik helyzetét, amikor az az alapkört az A_4 pontban érinti és erre a momentán érintési ponttól számítva felmérjük megfelelő értelemben a B_0B_4 ívdarabot, a nyert pont az M leíró pont negyedik helyzete, M_4. Ha továbbá az M_4 pontot összekötjük a gördülő kör új helyzetű középpontjával és ez egyenesen lemásoljuk a leíró pontok viszonylagos helyzetét úgy, amint azt a kezdő helyzetben megadtuk, akkor megszerkesztettük az M' és M'' pontok negyedik helyzeteit, az M'_4 és M''_4 pontokat. A cykloisok szerkesztett pontjaiban a normális és érintő szerkesztése a már ismeretes módon történik. A leíró pontok új helyzeteinek szerkesztéséből kitűnik, hogy ha a gördülő kört a leíró pontokra illeszkedő leíró körökkel és pontokkal együtt kezdő helyzetben saját középpontja körül addig forgatjuk, míg B_4 a B_0 pontba jut és a nyert helyzetet az alapkör középpontja körül forgatjuk addig, míg az elforgatott B_4 az A_4 pontba jut, akkor is ugyanazon pontokhoz jutunk. Ha továbbá a cyklois megszerkesztett pontjának normálisát az alapkör középpontja körül forgatjuk, míg a momentán érintési pont az A_0 pontba jut, akkor ez elforgatott helyzetében a mozgó pont leíró körét oly pontban metszi, mely pont a megszerkesztett pont elforgatott pontjával azonos. E megjegyzés alapján a csúcsos cykloisok pontjait a legpontosabban úgy szerkesztjük meg, hogy felvesszük a gördülő kör X pontját, e ponton át az alapkörrel koncentrikus kört rajzolunk, megállapítjuk az A_i momentán érintési pontot úgy, hogy $\widehat{A_0X} = \widehat{A_0A_i}$ legyen, akkor a körzőbe vett $\overline{A_0X}$ távolsággal az A_i pont körül rajzolt kör az előbbi kört a keresett pontban metszi. A nyerhető két metszéspont közül csak az egyik lesz a cykloisnak pontja, a két pont közül a kiválasztás azon az alapon történik, hogy az alapkör momentán érintési pontjában az érintő és normális viszonylagos helyzete ugyanaz, mint az A_0 pontban az érintő és A_0X egyenes viszonylagos helyzete.

Érdekes és a gyakorlat szempontjából is fontos hypocykloist nyerünk akkor, ha az alapkör sugara a gördülő kör sugarának kétszerese. Ekkor a leíró pontot a gördülő körön választva, a pont pályagörbéje egyenes, mely egyenes az alapkörnek a leíró pontra illeszkedő körátmérője. Ennek bizonyítására vegyük fel az O középponttal az R sugarú a alapkör és az r sugarú b gördülő kör kezdő helyzetét, $A_0 \equiv B_0$ a momentán érintési pont kezdő helyzete és ugyanaz a pont legyen a leíró M pont kezdő helyzete M_0 (23. ábra). Ha feltesszük, hogy a gördülőkör i-ik helyzetében az alapkört A_i pontban érinti, akkor állításunk szerint e körnek O-tól különböző X metszéspontja az M_0O egyenessel az M leíró pont i-ik helyzetével azonos pont, M_i. A gördülésnél a momentán érintési pont által befutott utak az alapkörön és a gördülő körön egyenlők, tehát a jelen esetben azt kell bizonyítani, hogy az a alapkör $\widehat{A_0A_i}$ íve egyenlő a gördülő kör $\widehat{A_iX}$ ívével. Ha az $\widehat{A_0A_i}$ ív középponti szöge φ, az $\widehat{A_iX}$ ív középponti szöge ψ, akkor $\widehat{A_0A_i}=R\varphi$ és $\widehat{A_iX}=r\psi$. De feltételünk szerint $R=2r$, továbbá a b gördülő kör i-ik helyzetében φ az $\widehat{A_iX}$ ívhez tartozó kerületi szög, míg ψ ugyanazon ívhez tartozó középponti szög, vagyis $\varphi=\frac{\psi}{2}$, de akkor $R\varphi=2r\cdot\frac{\psi}{2}=r\psi$, amit be kellett bizonyítani, így kimondhatjuk, hogy $X\equiv M_i$. A gyakorlat szempontjából a hypocyklois most tárgyalt esete azért fontos, mert evvel gördülő elemekkel egyenesmenti mozgást létesíthetünk. Itt még csak azt kívánjuk megjegyezni, hogy az M leíró pont, ha a gördülő kör egyenletes sebességgel gördül, harmonikus mozgást végez, mert ekkor a momentán érintési pont az alapkörön egyenletes sebességgel halad és a leíró pont mindenkori momentán helyzete a momentán érintési pontnak orthogonális projekciója azon az egyenesen, melyet a leíró pont befut.



23. ábra.

Legyen megint az alapkörön belül gördülő kör sugara az alapkör sugarának fele, és figyeljük meg ekkor a gördülő kör két diametrál fekvő pontjainak pályagörbéit (24. ábra). Ha a leíró pontok M és M', akkor a rajz szerint az M pont útja az alapkör MN átmérője, míg az M' pont útja az előbbi átmérőre merőleges PQ átmérő, szóval a gördülő kör oly mozgást végez, hogy egy átmérőjének két végpontja két egymásra merőleges egyenest fut be. Merev $\sum^{\times}$ síkbeli rendszer e mozgását már példaképpen a 6. §-ban tárgyaltuk és ott kimutattuk, hogy a mozgó MM' egyenesre illeszkedő minden pont pályagörbéje ellipszis, s így nem kell külön bebizonyítani, hogy a gördülő körre nem illeszkedő L leíró pont útja ellipszis.



24. ábra.

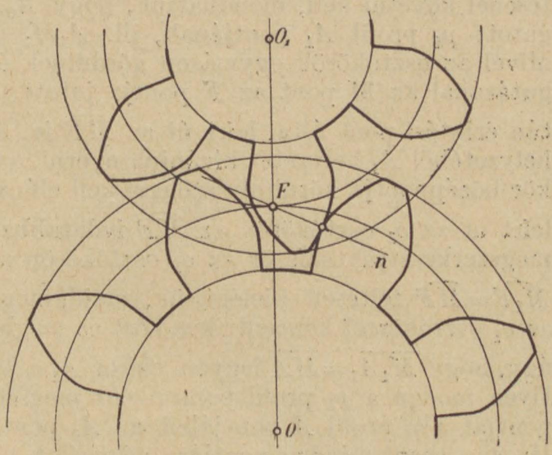
12. §. Homlokkerekek. A cykloisok és evolvensek a gyakorlatban alkalmazást nyernek a fogaskerekeknél. Itt természetesen nem foglalkozhatunk a fogaskerekek elméletével, csak arra fogunk szorítkozni, hogy a cykloisok és evolvensek szerepét bemutassuk a legegyszerűbb fogaskerekeknél, az ú n. homlokkerekeknél.

Körnek körön való gördülésénél feltettük azt, hogy a körök közü az egyik fix, míg a másik mozgó görbe. Most feltesszük azt, hogy egy síkban felvett két érintkező kör mindegyike saját középpontja körül forog, de úgy, hogy a momentán érintési pontok által leírt utak mindkét körön egyenlők legyenek. Két kör ilyen mozgásáról azt mondjuk, hogy a két kör kölcsönösen gördül egymáson. E szerint a gördülő körökkel kapcsolatos síkok mindegyike rotációs mozgást végez. Legyenek a kölcsönösen egymáson gördülő körök forgási hengerek nyomkörei, vagyis oly egyenes körhengereket vezetünk be, melyeknek tengelyei parallel egyenesek ; ha e hengerek nyomkörei egymáson gördülnek, akkor maguk a hengerek is egymáson gördülő mozgást végeznek. A gyakorlat egy problémája abban áll, hogy a valamilyen anyagból készült két henger közül az egyiknek saját tengelye körüli rotációs mozgásával a másik hengert rotációs mozgásra kényszerítsük, de úgy, hogy a két henger egymáson gördülő mozgást végezzen. Síma felületű hengerekkel a feladatot megoldani nem lehet, mert mihelyt az egyik hengernek valamilyen ellenállást le kell győzni, akkor a másik forgó henger az elsőn siklik, csúszik. Azért mindkét hengerfelületet fogakkal látjuk el, e fogak egyenes hengerfelületekkel határolt testek, melyeknél minden felületi alkotó a gördülő hengerek tengelyeivel parallel. *Két parallel tengelyű fogaskerékről, melyek között kényszerkapcsolat van (vagyis amikor az egyik kerék forgása kikényszeríti a másik kerék forgását) és melyeken a fogak határfelületei hengerfelületek, azt mondjuk, hogy homlokkerekek. A gördülő hengerfelületeket osztófelületeknek és a gördülő nyomköröket osztóköröknek nevezzük. Egy foghengerfelületnek nyomgörbéje az osztókör síkján vagy vele parallel síkon a fog profilja.* Ha egy fogkoszorú fogainak profiljait megrajzoljuk, akkor az első, amit megállapíthatunk, az, hogy fog és foghézag felváltva követik egymást, az összes fogprofilok egy koszorúnál kongruens görbék és minden profilnak van szimmetriatengelye. A profil részben az osztókörön kívül, részben az osztókörön belül van ; a fogprofilnak az osztókörön kívüli része *fejprofil*, a másik rész a *lábprofil*. A fejprofilt az osztókörrel koncentrikus kör egy ívdarabja határolja, ez ívrészek köre a *fejkör ;* az osztókörrel koncentrikus másik körön a lábprofil határolását találjuk, e kör a *lábkör*. A fejkör és lábkör sugarainak különbsége a *fog magassága*, jele : c. A fog magasságát az osztókör két részre bontja, az egyik rész a *fejmagasság*, a másik a *lábmagasság*. A fogak száma mindkét fogaskeréknél egész szám, z, ill. z_1. Ha az egyik fogaskerék osztókörének sugara r, a másiké r_1, akkor $2r\pi = z_1$ és $2r_1\pi = z_1 t$, ahol t két szomszédos fog az osztókörön mért ívtávolságát jelenti. A t mindkét osztókörön egyenlő, mert a két osztókör egymáson gördülő mozgást végez, a t ívtávolságot a *fogaskerék osztásának mondjuk*. A gyakorlatban a t osztás helyett a *modulusszal* szokás számítani, ahol a modulusz $s = \dfrac{t}{\pi}$, amiből következik, hogy a fogszámnak és modulusznak szorzata az osztókör átmérőjével egyenlő.

Kevésbbé gondosan megmunkált fogaknál szokásban van, hogy

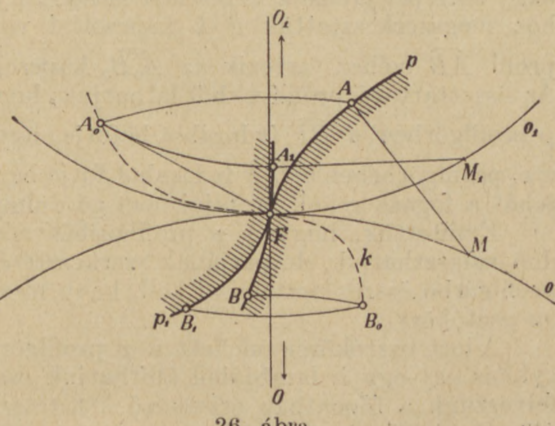
a fej magassága, $c_f = s$ *vagy* $0{\cdot}3t$,
a láb magassága, $c_l = 1{\cdot}25s$ « $0{\cdot}4t$,
a fog magassága, $c = 2{\cdot}25s$ « $0{\cdot}7t$,
a fog vastagsága az osztókörben, $a = 1{\cdot}5s$ *vagy* $\frac{19}{40}t$.

A fogprofil alakja akkor helyes, ha az osztókörök csúszás nélküli gördülése biztosítva van, ez pedig akkor van biztosítva, ha egy igen egyszerű geometriai szabályt betartunk, mely szerint helyes fogprofiloknál az érintkezés pillanatában a profilpontok közös normálisa mindig az F főponton megy keresztül, ahol a főpont az osztókörök érintési pontja* (25 ábra).



25. ábra.

Mivel helyes fogprofilnál csak a fenti szabályt kell betartani, az egyik fogaskerék fogprofilját némi korlátok között szabadon választhatjuk, de akkor a másik fogaskerék profilja meg van határozva. Legyen az egyik fogaskerékhez tartozó osztókör o, középpontja O és az e kerékhez tartozó tetszőlegesen felvett fogprofil p, ugyanúgy legyen a másik fogaskerék osztóköre o_1, középpontja O_1. A főpont F az OO_1 centrálison az osztókörök közös pontja. Az adott p profilt úgy vettük fel, hogy egy pontja a főpont legyen (26. ábra). Az adott profil alapján a másik kerék p_1 fogprofil ama helyzetét fogjuk szerkeszteni, amikor a két profil momentán érintési pontja a főpont. Az adott és szerkesztendő profilok pontjait párokba foglaljuk. az egyik profil A pontjának párja az az A_1 pont, melyben a két profil az osztókörök egymáson való gördülésénél érintkezni fog. Messe a p profil A pontbeli normálisa saját o osztókörét az M pontban. ha az MA normálist az O pont körül úgy forgatjuk



26. ábra.

* Hermann Miksa: Gépelemek, 439—453. old.

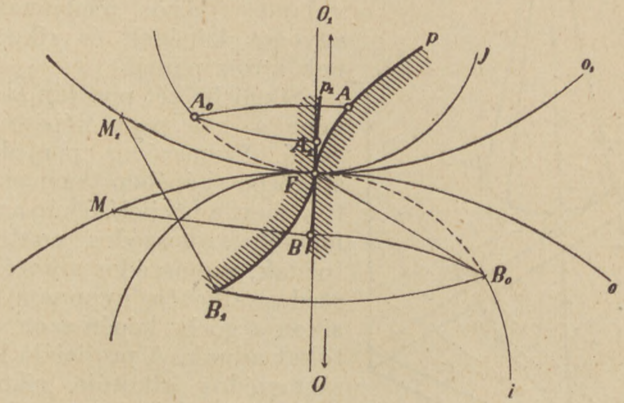
el, hogy az M pont a főponttal azonos pont legyen, akkor az A pont meghatározott helyzetbe jut, e pozícióban jele A_0. Az A_0 pontot legegyszerűbben úgy szerkesztjük meg, hogy az o osztókörrel koncentrikus és az A ponton átmenő körön meghatározzuk azt a pontot, melynek távolsága az F ponttól az MA távolsággal egyenlő. Ha az egész p profilt ugyanazon szöggel gondoljuk az O pont körül elforgatva, amilyen szöggel most az MA normálist elforgattuk, akkor e helyzetében az elforgatott A_0 pontbeli normális a főponton megy keresztül. Hivatkozással a geométriai szabályra, melyet helyes fogprofilok szerkesztésénél követni kell, mondhatjuk, hogy A_0, ill. A_0F egyúttal az elforgatott p_1 profil A_1 pontjának, ill. A_1M_1 normálisának elforgatottja. Mivel az osztókörök egymáson gördülnek és a p profil tárgyalt elforgatásánál az M pont az F pontja jutott, az o osztókörön a momentán érintési pont által leírt út az $\widehat{MF}$ ív. Amennyiben az A_1 pont A_0 helyzetéből A_1 helyzetét kívánjuk nyerni, az A_0F normálist az o_1 osztókör középpontja körül oly szöggel kell elforgatni, hogy az F pont által leírt út az o_1 osztókörön az $\widehat{MF}$ ívdarabbal legyen egyenlő. E szerint megszerkesztjük először az o_1 osztókörön az M_1 pontot úgy, hogy az $\widehat{M_1F}=\widehat{MF}$ feltételt kielégítsük, majd megrajzoljuk az A_0 ponton át az o_1 osztókörrel koncentrikus kört és meghatározzuk e kör A_1 pontját úgy, hogy $\overline{M_1A_1}=\overline{MA}$ legyen, ekkor A_1 a keresett p_1 profil egy pontja. Ilyen módon a p_1 profil pontonként megszerkeszthető. A p_1 profil A_1 pontját a p profil A pontjából az A_0 pont közbeiktatásával nyertük. Ha a p profil minden pontjára nézve ezt a közbeiktatott pontot megszerkesztjük, akkor e pontok mértani helye a fogaskerekek elméletében nagy szerepet játszó *k kapcsolási vonal.* Az ábrában az adott p profilhoz megszerkesztettük a k kapcsolási vonalat és a p_1 profilt. A p profil $\widehat{AB}$ ívéhez tartozik az $\widehat{A_0B_0}$ kapcsolási ív és az $\widehat{A_1B_1}$ profilív. Az összetartozó profilívekből láthatjuk, hogy míg a kapcsolási pont a p profilgörbén a $\widehat{BF}$ ívdarabot befutja, ugyanakkor a kapcsolási pont a p_1 profilgörbében a $\widehat{B_1F}$ ívdarabot futja be, ezek az ívek nem egyenlők, tehát a fogaskerekek profiljai nem gördülnek egymáson.

Említettük, hogy a p profilgörbét némi korlátok között szabadon választhatjuk, de párjának szerkesztéséből kitűnik, hogy az adott profilgörbe összes normálisai kell, hogy messék vagy legalább érintsék az osztókört.

Adott osztókörök mellett a p profilgörbét egy epi- és egy hypocyklois egy-egy ívdarabjából állíthatjuk össze. Az osztókörökön kívül felveszünk a főpontban érintkező két tetszőleges i és j gördülő kört (27. ábra). Ha j gördül az o osztókörön, akkor az F pont által leírt közönséges epicyklois F-től A-ig terjedő része lehet a p fogprofil fejrésze, és ha ugyanakkor az i gördülő kör szintén az o osztókörön gördül, akkor az ugyancsak F pont által leírt közönséges hypocyklois F-től B-ig terjedő része lehet a p fogprofil lábrésze. Ha ekkor megszerkesztjük a k kapcsolási görbét, akkor eredményképpen azt nyerjük, hogy a kapcsolási görbe a gördülő körök ívdarabjaiból tevődik össze ; továbbá az o_1 osztókörhöz tartozó p_1 fogprofil fejgörbéje ama epicykloisnak része, melyet az F pont leír az i körnek az o_1 osztókörön való gördülésénél, míg lábgörbéje ama közönséges hypocykloisnak része, melyet ugyancsak az F pont leír a j körnek az o_1 osztókörön való gördülésénél.

Fogaskerék, melynél a fog profilja cyklois ívekből tevődik össze, *cykloidális fogazású.*

Adott osztókörök mellett a p profilgörbe közönséges körevolvens is lehet. Ekkor felveszünk a főpontra illeszkedő oly k egyenest, mely a centrálissal φ szöget alkot. Nálunk φ szokásos nagyaága 75°.



27. ábra.

A profil megrajzolásához még felvesszük az a és a_1 alapköröket, e körök az osztókörökkel koncentrikus helyzetben vannak és a k egyenest érintik. Ha a k egyenes az a alapkörön gördül, akkor a főpont által leírt közönséges körevolvens a p profil. Megszerkesztve a kapcsolási görbét, azt nyerjük, hogy jelen esetben a kapcsolási görbe a gördülő k egyenessel azonos egyenes, míg a p profilgörbe párja p_1 ugyancsak közönséges körevolvens, melyet az a_1 alapkörön a gödrülő k egyenes F pontja leír. Fogaskerék, melyen a fog profilja közönséges körevolvens, *evolvenciális fogazású.*

Síkgörbék ábrázolása.

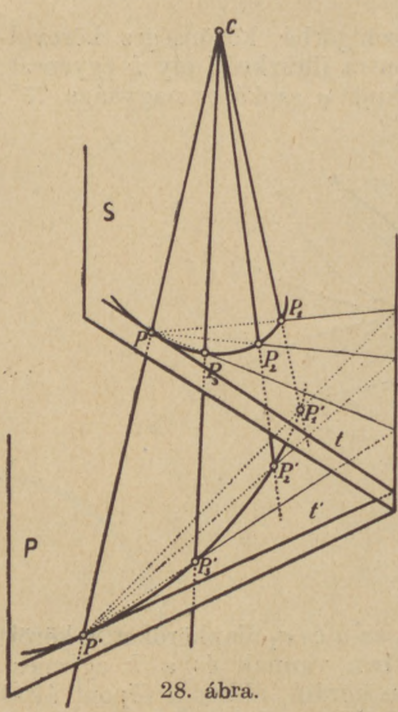
13. §. Síkgörbe képe. Tekintsük a síkgörbét pontalakzatnak, akkor a *síkgörbe képén értjük a síkgörbére illeszkedő pontok képeinek összességét.* A síkgöbe pontjaira illeszkedő vetítősugarak, ha a vetítés végesben fekvő pontból történik, összességükben görbe felületet szolgáltatnak, ezt a felületet *kúpfelületnek* mondjuk. A vetítési középpont a kúpfelület *csúcspontja,* a vetített síkgörbe a kúpfelület egy *vezérgörbéje,* míg a görbe pontjaira illeszkedő vetítősugarak a kúp *alkotói.* Ha a vetítés végtelenben fekvő pontból történik, akkor a vetítősugarak által leírt felület *hengerfelület,* a síkgörbe a hengerfelület egy *vezérgörbéje,* a vetítősugarak a hengerfelület *alkotói,* a hengerfelület alkotói parallel egyenesek. A síkgörbe pontjaira illeszkedő vetítősugarakból álló kúp, illetve henger a síkgörbe *projiciáló kúpja,* illetve *hengere* (28., 29. ábra).

Kúp, ill. henger alkotóinak nyompontjai tetszőleges síkon összességükben síkgörbét adnak, e síkgörbe a kúp, ill. henger síkmetszete.

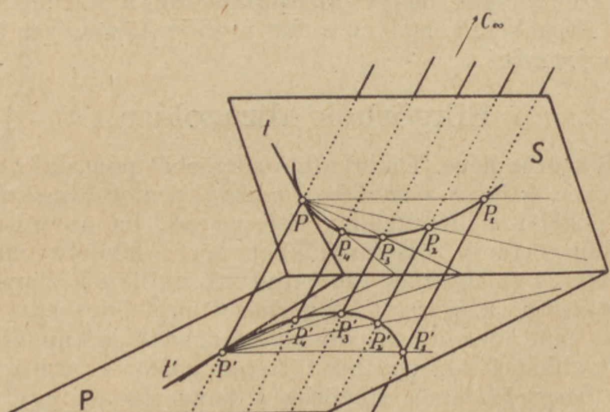
E szerint mondhatjuk, hogy *síkgörbe képe a síkgörbe projiciáló kúpjának, ill. hengerének síkmetszete a képsíkkal.*

Síkgörbe rendszámának meghatározásából és a görbe képének szerkesztéséből önként adódik, hogy *a síkgörbe képének rendszáma mindig egyezik az eredeti síkgörbe rendszámával,* mert a síkgörbe és a síkgörbe síkjában felvett tetszőleges egyenes valamely közös pontjának képe az egyenes képének és síkgörbe képének közös pontja

Síkgörbe két pontján átmenő szelő képe a két pont képére illeszkedő szelő. Szomszédos pontok képei a síkgörbe képében szomszédos pontok, mert a projiciáló kúp azon alkotói, melyek szomszédos pontokhoz tartoznak, szomszédos alkotók és szomszédos alkotók nyompontjai a képsíkon a görbe képén szomszédos pontokat adnak. A projiciáló kúpnak két szomszédos alkotója síkot határoz meg, e sík két nem szomszédos alkotó összekötő síkjának határhelyzete e sík nyomvonala az eredeti síkgörbe síkján a síkgörbe egy érintője és e sík nyomvonala a képsíkon a görbe képének érintője, mert az érintőnek mondott egyik egyenes az eredeti síkgörbe két szomszédos pontjának összekötő egyenese, míg a másik egyenes a szomszédos pontok képeinek összekötő egyenese.



28. ábra.



29. ábra.

Mindezekből következik, hogy: *Síkgörbe valamely P pontjához tartozó t érintőjének képe a síkgörbe képében ama ponthoz tartozó érintő, mely pont az eredeti érintési pont képe.*

14. §. Kúp- és hengerfelület érintősíkja. *A projiciáló kúpnál az a sík, mely a vezérgörbe érintőjének és az érintési ponthoz tartozó alkotónak összekötő síkja, a kúp egy érintősíkja, ahol a vezérgörbén az érintő érintési pontja egyúttal az érintősík és kúpfelület érintési pontja.* Ha tekintetbe vesszük egyrészt azt, hogy a projiciáló kúp adott vetítési középpont mellett nem változik, ha az eredeti vezérgörbét bármely a kúp csúcsára nem illeszkedő képsíkon lévő képgörbéjével helyettesítjük, másrészt azt, hogy ha a képgörbe valamely pontjához tartozó kúpfelületi érintősíkot ugyanúgy definiáljuk, mint a vezérgörbe egy pontjában, mondhatjuk, hogy egy alkotó különböző pontjaihoz tartozó érintősíkok nem különböznek egymástól, vagyis *a kúp, ill. henger érintősíkja a kúpot, ill. hengert mindig egy egész alkotó mentén érinti.* A nyert eredménnyel azonos eredményt nyerünk akkor is, ha a kúp érintősíkját az egy alkotóra illeszkedő szelősíkok határhelyzeteként határozzuk meg ; egy-egy szelősík jellemezve van az alkotóval, mely mentén az érintősíkot nyerni akarjuk és a vezérgörbe, ill. képgörbe azon szelőjével, melynek egyik pontja az alkotó és vezérgörbe, ill. az alkotó és képgörbe közös pontja. Már most, ha a vezérgörbe tetszőleges szelőjének megfelelője a képsíkon a szelő képe, akkor megfelelő szelőkre illeszkedő síkok a kúp szelősíkjai. Mivel pedig megfelelő szelők határhelyzetei megfelelő érintők, ebből következik, hogy akár a vezérgörbe, akár a képgörbe szelőinek felhasználásával állapítjuk meg a szelősík határhelyzetét, mindkét esetben a határhelyzet ugyanazon síkhoz vezet.

A kúp minden szelősíkja a kúp legalább két alkotójára illeszkedő sík. *A határhelyzetű szelősíkban a szelősíkra illeszkedő két kúpalkotó a kúp két szomszédos alkotója, a két szomszédos alkotó összekötő síkja a kúp érintősíkja.*

15. §. Pontgörbe és sugárgörbe térbeli duál alakzatai. Minden pontgörbét pontok, minden sugárgörbét sugarak mértani helyeként foghatunk fel. Ha a pontgörbét v'gesben, ill. végtelenben fekvő pontból projiciáljuk, akkor a nyert kúp, ill. henger egyenesek, az alkotók, mértani helye, ha pedig sugárgörbét projiciálunk valamely centrumból, akkor vetítősíkok mértani helyét kapjuk, e vetítősíkok érintősíkjai annak a kúpnak, melyet a vetítősíkok burkolnak.

A síkgörbe síkbeli rendszer, a kúp, ill. henger pontbeli rendszer egy-egy alakzata. A síkgörbe és a kúp oly geometriai alakzatok, melyek a térbeli dualitás szerint megfelelő alakzatok ; a pontgörbének térbeli duálja az érintősíkok által burkolt kúp, míg a sugárgörbének duálja alkotóinak összességéből álló kúp. Ebből következik, hogy a pontgörbe pontjaira vonatkozó helyzetgeometriai tétel duál fogalmazása a projiciáló kúp érintősíkjainak egy tételét fejezi ki, és sugárgörbe sugaraira vonatkozó tétel duál fogalmazása a projiciáló kúp alkotóira vonatkozó tételt fejezi ki.

16. §. Kúp síkmetszete. Mikor síkgörbe tetszőleges síkon lévő képgörbéjét vizsgálat tárgyává tettük, akkor a görbe projiciáló kúpjának a képsíkkal való síkmetszetét tanulmányoztuk. Ha képsík helyett metszősíkot mondunk, akkor *a vezérgörbe képgörbéje a metszősíkon a kúpfelület és metszősík síkmetszete.* E szerint a kúp síkmetszete, mint pontgörbe, ama pontok összessége, melyekben a kúpalkotók a metszősíkot metszik ; a síkmetszet, mint sugárgörbe, ama sugarak összessége, melyekben a kúp érintősíkjai a metszősíkot metszik. Ezek alapján mondhatjuk, hogy *kúpfelület bármely síkmetszetének tetszőleges pontjában az érintőt úgy szerkesztjük meg, hogy meghatározzuk a kérdéses ponthoz tartozó kúpalkotómenti érintősíknak és metszősíknak metszésvonalát.*

17. §. Perspektív síkgörbék. Síkgörbe és a síkgörbe projiciáló kúpja a térben perspektív alakzatok, ha a síkgörbe pontjának a rajta keresztülmenő kúpalkotót és a síkgörbe érintőjének a rajta keresztülmenő kúpfelületi érintősíkot feleltetjük meg. Síkgörbe és projiciáló kúp perspektív helyzetéből következik, hogy a síkgörbe egy-egy szingularitásának a kúpfelület egy-egy szingularitása felel meg. Így, ha a síkgörbének duplapontja van, akkor a duplapontra illeszkedő kúpalkotó a kúpnak duplaalkotója, vagy ha a síkgörbének inflexiós érintője van, akkor a kúpfelületnek ez érintőre illeszkedő érintősíkja inflexiós érintősík stb.

Ugyanazon kúp két síkmetszete a térben perspektív helyzetben van, ha a síkmetszeteknek ama pontjai megfelelők, melyek a kúp egy és ugyanazon alkotójára illeszkednek, továbbá a síkmetszetek ama érintői megfelelők, melyek a kúp ugyanazon érintősíkjában vannak ; ezt úgy is mondhatjuk, hogy a síkmetszetek perspektivitását a kúp közvetíti, ahol megfelelő pontok összekötő egyenesei a kúp csúcspontjára, a perspektivitás centrumára illeszkedő egyenesek, és megfelelő szelők, érintők metszéspontjai a metszősíkok közös egyenesére, a perspektivitás tengelyére illeszkedő pontok. Kúp két síkmetszetének e kollineár vonatkoztatásából következik, hogy *két síkmetszet centrális képe valamely képsíkon centrális kollineációban megfelelő görbék. A kollineáció centruma a kúp csúcspontjának képe, a tengelye a metszősíkok közös egyenesének képe.* Feltételezett parallel projekció mellett a centrális kinolleáció ellentengelyeit úgy nyerjük, hogy a kúp csúcspontján átmenő és a metszősíkokkal parallel síkokat vezetünk, e síkok a metszősíkokat ama végesben fekvő egyenesekben metszik, melyeknek képei a keresett ellentengelyek.

Kúp két síkmetszetére vonatkozó eddigi vizsgálatokból már megállapíthatjuk azt, hogy e vizsgálatok eredményei teljes kongruenciában vannak azokkal az eredményekkel, melyeket az I. kötetben gúlafelület két síkmetszetére nézve nyertünk. Erre való hivatkozással mondhatjuk, hogy ha a kúp két síkmetszete közül az egyiket a két metszősík közös egyenese körül a másik metszet síkjába forgatjuk, akkor az egy síkban fekvő síkgörbék centrális kollineár vonatkozásban lévő alakzatok. E centrális kollineáció meghatározó adatait ugyanúgy szerkesztjük meg, mint a gúlánál. Továbbá hengerfelület különböző síkmetszeteinek parallel képei axiális affinitásban lévő alakzatok és ha két síkmetszet közül az egyik síkmetszetet a két metszősík közös egyenese körül a másik metszet síkjába forgatjuk, akkor az utóbbi síkban ugyancsak axiális affin vonatkozású síkgörbéket nyerünk.

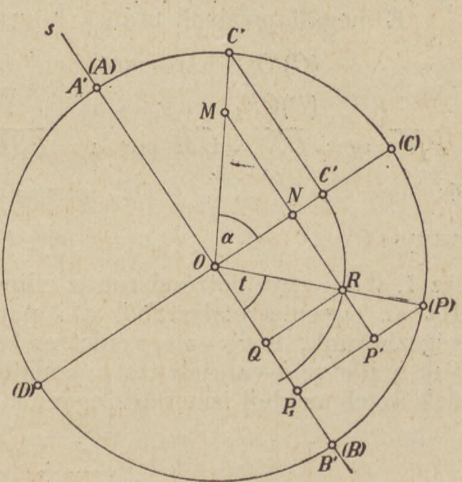
18. §. Kör orthogonális parallel projekciója. Kör orthogonális projekciója, melynek síkja nem vetítősík, másodrendű görbe vonal, mert az eredetiként felvett síkgörbe, a kör, szintén másodrendű görbe vonal.

A kör minden pontja végesben fekvő pont és minden végesben fekvő pont orth. képe végesben fekvő pont, ebből következik, hogy *a kör képe oly másodrendű görbe vonal, melynek minden pontja végesben fekvő pont, tehát általában ellipszis.* Kör orth. parallel képe csak akkor kör, ha síkja a képsíkkal parallel. (L. I. 95. §.)

Kör tetszőleges húrjának képe a kör képében, röviden az ellipszisben, húr. Mivel parallel projekcióban távolság felezési pontjának képe a képtávolság felezési pontja, minden körátmérőnek képe az ellipszisben oly húr, melynek felezési pontja a kör középpontjának képe. Szóval a kör középpontjának képe e képre illeszkedő összes ellipszis húroknak felezési pontja, ilyen pont csak egy van, ez az ellipszis középpontja. *Tehát a kör minden átmérőjének képe a kör képének átmérője, a kör középpontjának képe a kör képének középpontja,* természetesen csak akkor, ha a kör orth. vagy klin. parallel projekciójáról van szó. A körátmérők képtávolságai különböző nagyságúak. Orthogonális parallel projekcióban annak az átmérőnek képe a legnagyobb, mely körátmérőnek egyenese a képsíkkal parallel, tehát a kör síkjának fővonala vagy nyomvonala, utóbbi esetben a kör középpontja a sík nyomvonalára illeszkedő pont ; és annak a körátmérőnek képe a legkisebb, mely körátmérőnek egyenese a kör síkjának esésvonala.

Mielőtt a kör orth. projekciójának tényleges szerkesztésére áttérnénk, megjegyezzük azt, hogy az r sugarú kör képe alakjára és tulajdonságaira nézve nem változik, feltéve, hogy a kör síkjának és képsíknak viszonylagos helyzetén nem változtatunk, ha a kört síkjában tetszőleges helyre elmozdítjuk, mert a körre alkalmazott transzláció a kör képére is csak transzlációt jelent.

Az előrebocsátott megjegyzések után áttérhetünk a kör orth. képének szerkesztésére. Legyen a képsík a rajz síkja, ezen felveszszük a kör síkjának nyomvonalát, az s egyenest (30. ábra). Mivel egyelőre csak a kör képének alakja és tulajdonságai érdekelnek, a kör középpontját a sík nyomvonalán választjuk, legyen az O. Ha a kör síkját a képsíkba forgatottnak gondoljuk, a leforgatott kört közvetlenül megrajzolhatjuk, e kör az O középpont körül a megadott r sugárral rajzolt kör. E kör a sík nyomvonalát két pontban metszi, e pontok A és B a körvonal ama pontjai, mely pontokban a körvonal a képsíkot metszi, s így e pontok mindegyikének képe és leforgatottja egy és ugyanazon pont, vagyis $A' \equiv (A)$ és $B' \equiv (B)$.



30. ábra.

Ezek után rajzoljuk meg a körsík ama esésvonalának képét, mely a kör középpontjára illeszkedik ; ez a leforgatott kört két pontban metszi, ezek (C) és (D). Az eredeti C pontnak képe mindenesetre az

O, (C) pontokkal határolt véges távolságra illeszkedő pont. Mivel a kör síkjának állását még nem vettük fel, a C pont képét még tetszőlegesen vehetjük fel, legyen ez C'. (C) és C' meghatározza a körsík képsíkszögét az α szöget, ezt a szöget a $(C)^{x}OC'$ háromszögben tüntettük fel.

Vegyük fel a leforgatott kör tetszőleges (P) pontját és szerkeszszük meg e pont képét. A keresett pont mindenesetre a (P) ponton átmenő és az s egyenesre merőleges egyenesen lesz. Legyen ez egyenes metszéspontja az s egyenessel P_1, akkor $\overline{P_1P'}$ távolság oly derékszögű háromszög egyik befogója, melynek átfogója $\overline{P_1(P)}$ és a kérdéses befogó melletti szög a körsík képsíkszöge, α. Mivel már rendelkezünk oly derékszögű háromszöggel, melynek egyik hegyesszöge α, a szerkesztést e derékszögű háromszög felhasználásával végeztük, e háromszög MON, ahol $\overline{MO} = \overline{P_1(P)}$. Ha az $\overline{ON}$ távolságot az s egyenes irányában vetítjük a $P_1(P)$ egyenesre, akkor az így nyert új pont lesz az eredeti körpont képe, P'.

Kössük össze a (P) pontot az O ponttal, legyen e körsugárnak metszéspontja az MP' egyenessel R, az R pontnak orth. vetülete pedig az s egyenesen legyen Q, továbbá állapodjunk meg abban, hogy a kör sugara ne legyen r, hanem a és $\overline{OC'}$ távolság legyen b, végül a jelölések egyszerűsítése végett legyen $(P)OP_1 \measuredangle = t \measuredangle$.

A körpontok képeinek vázolt szerkesztése alapján most már közvetlenül is kimutathatjuk azt, hogy a kör orthogonális projekciója ellipszis. A képpontok mértani helyének felkutatására bevezetünk derékszögű koordinátarendszert, melyre a képpontokat vonatkoztatni fogjuk, az abszcisszák tengelye legyen a sík nyomvonala, s, az ordináták tengelye legyen a (C) (D) egyenes.

E megállapodások után a következő összefüggéseket írhatjuk fel :

$$(C)^{x}OC' \text{ háromszögben } b = a \cos \alpha$$

$$(P)OP_1 \quad \text{«} \quad \overline{P_1(P)} = a \sin t, \text{ e szerint}$$

$$\overline{P_1P'} = y = \overline{ON} = \overline{OM} \cos \alpha = \overline{P_1(P)} \cos \alpha = a \sin t \cos \alpha = b \sin t$$

és
$$OP_1 = x = a \cos t,$$

vagyis
$$x = a \cos t, \; y = b \sin t \tag{1}$$

Az 1. alatti egyenletrendszer az ellipszis parameteres egyenletrendszere. Ha az egyenletrendszerből a t parametert kiküszöböljük, amit úgy végezhetünk, hogy az egyenletrendszer egyenleteit rendre megszorozzuk b, illetve a-val, négyzetre emeljük és összeadjuk, akkor az ellipszisnek az elemekből ismeretes egyenletét nyerjük :

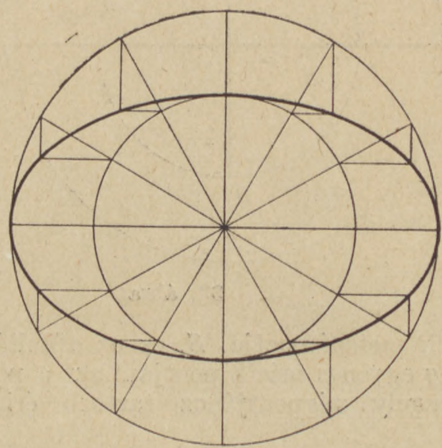
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

A nyert egyenlet alapján megállapíthatjuk azt is, hogy a kör orth. projekciója oly ellipszis, melynek nagytengelye a sík nyomvonala, illetve ha a kör középpontja nem illeszkedik a sík nyomvonalára, akkor a sík ama fővonalának képe, mely fővonal a kör középpontjára illeszkedik és a fél nagytengely hossza mindig a kör sugarával egyenlő, továbbá kistengelye a kör középpontjára illeszkedő esésvonal képe, a fél kistengely hossza pedig $b = a \cos \alpha$, ahol α jelenti a kör síkjának képsíkszögét.

Ezek után állapítsuk meg az $\overline{OR}$ távolságot; a bevezetett jelölések szerint

$$\overline{OR} = \frac{\overline{QR}}{\sin t} = \frac{y}{\sin t} = \frac{b \sin t}{\sin t} = b.$$

Ez az eredmény azt mondja, hogy az $\overline{OR}$ távolság független a leforgatott körön választott ponttól, az R pontok mértani helye a leforgatott körrel koncentrikus kör, melynek sugara az ellipszis fél kistengelyével egyenlő. Evvel nagytengelyével és kistengelyével adott ellipszis pontjainak szerkesztésére új utasítást nyertünk. E szerint az ellipszis pontjait úgy is szerkeszthetjük meg, hogy középpontja körül két koncentrikus kört rajzolunk, az egyik körnek sugara a fél nagytengely, a másik körnek sugara a fél kistengely. A középpontból kiinduló tetszőleges egyenes a körök mindegyikét egy-egy pontban metszi, ha a nagyobb körrel való metszésponton át az ellipszis nagytengelyére merőlegest állítunk és a kisebb körrel való metszésponton át a nagytengellyel parallel egyenest vezetünk, akkor ez egyenesek metszéspontja az ellipszis egy pontja (31. ábra).

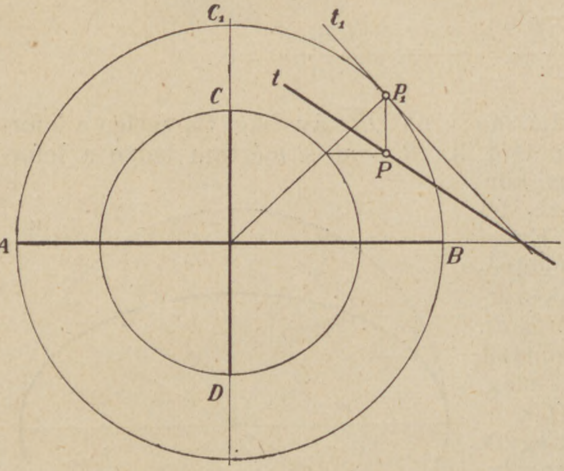


31. ábra.

19. §. Az ellipszis érintőinek szerkesztése. Síkgörbe képsíkba forgatottja és orth. képe mindig axiális affin vonatkozásban lévő alakzatok. Mivel minden ellipszis kör orthogonális projekciójának tekinthető; az ellipszis érintőinek szerkesztését azon orth. axiális affin vonatkozás alapján végezhetjük, mely vonatkozás a megadott ellipszis és az ellipszis nagytengelye fölé, mint átmérő fölé, rajzolt kör között fennáll. Ekkor az affinitás tengelye az ellipszis nagytengelye és egy megfelelő pontpár a kistengely egyik végpontja és az egyik pont ama pontok közül, mely pontokban a kistengely egyenese a kört metszi. Ha a kör síkját ama hegyesszöggel forgatjuk a képsíkba, melyet a sík a képsíkkal bezár, akkor az affinitás megfelelő pontjai a tengely egy oldalán vannak, ha pedig tompaszöggel forgatjuk, akkor a megfelelő pontokat a tengely elválasztja egymástól.

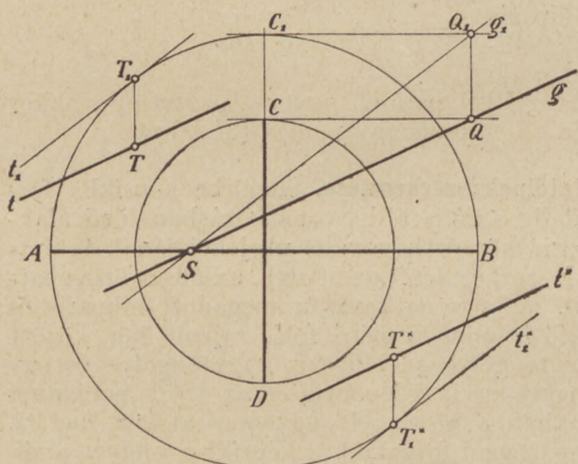
Még megemlítjük, hogy az ellipszis kistengelyének végpontjában az érintő az affinitás tengelyével, a nagytengellyel parallel, s így a kistengely végpontjának affin megfelelőjében az érintő az ellipszis nagytengelyével szintén parallel.

Legyen $\overline{AB}$ nagy- és $\overline{CD}$ kistengelyével adott ellipszis valamely megszerkesztett pontja P (32. ábra), akkor e pontban az előbb megállapított affin vonatkozás alapján az érintőt a következő módon nyerjük: megszerkesztjük a felvett P pont affin megfelelőjét a körben, legyen ez P_1, e pontban megrajzoljuk a kör érintőjét, a t_1 egyenest, a t_1 egyenesnek affin megfelelője abban a síkbeli rendszerben, melyhez az ellipszis tartozik, lesz a kívánt érintő, t.



32. ábra.

Szerkesszük meg nagy- és kistengelyével adott ellipszis g egyenessel parallel érintőit és érintési pontjait. Ekkor először megállapítjuk a g egyenes affin megfelelőjét abban a rendszerben, melyhez a kör tartozik. Ezt a g_1 egyenest úgy határoztuk meg, hogy a g egyenes két pontjának affinját konstruáltuk; az egyik pont a g egyenes és az affinitás tengelyének metszéspontja. S, ez az affinitásban önmagának megfelelő pont, a g egyenes másik pontjául azt a pontot választottuk, melyben a kistengely végpontjához tartozó érintőt metszi, Q, e pontnak megfelelője, Q_1 ama egyik körérintőre illeszkedik, mely az affinitás tengelyétől a kör sugarával egyenlő távolságban van. Az S és Q_1 pontok összekötése a g egyenes megfelelője g_1. Az így nyert egyenessel parallel körérintők, t_1 és $t_1^{\times}$, illetve ezek érintési pontjai, T_1 és $T_1^{\times}$ a keresett érintők, illetve érintési pontok affin megfelelői (33. ábra).

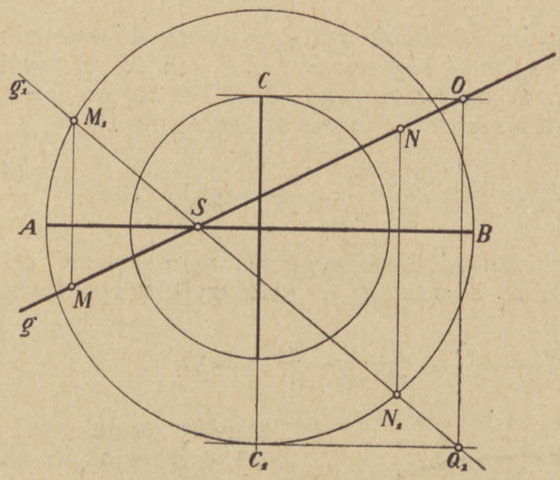


33. ábra.

Tengelyeivel adott ellipszisnek megadott pontra illeszkedő érintőit hasonlóan nyerjük. Megrajzoljuk az ellipszis és adott pont affin megfelelőjét. Utóbbi pontból a körhöz rajzolt érintők és ezek érintési pontjainak affin megfelelői abban a rendszerben, melyhez az ellipszis tartozik, lesznek a keresett érintők, illetőleg érintési pontok.

Az I. k. 184. §-ban tárgyaltuk az ellipszis és egyenes metszéspontjainak szerkesztését. E feladat ellipszis és kör affin vonatkoztatásával lényegesen egyszerűbben oldható meg. Ekkor megállapítjuk az adott egyenes megfelelőjét abban a rendszerben, melyhez a kör tartozik,

(34. ábra) és az utóbbi egyenes a körre illeszkedő pontjainak affin megfelelői abban a rendszerben, melyhez az ellipszis tartozik, lesznek a keresett metszéspontok, M és N. E feladathoz fűzött ábra egyúttal



34. ábra.

ama affin vonatkozást szemlélteti, mikor megfelelő pontok az affinitás tengelyének két különböző oldalán vannak.

20. Simuló kör az ellipszis csúcspontjában. Mivel a símuló kör a görbe három szomszédos pontjára illeszkedő kör, vegyünk fel a térben három általános helyzetű pontot, A, B, C. A három pont által meghatározott háromszögre nézve a szokásos jelöléseket bevezetve legyenek oldalai a, b, c, területe t és a körülírt kör sugara r. Ha a háromszöget merőlegesen vetítjük adott képsíkra, akkor nyerjük az $A'B'C'$ háromszöget, legyenek a képháromszög oldalai a', b', c', területe t' és a körülírt kör sugara r_p. Az eredeti háromszögre nézve $r = \frac{abc}{4t}$, a képháromszögre nézve $r_p = \frac{a'b'c'}{4t'}$, vagyis

$$\frac{r_p}{r} = \frac{\frac{a'}{a} \frac{b'}{b} \frac{c'}{c}}{\frac{t'}{t}} = \frac{\lambda_a \lambda_b \lambda_c}{\varphi},$$

ahol λ egy-egy háromszögoldal rövidülési viszonya, míg $\varphi = \cos\alpha$, ha a háromszög síkjának képsíkszöge α.

Legyen A, B, C adott síkgörbe három szomszédos pontja, akkor e pontokra illeszkedő kör az eredeti síkgörbe símuló köre, ugyanakkor A', B', C' pontokra illeszkedő kör a síkgörbe képének símuló köre. A határátmenetnél a szomszédos pontok által meghatározott háromszögnél a háromszög oldalai egy egyenesre, a síkgörbe kérdéses pontjához tartozó érintőre esnek, tehát akkor $\lambda_a = \lambda_b = \lambda_c = \lambda$, s így

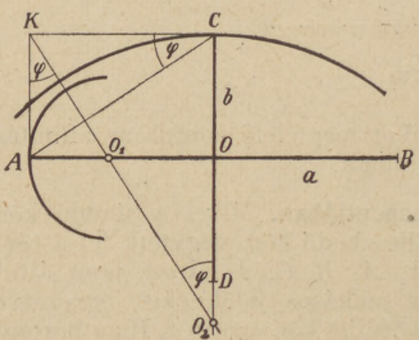
$$\frac{r_p}{r} = \frac{\lambda^3}{\cos\alpha}.$$

Legyen egy adott ellipszis nagytengelye $AB=2a$, kistengelye $CD=2b$, ez az ellipszis oly a sugarú kör orth. képe, melynek átmérője AB és síkjának α képsíkszögére nézve $\cos\alpha=\frac{b}{a}$. Az ellipszis A pontjában az érintő a körsík A pontjára illeszkedő esésvonal képe, tehát ekkor érintő és érintő képére nézve $\lambda=\cos\alpha$. Mivel továbbá az eredeti kör minden pontjára nézve a görbületi kör sugara, $r=a$, a fenti eredményeket alkalmazva az ellipszis A csúcspontjára

$$\frac{r_p}{r}=\frac{r_p}{a}=\frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{b^2}{a^2}, \text{ vagyis } r_p=r_A=\frac{b^2}{a}.$$

Az ellipszis kistengelyének végpontjára illeszkedő érintő és ennek eredetijére nézve $\lambda=1$ s így a kistengely végpontjára vonatkozólag

$$\frac{r_p}{r}=\frac{r_p}{a}=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{a}{b}, \text{ vagyis } r_p=r_C=\frac{a^2}{b}.$$



35. ábra.

A nyert eredmények alapján megszerkeszthetjük az ellipszis A és C pontjaiban a simuló köröket. Ha az ellipszis A és C pontjaihoz tartozó érintők közös pontjából merőlegest állítunk az A és C pontok összekötő egyenesére, akkor ez egyenes és nagytengely közös pontja az A pontbeli, míg ugyanezen egyenesnek a kistengelyre illeszkedő pontja a C pontbeli oszkuláló körnek középpontja, O_1, ill. O_2 (35. ábra). Mert ha az A és C pontok erintőinek közös pontja K, továbbá az ábra szerint három helyen előforduló szög φ, akkor AO_1K, ill. CO_2K háromszögben

$$\overline{AO_1}=b\,tg\varphi, \text{ ill. } \overline{CO_2}=a\,ctg\varphi,$$

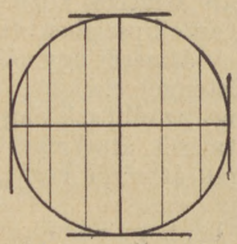
de KAC háromszögben

$$tg\varphi=\frac{b}{a}, \text{ ill. } ctg\varphi=\frac{a}{b},$$

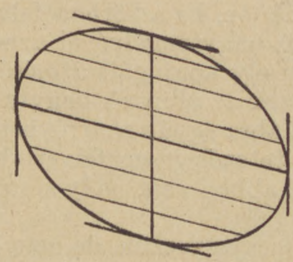
s így

$$\overline{AO_1}=\frac{b^2}{a} \text{ és } \overline{CO_2}=\frac{a^2}{b}.$$

21. §. A kör és ellipszis konjugált átmérői. *Kör konjugált vagy kapcsolt átmérőpárján értjük a kör két oly átmérőjét, melyek egymásra merőlegesek.* Mint ismeretes, két egymásra merőleges körátmérő közül mindegyik a másikkal parallel húrok felezési pontjainak mértani helye, továbbá mindegyik átmérő végpontjaihoz tartozó körérintők a másik átmérővel parallel egyenesek (36. ábra). A kör kapcsolt átmérőinek fogalmát átvisszük a felsorolt tulajdonságok alapján az ellipszisre. Mivel minden ellipszis, legalább egyelőre, *egy* körrel axiális affin vonatkozásba hozható és az affin vonatkozásnál parallel egyenesek megfelelői parallel egyenesek, továbbá távolság felezési pontjának affin megfelelője felezi a távolság affin megfelelőjét, mondhatjuk, hogy az ellipszisben parallel húrok felezési pontjainak mértani helye átmérő és az átmérő végpontjaihoz tartozó ellipszis érintők a húrokkal parallel átmérővel párhuzamos egyenesek. Az itt szereplő két átmérő mindegyike a másiknak konjugált átmérője, mert mindegyik a másikkal parallel húrok felezési pontjainak mértani helye. Vagyis *ellipszis konjugált átmérőpárján értjük az ellipszis oly két átmérőjét, melyek közül mindegyik a másik átmérő*



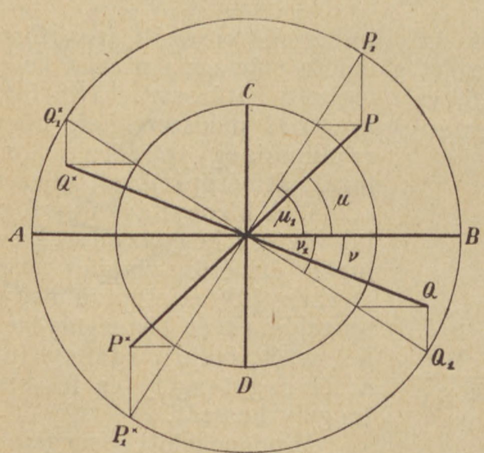
36. ábra.



37. ábra.

végpontjaihoz tartozó érintőkkel parallel (37. ábra). Konjugált átmérők irányairól azt mondjuk, hogy az ellipszisre nézve konjugált irányok.

Kör konjugált átmérőinek végpontjaihoz tartozó érintők négyzetet alkotnak, a kör köré írt négyzetet; ellipszis konjugált átmérőinek végpontjaihoz tartozó érintők általában csak parallelogrammát alkotnak, az ellipszis köré írt parallelogrammát. Itt megjegyezzük, hogy nem minden az ellipszis köré írt parallelogrammának oldalai konjugált irányok.



38. ábra.

Ha az ellipszis egy konjugált átmérőpárját meg akarjuk szerkeszteni, megrajzoljuk az ellipszissel affin vonatkozású kört, a körben felveszünk tetszőlegesen két egymásra merőleges átmérőt és ez átmérőknek affin megfelelői abban a rendszerben, melyhez az ellipszis tartozik, szolgáltatják az ellipszis egy konjugált átmérőpárját. A 38. ábrában a körben választott konjugált átmérők $P_1P_1^{\times}$ és $Q_1Q_1^{\times}$, ezek affin megfelelői $PP^{\times}$ és $QQ^{\times}$ az ellipszisben konjugált átmérők.*

Legyenek az ábrán feltüntetett értelmezés szerint μ_1 és ν_1 ama

* A P, $P^{\times}$, Q, $Q^{\times}$ pontokat ama szerkesztéssel végeztük, mellyel az ellipszis pontjait nyertük akkor, mikor azokat két koncentrikus kör segítségével megállapítottuk.

szögek, melyeket a kör konjugált átmérői az ellipszis nagytengelyével alkotnak és legyenek e szögek affin megfelelői μ és ν, akkor a szerkesztésből közvetlenül leolvashatjuk, hogy

$$\mu_1 + \nu_1 = 90^\circ, \quad \mu < \mu_1, \quad \nu < \nu_1$$

s így

$$\mu + \nu < 90^\circ.$$

Vagyis az ellipszis konjugált átmérői általában sohasem alkotnak derékszöget. Csak egy esetben nyerünk az ellipszisben a körrel való affin vonatkoztatása alapján egymásra merőleges konjugált átmérőket, és pedig akkor, ha a körben felvett konjugált átmérők közül az egyik az ellipszis nagytengelyével azonos. Szóval az ellipszisben van egy és csakis egy oly konjugált átmérőpár, melynek átmérői egymásra merőlegesek, ezek az ellipszis nagytengelye és kistengelye.

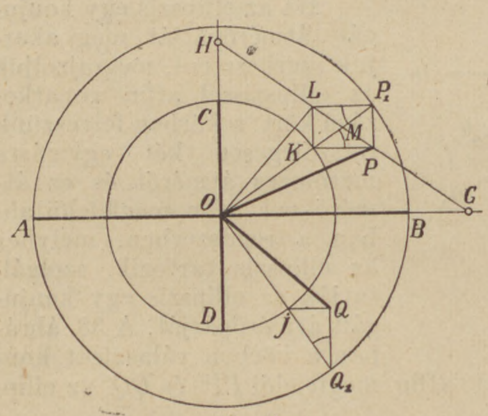
A 38. ábra egyúttal arról is meggyőz, hogy az ellipszis nagytengelye mindig a tetszőlegesen felvett konjugált átmérők által nyert két síkrész közül abban van, mely síkrész a konjugált átmérők hegyesszögéhez tartozik.

Még megjegyezzük, de nem bizonyítjuk be, hogy az ellipszis egyenlete ferde parallelkoordinátarendszerben, ha a koordinátarendszer tengelyeit úgy választjuk, hogy azok azonosak legyenek az ellipszis tetszőleges konjugált átmérőpárjának egyeneseivel,

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1,$$

ahol (x', y') az ellipszis tetszőleges pontjának ferde parallel koordinátái és a', b' a konjugált félátmérők mértékszámai.

22. §. A Rytz-féle szerkesztés. Az ellipszisnek konjugált átmérőire, mint koordináta tengelyekre, közölt egyenlete már azt mutatja, hogy az ellipszis két konjugált átmérőjével meg van határozva. Ettől függetlenül ki fogjuk mutatni tisztán geometriai módszerekkel, hogy az ellipszis egy tetszőleges konjugált átmérőpárjával teljesen adott. A bizonyítást úgy fogjuk végezni, hogy az adott konjugált átmérők alapján megszerkesztjük az ellipszis nagytengelyének és kistengelyének helyzetét, majd megállapítjuk a fél nagytengely és fél kistengely hosszát.



39. ábra.

Mindenekelőtt megszerkesztjük nagytengelyével és kistengelyével adott ellipszis egy konjugált átmérőpárját úgy, amint azt a 38. ábrában láttuk. Legyenek az így nyert fél konjugált átmérők OP és OQ (39. ábra). A P pont szerkesztésénél felhasználtuk a KP_1P derékszögű háromszöget, a Q pontnál pedig a JQ_1Q derékszögű háromszöget, e háromszögek egybevágó háromszögek, mert átfogóik egyenlők és a megjelölt hegyesszögek szárai egymásra merőleges egyenesek. Forgassuk az O pont körül az O, J, Q_1, Q pontokkal jellemezhető alakzatot 90°-kal úgy, hogy az OQ_1 távolság az OP_1 távolsággal födésbe kerüljön, ekkor a J pont azonos lesz a K ponttal és a Q pont új helyzetében legyen L. A K, P, P_1, L pontok oly oblongumnak csúcspontjai, melynek oldalai az ellipszis nagy-, illetőleg kistengelyével parallel egyenesek. A Rytz-féle szerkesztésnél az L pont lényeges szerepet játszik, azért már most szögezzük le azt, hogy az L pontot úgy nyertük, hogy a Q pontot az O pont körül 90°-kal elforgattuk, vagyis

$$OL \perp OQ \quad \text{és} \quad \overline{OL} = \overline{OQ}. \tag{1}$$

A KPP_1L oblongom átlói egyenlők és felezik egymást s így MKP és MKL háromszögek egyenlőszárú háromszögek. Ugyanezen oblongum átlós egyenesei közül az egyik illeszkedik az O pontra, míg a másik az ellipszistengelyeket egy-egy pontban metszi, legyenek e pontok G és H. Az oblongum és ellipszistengelyek viszonylagos helyzetéből következik, hogy MKP és MOG háromszögek, továbbá MKL és MOH háromszögek párosával hasonló háromszögek, de MKP és MKL háromszögek egyenlőszárú háromszögek s így az MOG és MOH háromszögek is egyenlőszárú háromszögek, e szerint $\overline{MO} = \overline{MG}$ és $\overline{MO} = \overline{MH}$, vagyis

$$\overline{MG} = \overline{MO} = \overline{MH}. \tag{2}$$

Tehát a G és H pontok a PL egyenesre illeszkedő oly pontok, melyek az M ponttól ugyanolyan távolságban vannak, mint az O pont az M ponttól.

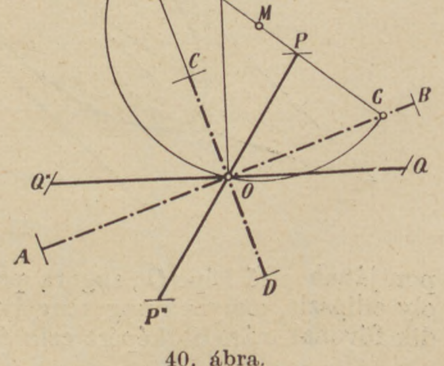
Az ábrából az előzők alapján még leolvashatjuk azt is, hogy az ellipszis fél nagytengelye

$$a = \overline{OP_1} = \overline{LG} = \overline{PH} \tag{3}$$

és fél kistengelye

$$b = \overline{OK} = \overline{PG} = \overline{LH}. \tag{4}$$

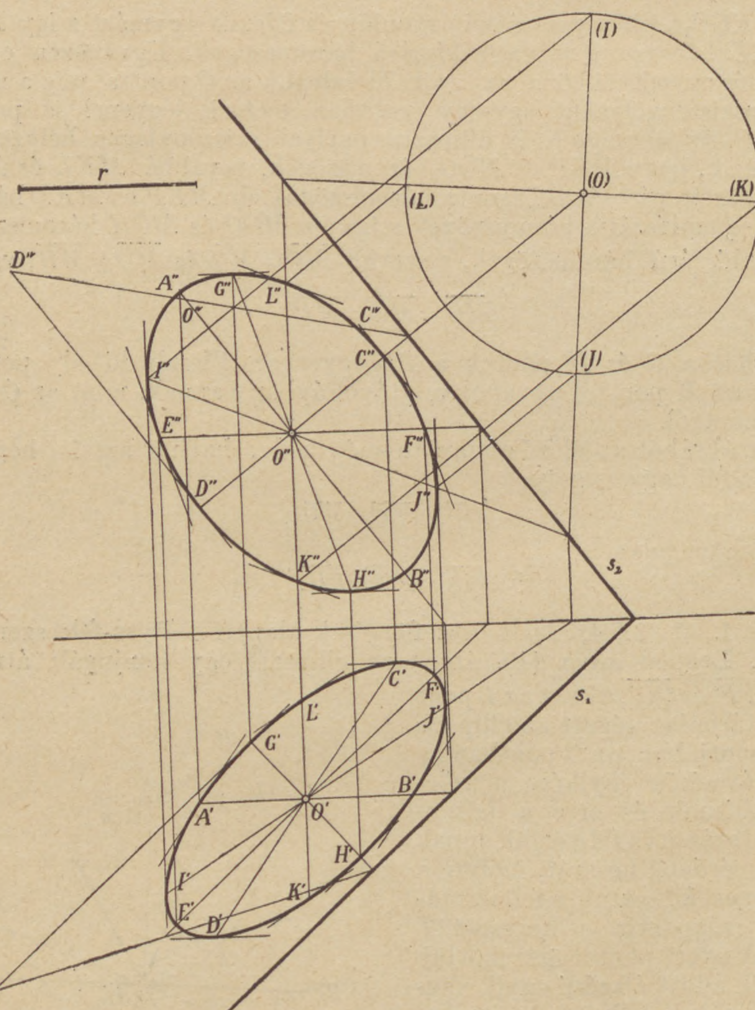
Az 1., 2., 3., 4. alatti összefüggések alapjai a Rytz-féle szerkesztésnek. Legyen adva (40. ábra) az ellipszis egy konjugált átmérőpárja, $\overline{PP^{\times}}$ és $\overline{QQ^{\times}}$, ekkor az L pont meghatározása végett az ellipszis középpontjában, az O pontban az adott átmérők egyikére merőlegest állítunk és erre a középponttól számítva felmérjük annak a félátmérőnek hosszát, melyre a merőlegest állítottuk, a felmért távolság végpontja a keresett L pont. A nyert pontot összekötjük a másik adott átmérő egyik végpontjával, pl. a P ponttal, az így nyert egyenes a G és H pontok egyik mértani helye. Ha M az $\overline{LP}$ távolság felezési-pontja, akkor a G és H pontok egy másik mértani helye az a kör, melynek közép-



40. ábra.

pontja M és sugara az $\overline{MO}$ távolság. E kör és az előbbi egyenes metszéspontjai a keresett G és H pontok. Ugyanakkor az OG, illetőleg OH egyenes az ellipszis egy-egy tengelyének egyenese, a rajz szerinti jelölés mellett az OG egyenes az ellipszis nagytengelyének egyenese, mert annak a síkrésznek egyenese, mely síkrész a konjugált átmérők hegyes szögéhez tartozik. Az eddigi szerkesztéssel már a tengelyek hosszát is nyertük, mert a fél nagytengely az $\overline{LG}$ és a fél kistengely a $\overline{PG}$ távolsággal egyenlő.

23. §. Kör képeinek szerkesztése orth. parallel projekcióban két képsíkon. Legyen a nyomvonalaival adott körsík **S** (s_1, s_2), a kör középpontjának első képe O', sugara pedig r (41. ábra). A kör második képe



41. ábra.

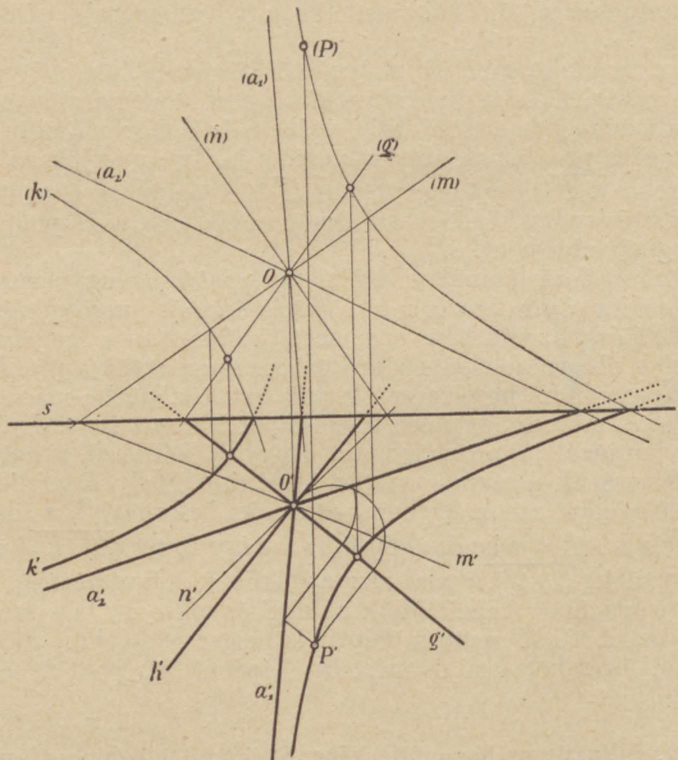
oly ellipszis, melynek nagytengelye a kör középpontján átmenő második fővonal második képére esik és a fél nagytengely az r távolsággal egyenlő s így a nagytengely végpontjait úgy nyerjük, hogy a rajzolt fővonal másoik képére az O'' ponttól számítva az r távolságot mindkét értelemben felrakjuk, e pontok A'' és B''. A második kép kistengelye a középpontra illeszkedő második esésvonal második képe. A kistengely C'' és D'' végpontjainak szerkesztését e pontok negyedik képeinek meghatározásával vezetjük be. Az esésvonalon átmenő és a második képsíkra merőleges negyedik képsíkon megszerkesztjük az esésvonal és középpont negyedik képét, az esésvonal negyedik képére a középpont negyedik képétől számítva mindkét értelemben felmérjük a kör sugarát, az így nyert pontok a kistengely végpontjainak negyedik képei, e pontok második képei a C'' és D'' pontok. A második kép tengelyeinek megfelelői az eredeti körben egymásra merőleges átmérők s így ezek első képei konjugált átmérőket adnak a kör első projekciójában. Ha a kör első vetületében megszerkesztjük az A, B, C, D pontok első képeit, akkor $\overline{A'B'}$ átmérő a kör első képeként nyerendő ellipszisnek az $x_{1,2}$ tengellyel parallel átmérője. Mivel pedig az első projekcióban az $\overline{A'B'}$ és $\overline{C'D'}$ átmérők kapcsolt átmérők, a C' és D' pontokban az ellipszis érintők az $A'B'$ átmérővel parallel egyenesek. Ez érintők érintési pontjai tehát a kör első képének oly pontjai, melyekben az érintők az $x_{1,2}$ tengellyel párhuzamos egyenesek. *Orthogonális parallel projekcióban két képsíkon síkgörbe képének oly pontja, mely pontban a kép érintője az $x_{1,2}$ tengellyel parallel, a kép egy lényeges pontja.* Körkép esetében egy-egy ilyen pont a kép legmagasabb vagy legmélyebb pontja. Jelölésünk szerint C' a kör első vetületében a legmagasabb, D' a legmélyebb pont.

Azt a gondolatmenetet, melyet követtünk a kör második képének szerkesztésénél és mellyel nyertük az első kép egyes lényeges pontjait, alkalmazhatjuk a kör első képének és a kör második képének egyes lényeges pontjainak szerkesztésénél is. Így nyerjük az első képben rendre az $\overline{E'F'}$ nagytengelyt, a $\overline{G'H'}$ kistengelyt, a G pont második képe a kör második képében a legmagasabb, míg a H pont második képe a legmélyebb pont.

Síkgörbe ábrázolásánál még *lényeges pontok* az úgynevezett *szélső pontok, minden ilyen pontban a síkgörbe érintője profilegyenes.* Profilegyenes első és második képe egy merőlegesben van a tengelyre, e szerint, ha síkgörbe valamely képében megszerkesztettük a profil helyzetű érintőt, akkor máris megszerkesztettük azt a síkgörbe másik képében is. Kör első és második képében a szélső pontok ama átmérő végpontjai, melynek konjugáltja profilegyenes. Hogy a kérdéses átmérőt nyerhessük, felvesszük a síknak azt az átmérőjét, mely átmérőnek egyenese profilegyenes, ezt az egyenest és a kört beforgatjuk a sík második nyomvonala körül a második képsíkba, az így nyert $\overline{(L)\,(K)}$ körátmérőnek konjugáltja, $\overline{(I)\,(J)}$, annak az átmérőnek leforgatottja, mely átmérő végpontjainak képei adják az első és második kép szélső pontjait. Ha az L és K pontok képeit is megszerkesztjük, akkor megszerkesztettük a kör első és második képének 12 pontját és ugyanannyi érintőjét.

24. §. Ellipszis orthogonális képe. Síkjával, középpontjával, nagytengelyével és kistengelyével adott ellipszis orth. vetülete valamely képsíkon megint ellipszis, a képellipszis középpontja az eredeti ellipszis középpontjának képe, a képellipszis valamely kapcsolt átmérőpárja mindig az eredeti ellipszis egy konjugált átmérőpárjának képe. A felsorolt eredményekhez ugyanazon gondolatmenettel jutunk, mint a kör orthogonális képének megállapításánál. Megjegyzendő csak az, hogy az ellipszis tengelyeinek képei általában nem lesznek a képellipszis tengelyei, csak akkor lesznek, ha az eredeti ellipszis tengelyeinek egyike az ellipszis síkjának fővonala. Amennyiben a képellipszis tengelyeit kívánjuk megszerkeszteni, úgy az eddigi ismeretek alapján csak úgy járhatunk el, hogy a képsíkba forgatott eredeti ellipszis és a képellipszis között fennálló affin vonatkozás alapján megállapítjuk a leforgatott ellipszis egy konjugált átmérőpárjának (legtöbbször a tengelyeknek) affin megfelelőjét, a nyert konjugált átmérők alapján a Rytz-féle szerkesztéssel kaphatjuk a képellipszis tengelyeit.

25. §. Hyperbola orthogonális képe. Síkjával, asymptotáival és a fél valós tengellyel adott hyperbola orth. projekciója egy felvett képsíkon hyperbola, mert képe másodrendű és végtelenben fekvő pontjainak képei végtelenben fekvő pontok. Az asymptoták képei a képhyperbola asymptotái, mert érintő képe érintő és érintési pont képe a képérintő érintési pontja. Már ebből is következik, mivel hyperbolánál az asymptoták metszéspontja a hyperbola középpontja, hogy a hyperbola



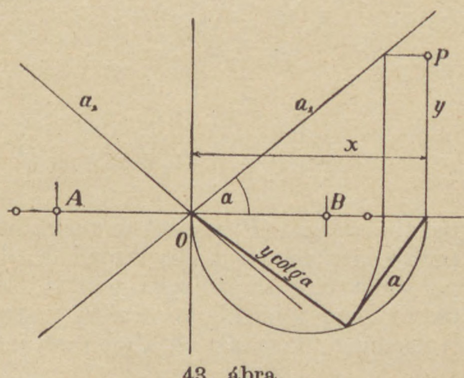
42. ábra.

középpontjának képe a képhyperbola középpontja. Itt is megjegyezhetjük, hogy a hyperbola tengelyeinek képei általában nem lesznek a képhyperbola tengelyei, de a képhyperbola tengelyeinek helyzetét közvetlenül megállapíthatjuk; ezek szögfelezői ama szögeknek, melyeket a hyperbola képében az asymptoták alkotnak.

A képhyperbola valós tengelyének végpontjait ama axiális affin vonatkozás alapján szerkeszthetjük meg, mely fennáll az eredeti hyperbola képsíkba forgatottja és annak képe között. Legyen a leforgatott hyperbola teljesen adott, asymptotái (a_1), $(\ _2)$, tengelyei (m), (n), fél valós tengelye l (42. ábra). A hyperbola síkjának s nyomvonalát tetszőlegesen vettük fel, és ha e síknak képsíkszögét megadjuk, akkor az ismeretes módon megszerkesztjük a hyperbola képének középpontját. A képhyperbola asymptotáinak megrajzolásával feltüntethetjük e hyperbola tengelyeit, legyenk ezek g' és h'. A g egyenes leforgatottja a leforgatott hyperbolát két pontban metszi, miután e pontokat kizárólag körzővel és vonalzóval (alkalmazható ama szerkesztés, melyet az ellipszisnél az I. k. 185. §-ban tanultunk) megszerkesztettük, megállapítjuk ezek képeit, az így nyert pontok lesznek a képhyperbola valós tengelyének végpontjai. E pontokhoz más úton is juthatunk, nevezetesen megszerkesztjük a leforgatott hyperbola tetszőleges (P) pontját és megállapítjuk P' képét, akkor a képhyperbolának két asymptotáját és egy pontját ismerjük, ez adatokból a hyperbola fél valós tengelyének hosszát megszerkeszthetjük.

E célból vegyünk fel valamely tetszőleges hyperbolát és legyen a hyperbola egy pontja P (43. ábra). Akkor a hyperbola tengelyeire vonatkoztatott egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1)$$



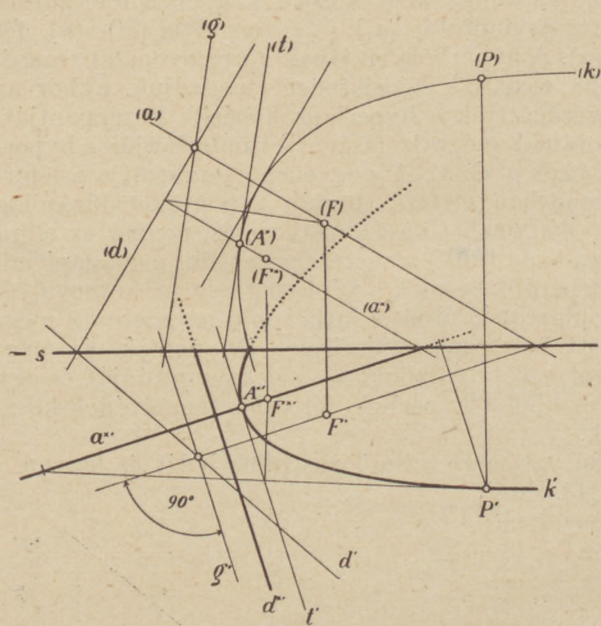
43. ábra.

Legyen továbbá a valós tengely és egyik asymptota által bezárt szög α és mint ismeretes $\operatorname{cotg} \alpha=\frac{a}{b}$, ennek figyelembevételével a hyperbola egyenlete

$$x^2-y^2 \operatorname{cotg}^2 \alpha=a^2. \qquad (2)$$

Mivel a jelen esetben a hyperbola P pontjának koordinátái ismeretesek, a 2. alatti egyenlet azt mondja, hogy a valós tengely félhossza oly derékszögű háromszög egyik befogója, melynek átfogója az adott P pont abszcisszája és másik befogója $y \operatorname{cotg} \alpha$. Ám $y \operatorname{cotg} \alpha$ oly derékszögű háromszög egyik befogója, melynek másik befogója y és utóbbi befogóval szemközt fekvő szög α. A szerkesztés berendezése az ábrából közvetlenül leolvasható. A leírt szerkesztést alkalmaztuk az előbbi képhyperbola valós tengelyének meghatározásánál.

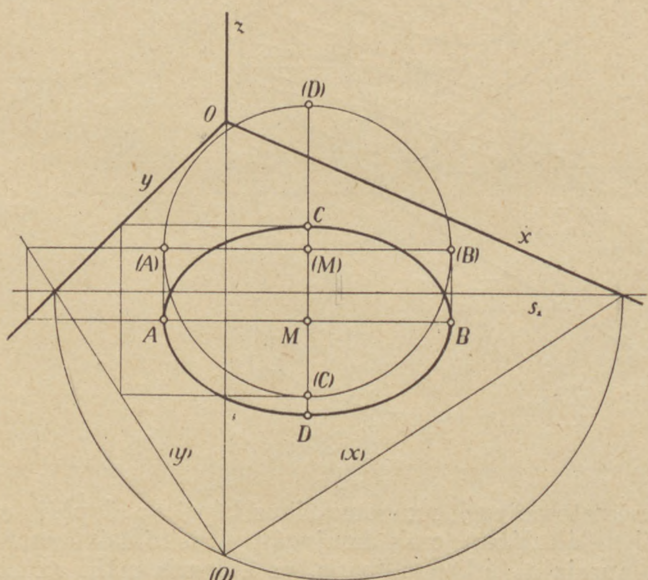
26. §. Parabola orthogonális képe. Adott parabola képét szintén azon axiális affin vonatkozás alapján szerkesztjük meg, mely vonatkozás fennáll a leforgatott parabola és képe között. Vegyük fel a leforgatott parabolát, síkjának s nyomvonalát és mondjuk gyujtópontjának orthogonális képét. Itt megint megjegyezhetjük, hogy az eredeti parabola tengelyének, vezéregyenesének és gyujtópontjának képe nem lesz a képparabola tengelye, vezéregyenese, gyujtópontja. Hogy a képparabola fontos adatait megszerkeszthessük, mindenekelőtt megrajzoljuk az eredeti parabola tengelyének képét, ez az egyenes a képparabolának egy átmérője lesz, mert a parabola minden átmérőjének képe a képparabola egy átmérője (44. ábra). A képparabola nyert átmérőjére merőleges egyenest veszünk fel, legyen ez g', majd megszerkesztjük a parabola leforgatásában ez egyenes megfelelőjét, a (g) egyenest. A (g) egyenessel parallel érintő érintési pontjának képe lesz a képparabola csúcspontja, e ponton átmenő és az eredeti parabola tengelyének képével parallel egyenes lesz a képparabola tengelye. Hogy továbbá a képparabola gyujtópontját és vezéregyenesét megszerkeszthessük, felveszünk a leforgatott parabolán egy (P) pontot és megállapítjuk ennek P' képét, ezzel a képparabolára nézve a következő feladatot kell megoldani: adva van a parabola egy tetszőleges pontja, tengelye és csúcspontja; szerkesztessék meg a parabola vezéregyenese és gyujtópontja. A feladat tényleges megoldása az ábrából leolvasható.



44. ábra.

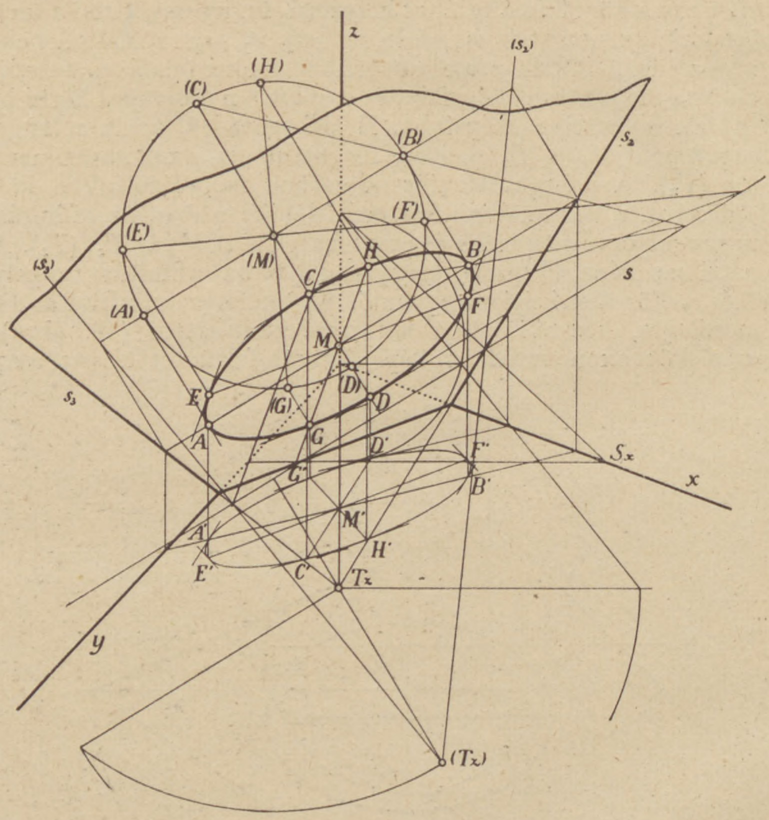
27. §. Kör orthogonális axonometrikus képe. *a)* Legyen a kör síkja valamely koordinátasík, pl. az (x, y) sík, akkor adott M középpont és r sugár mellett a kör axonometrikus képét ama orthogonális axiális affin vonatkozás alapján szerkesztjük meg, mely fennáll a kör axonometrikus képsíkba forgatottja és axonometrikus képe között (45. ábra). Az alaprajz síkját az axonometrikus képsík s_1 első nyomvonala körül beforgatjuk az axonometrikus képsíkba e síkra illeszkedő M ponttal együtt. Az axiális affinitás tengelye s_1 és egy megfelelő pontpár M, (M). A kör affin megfelelője ellipszis, az ellipszis nagytengelye $2r$ és helyzetére nézve az axonometrikus képsík első nyomvonalával parallel egyenes. Szóval a nagytengely mindig a z tengely axonometrikus képére merőleges egyenes, míg kistengelye a z tengely axonometrikus képével parallel egyenes, utóbbi tengely nagyságát az axiális affin vonatkozással nyerjük.

b) Legyen a kör síkja általános helyzetű sík, nyomvonalai a tengelykereszt adott axonometrikus képe mellett s_1, s_2, s_3. Mindenekelőtt megszerkesztjük a körsík s axonometrikus nyomvonalát a tetszőlegesen felvett axonometrikus képsíkon és a síkot e nyomvonal körül beforgatjuk az axonometrikus képsíkba. E beforgatásnál a sík z tengelyén lévő tengelypontját, a T_z pontot, forgattuk az axonometrikus képsíkba, ez (T_z). A leforgatott síkrendszerben megrajzoltuk a kört és megállapítottuk e kör axiális affin megfelelőjét abban az affinitásban, melynek tengelye az s egyenes és egy megfelelő pontpár T_z, (T_z). A kör axonometrikus képe ellipszis, nagytengelye az affinitás tengelyével parallel és a kör átmérőjével egyenlő. Kistengelye az affinitás tengelyére merőleges, hosszát külön kell megszerkeszteni (46. ábra). Az ábrában a kör axonometrikus képén kívül feltüntettük az alaprajz



45. ábra.

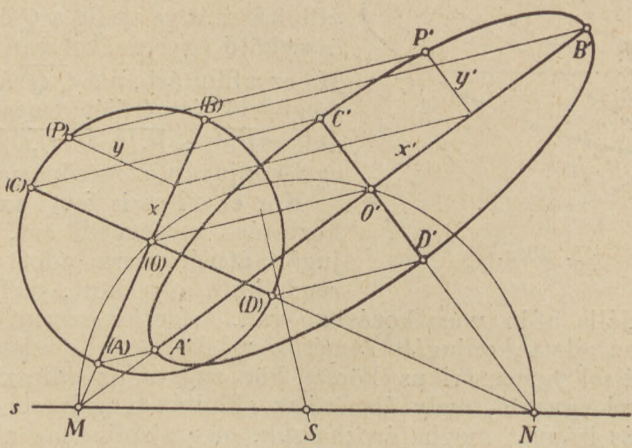
axonometrikus képét is. A kör axonometrikus képe és alaprajzának axonometrikus képe között szintén axiális affin vonatkozás áll fenn, az affinitás tengelye a sík első nyomvonala és egy megfelelő pontpár M és M'. Ha az axonometrikus kép tengelyeinek alaprajzait megszerkesztjük, akkor nyerjük az alaprajzban az $\overline{A'B'}$ és $\overline{C'D'}$ konjugált átmérőket. Az alaprajz tulajdonképpen annak az ellipszisnek axonometrikus képe, melyet a térben úgy nyerünk, hogy az eredeti kört a z tengely irányában az alaprajz síkjára vetítjük. Ennek a térben lévő ellipszisnek megszerkeszthetjük nagytengelyét és kistengelyét. A nagytengely a sík egy első fővonalának alaprajza, hogy képét és végpontjainak képét nyerhessük, megrajzoljuk az M', illetve M pontra illeszkedő s_1 egyenessel parallel egyeneseket, ezt az egyenest beforgatjuk az s egyenes körül az axonometrikus képsíkba, az így nyert (E) (F) és erre merőleges (G) (H) köratmérők megfelelői a térben lesznek azok az átmérők, melyeknek alaprajzai az alaprajz síkjában lévő körprojekciónak ten-



46. ábra.

gelyei, természetesen ezek axonometrikus képei az alaprajz axonometrikus képében általában csak konjugált átmérőkként mutatkoznak. Mivel az alaprajz a térben ellipszis, ez ellipszis orth. axonometrikus képének tengelyeit csak közvetve szerkeszthetjük meg.

28. §. Kör ferde parallel képe. Síkjának nyomvonala körül képsíkba forgatott kör és e kör ferde parallel képe klinogonális axiális affinitásban lévő alakzatok. Amennyiben a kör síkjának és a ferde vetítés irányának helyzetét nem vesszük fel, a kör egy meghatározott pontjának ferde parallel képét tetszőlegesen vehetjük fel. Legyen a kör síkjának nyomvonala *s*, a nyomvonal körül a képsíkba forgatott *r* sugarú kör középpontja (O), és a kör O középpontjának ferde képe az O' pont, ekkor az affinitás tengelye a sík *s* nyomvonala és az affinitás iránya az (O), O' pontok összekötő egyenese (47. ábra). A megállapított affinitás alapján mondhatjuk, hogy a kör ferde parallel képe ellipszis, mert másodrendű görbe affin megfelelője másodrendű és a kör összes pontjainak megfelelői végesben fekvő pontok. Ha a leforgatott körben felveszünk egy konjugált átmérőpárt, akkor ennek megfelelője az ellipszis egy konjugált átmérőpárja lesz. De megszerkeszthetjük az ellipszis tengelyeit is, e végett meg kell keresni a kör oly két egymásra merőleges átmérőjét, melyeknek megfelelői megint merőlegesek. Ezt a feladatot már megoldottuk (I. kötet 178. §), e szerint megrajzoljuk az $\overline{(O)\,O'}$ távolság felező merőlegesét, ez metszi az affinitás tengelyét S pontban, az S pont körül rajzolt kör, mely illeszkedik az (O) és O' pontokra, metszi az affinitás tengelyét az M és N pontokban, az $(O)M$ és $(O)N$ egyenesek a szerkesztés szerint a leforgatott kör rendszerében oly egymásra merőleges egyenesek, melyeknek megfelelői $O'M$



47. ábra.

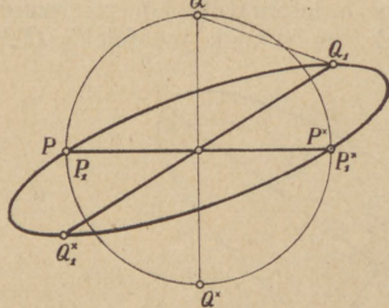
és $O'N$ ugyancsak egymásra merőlegesek. Tehát a kör $\overline{(A)\,(B)}$ és $\overline{(C)\,(D)}$ átmérőinek megfelelői $\overline{A'B'}$ és $\overline{C'D'}$ az ellipszis tengelyei, ha $(O)M$, illetve $(O)N$ egyenes a kört az (A) és (B), illetve (C) és (D) pontokban metszi.

Vonatkoztassuk a kör pontjait az $(A)\,(B)$ és $(C)\,(D)$ egyenesekből álló derékszögű koordinátarendszerre és ennek megfelelően az ellipszis pontjait az $A'B'$ és $C'D'$ egyenesekből álló derékszögű koordinátarendszerre, akkor a kör tetszőleges pontjának koordinátáit megszerkesztve e koordináták affin megfelelői a felvett pont affin megfelelőjének koordinátái. De tudjuk, hogy affin megfelelő egyeneseken megfelelő szegmentumok aránya állandó, s így ha $(x,\, y)$ a kör egy pontjának koordinátái és $(x',\, y')$ a megfelelő pont koordinátái, írhatjuk, hogy $x' = \mu x$, $y' = \nu y$ és tekintetbe véve, hogy $x^2 + y^2 = r^2$, az x', y' koordinátákra a következő összefüggést nyerjük :

$$\frac{x'^2}{(\mu r)^2} + \frac{y'^2}{(\nu r)^2} = 1.$$

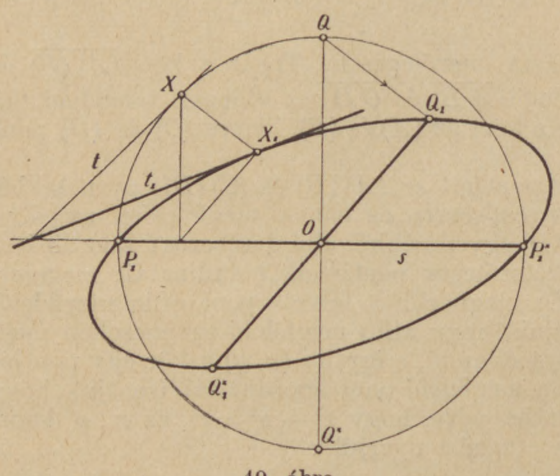
Evvel újból bebizonyítottuk, hogy a kör ferde parallel képe ellipszis.

29. §. Konjugált átmérőpárral adott ellipszis pontjainak, érintőinek és egyenessel való metszéspontjainak szerkesztése. Határozzuk meg megint kör ferde parallel képét, de a jelen esetben legyen a kör középpontja O a sík s nyomvonalára illeszkedő pont (48. ábra). A leforgatott kör a sík nyomvonalát a P és P^x pontokban metszi, e pontok ferde parallel képei az eredeti pontokkal azonos pontok. Megrajzolva a körben az s affinitási tengelyre merőleges $\overline{QQ^x}$ átmérőt, ez átmérő egyik végpontjának képét tetszőlegesen vehetjük fel, legyen a Q pont ferde parallel képe Q_1. Ekkor a kör és ferde parallel képe, az ellipszis, axiális affin vonatkozásban lévő alakzatok, az affinitás tengelye az s egyenes, az affinitás iránya pedig a Q és Q_1 pontok összekötő egyenesével van jellemezve. Ha ez affinitásban a $\overline{QQ^x}$ átmérő $\overline{Q_1Q_1^x}$ megfelelő átmérőjét megszerkesztjük, akkor $\overline{PP^x} = \overline{P_1P_1^x}$ és $\overline{O_1Q_1^x}$ az ellipszis egy konjugált átmérőpárja.



48. ábra.

Kör és ellipszis fenti axiális vonatkoztatása megengedi azt, hogy konjugált átmérőpárral adott ellipszishez rendeljünk oly kört, mely az ellipszissel axiális affin vonatkozásban van. A fentiek szerint az affinitás tengelye az adott konjugált átmérők egyike, az ellipszissel affin kör az ellipszissel koncentrikus kör, e kör sugara az ellipszis ama félátmérőjével egyenlő, mely átmérő az affinitás tengelyére esik. Hogy az affinitás irányát meghatározhassuk, megrajzoljuk az affinitás tengelyére merőleges körátmérőt, ez átmérő egyik végpontjának megfeleltetjük az adott ellipszisátmérők közül annak egyik végpontját, mely átmérő nem esik az affinitás tengelyére. Az ilyen módon felvett kör és megállapított affinitás a kört átviszi a konjugált átmérőkkel adott ellipszisbe, mert a kör felvett két konjugált átmérője átmegy az ellipszis felvett két konjugált átmérőjébe.

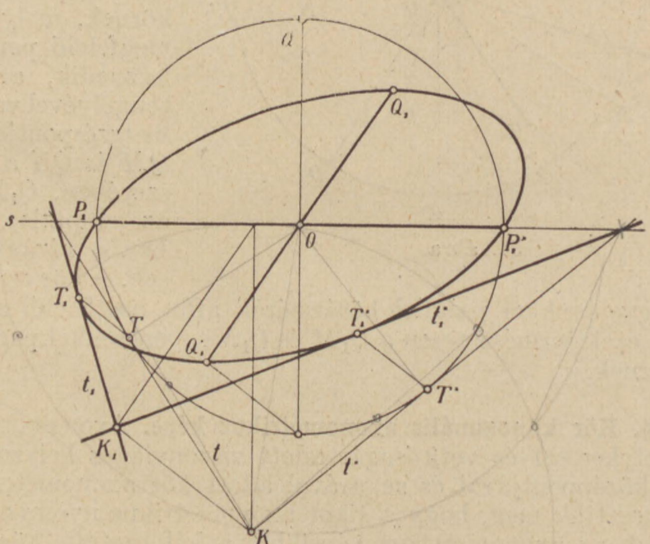


49. ábra.

E szerint adott ellipszis végtelen sokféleképpen hozható körrel axiális affin vonatkozásba, minden olyan körrel, melynek átmérője az ellipszis egy átmérőjével azonos, ugyanakkor az affinitás irányát még mindig kétféleképpen állapíthatjuk meg.

Mivel konjugált átmérőpárral adott elipszis körrel közvetlenül axiális affin vonatkozásba hozható, ez a körülmény felhasználható konjugált átmérőpárral adott ellipszisre vonatkozó szerkesztéseknél.

a) Legyen az adott ellipszis egy konjugált átmérőpárja $\overline{P_1P_1^x}$ és $\overline{Q_1Q_1^x}$ (49. ábra). Miután a $\overline{P_1P_1^x}$ féltávolságával az elipszissel koncentrikus kört és e körnek $\overline{P_1 P_1^{\times}}$ átmérőjére merőleges $\overline{QQ^{\times}}$ átmérőjét megrajzoltuk és megállapodtunk abban, hogy a Q_1 és $Q_1^{\times}$ pontok közül melyik legyen a Q pont megfelelője, a kör és elilpszis között fennálló axiális affin vonatkozást felhasználhatjuk az ellipszis további pontjainak szerkesztésére, a kör minden egyes pontjának affin megfelelője az ellipszis egy pontja. Ha pl. a kör X pontjának megfelelőjét kívánjuk nyerni, akkor a szerkesztést úgy rendezzük be, hogy az X ponton át az affinitás tengelyére merőleges egyenest vezetünk, ez az egyenes a kör $QQ^{\times}$ átmérőjével parallel egyenes, s így az X pontra illesztett egyenes affin megfelelője a Q_1 és $Q_1^{\times}$ pontok összekötő egyenesével parallel egyenes lesz és illeszkedik az X pontra illesztett egyenes és affinitási tengely közös pontjára; az így megállapított egyenes ama pontja,

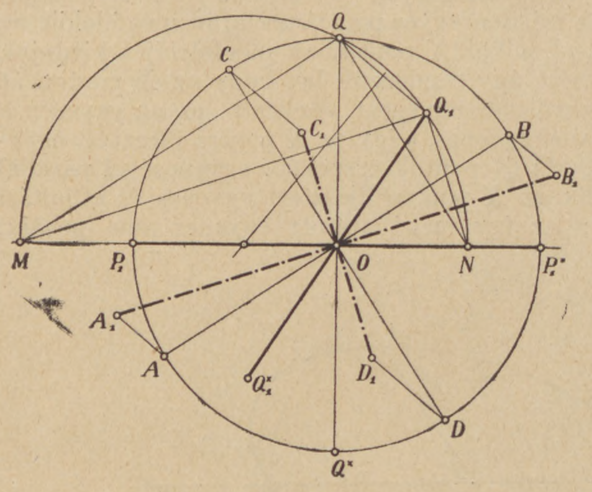


50. ábra.

melyben az X pontra illeszkedő affinitási sugár metszi, lesz az ellipszis keresett pontja. X_1. Amennyiben a megszerkesztett X_1 pontban az ellipszis érintőjét kívánjuk nyerni, úgy az X pontban megszerkesztjük a körérintőt, a t egyenest; ez egyenes metszi az affinitási tengelyt egy pontban, e pont és az X_1 pont összekötő egyenese lesz a kívánt érintő.

b) Konjugált átmérőpárral adott ellipszisnek adott K_1 pontra illeszkedő érintőit úgy szerkesztjük meg, hogy az adott K_1 pontnak megszerkesztjük affin megfelelőjét úgy, mintha az előbbi ábrában az X_1 ponthoz az X pontot kellene szerkeszteni; az így nyert K pontra illeszkedő körérintők affin megfelelői lesznek a keresett érintők stb. (50. ábra).

c) Konjugált átmérőpárral adott ellipszis egyenessel való metszéspontjainak vagy adott egyenessel parallel érintőinek szerkesztését a tárgyalt feladatok után itt mellőzhetjük. E helyett szerkeszszük meg újból az ellipszis tengelyeit (51. ábra). A tengelyekre vonatkozó ama szerkesztés, melyet az előző §-ban tárgyaltunk, jelen esetben nem alkalmazható, mert ellipszis és vele affin kör koncentrikus helyzetben vannak. A tengelyek szerkesztésére ismerni kell a kör rendszerében két oly egymásra merőleges egyeneset, melyek megfelelői megint egymásra merőlegesek. Ilyen egyeneseket úgy nyerünk, hogy Q és Q_1 két megfelelő pont távolságát merőlegesen megfelezzük, megállapítjuk a felező egyenes és affinitási tengely közös pontja körül rajzolt körnek, mely a felvett megfelelő pontpárra illeszkedik, az affinitás tengelyével való M és N metszéspontjait, akkor QM és QN a kör rendszerében, Q_1M és Q_1N az ellipszis rendszerében a kívánt egyenesek. A kör rendszeréhez tartozó egyenesekkel parallel körátmérők affin megfelelői az ellipszis tengelyei, ezek természetesen a Q_1M és Q_1N egyenesekkel parallel egyenesek lesznek.



51. ábra.

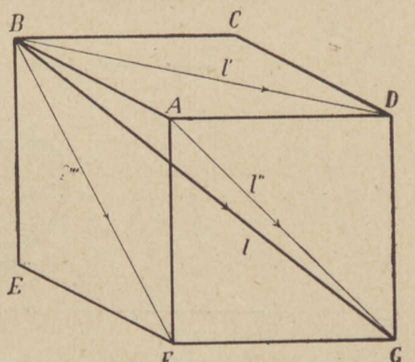
30. §. Kör klinogonális axonometrikus képe. Axonometrikus képsík, tengelykereszt és vetítősugár adott viszonylagos helyzete mellett síkjával, középpontjával és sugarával adott kör axonometrikus képét úgy szerkesztjük meg, hogy a síkot axonometrikus nyomvonala körül beforgatjuk az axonometrikus képsíkba, a beforgatott kör és a kör axonometrikus képe általában ferde axiális affinitásban lévő alakzatok s így a kör ferde axonometrikus képének szerkesztése különösebb nehézséget nem okoz.

Amennyiben klinogonális axonometriában csak a tengelykereszt képét és az egyes tengelyek rövidülési léptékeit ismerjük, akkor előzetes nagyobb konstrukciók nélkül csak egy-egy koordinátasíkban fekvő kör axonometrikus képét állapíthatjuk meg. Pl. az $[x, y]$ síkban fekvő kör axonometrikus képét úgy szerkesztjük meg, hogy a kör középpontjának axonometrikus képére illeszkedően megrajzoljuk az x és y tengelyekkel parallel egyeneseket, ezekre a kör középpontjától számítva felmérjük az adott léptékek szerint megrövidült körsugárt, a nyert pontok a kör axonometrikus képében egy konjugált átmérőpárnak végpontjai.

Már megjegyezzük, hogy kör klinogonális axonometrikus képét, ha a kör síkja általános helyzetű, legkönnyebben kavalierperspektivában szerkeszthetjük meg, természetesen az y tengely adott rövidülési léptéke mellett. T. i. ekkor az I. köt. 176. §. szerint az általános helyzetű körsík bármely pontjának az axonometrikus képsíkba forgatottja nagyobb nehézség nélkül nyerhető.

31. §. Körlap árnyéka. Parallel projekcióban adott körlap árnyékának árnyékhatára parallel világítás mellett valamely képsíkon a kör ferde parallel képe. E szerint itt külön a körlap árnyékának szerkesztésével nem is kell foglalkozni. De ha tekintetbe vesszük műszaki rajzokon legtöbbször alkalmazott 45°-os parallel világítás szerkesztésbeli előnyeit, akkor talán nem lesz egészen felesleges 45°-os parallel világítás mellett a kör árnyékáról megemlékezni főleg azokban az esetekben, ha a kör síkja és az árnyékfelfogó képsík speciális viszonylagos helyzetű.

A gyakorlatban oly körlap árnyékát kell szerkeszteni valamely függélyes falsíkon, mely körlap síkja *a)* a fal síkjával parallel, *b)* vízszintes sík, *c)* a fal síkjára merőleges függélyes sík. Mielőtt az egyes esetek tárgyalására áttérnénk, előre bocsátjuk azt, hogy műszaki ember körlap bármely árnyékának szerkesztésénél a kört két érintő négyzetbe foglalja, de úgy, hogy az egyik négyzet oldalai a másik négyzet átlóival parallel helyzetben legyenek, e négyzetek árnyékait megállapítja és ezekbe berajzolja a kör ellipszis alakú árnyékát. Az általunk végzendő körárnyék szerkesztésénél legyen az árnyékfelfogó sík a második képsík és a kör egyik érintő négyzetének két oldala legyen a második képsíkra merőleges ; de akkor a négyzetek árnyékának szerkesztésénél szerepelnek a második képsíkkal parallel, horizontális vagy profil síkban fekvő és a második képsíkkal 45°-os szöget bezáró egyenesek, ill. távolságok. Mindenekelőtt megvizsgáljuk, hogy ilyen speciális helyzetű egyeneseken lévő távolságok árnyékai a képsík mily egyeneseire esnek és mily összefüggés van a távolság eredeti és árnyékhossza között.



52. ábra.

Kitűzött vizsgálataink megejtése végett vegyük fel egy kocka három egy csúcsban összefutó lapját kavalierperspektivában alulnézetben (52. ábra). Az ábrában feltüntetett helyzet és jelölés mellett *B*, *G* pontok összekötő egyenese a 45°-os parallel világításnál a fénysugár axonometrikus képe, míg *B*, *D* pontok, ill. *A*, *G* pontok, ill. *B*, *F* pontok összekötő egyenese a fénysugár első, ill. második, ill. harmadik képe. Az ábra alapján megállapíthatjuk a következőket :

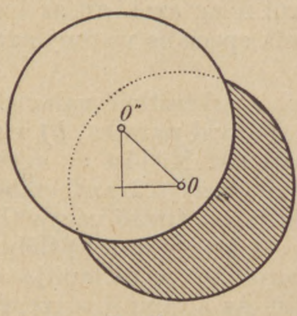
1. képsíkkal parallel egyenes árnyéka az eredeti egyenessel parallel és ez egyenesre illeszkedő távolság árnyéka az eredeti távolsággal egyenlő.

2. képsíkra merőleges egyenes árnyéka a fénysugár második képével parallel és ezen távolság úgy aránylik a távolság árnyékhosszához, mint a kocka élhossza aránylik a kocka oldallapjának átlójához.

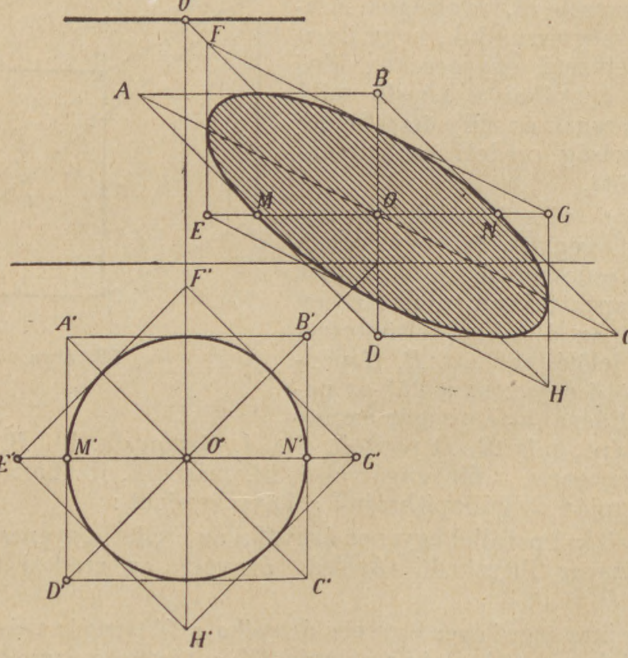
3. fénysugár első képével parallel egyenes árnyéka függélyes egyenes és ezen lévő távolság úgy aránylik a távolság árnyékhosszához, mint a kocka oldallapjának átlója aránylik a kocka éléhez.

4. fénysugár harmadik képével parallel egyenes árnyéka vízszintes egyenes és ezen lévő távolság úgy aránylik a távolság árnyékhosszához, mint a kocka oldallapjának átlója aránylik a kocka éléhez.

a) *Falsíkkal parallel síkban fekvő kör árnyéka.* Tudjuk, hogy ilyen kör árnyéka, mivel képsíkkal parallel helyzetű síkban fekvő alakzatnak árnyéka az eredeti alakzattal kongruens, szintén kör (53. ábra). Ez esetben tehát csak a kör középpontjának árnyékát kell megszerkeszteni. A középpont árnyéka a középpont második képére illeszkedő és a fénysugár második képével parallel egyenesen van; helyzetét ez egyenesen úgy nyerjük, hogy a középpont második képére illeszkedő függélyes egyenesre felmérjük a középponttól számítva lefelé a középpont második távolságát; a távolság végpontján átmenő vízszintes egyenes kimetszi az első egyenesen a középpont második árnyékát. A szerkesztés helyességéről közvetlenül meggyőződhetünk azáltal, hogy rajzunkat kiegészítjük az $x_{1,2}$ tengellyel és a középpont első képével és megállapítjuk ekkor 45°-os parallel világítás mellett a középpont második árnyékát.

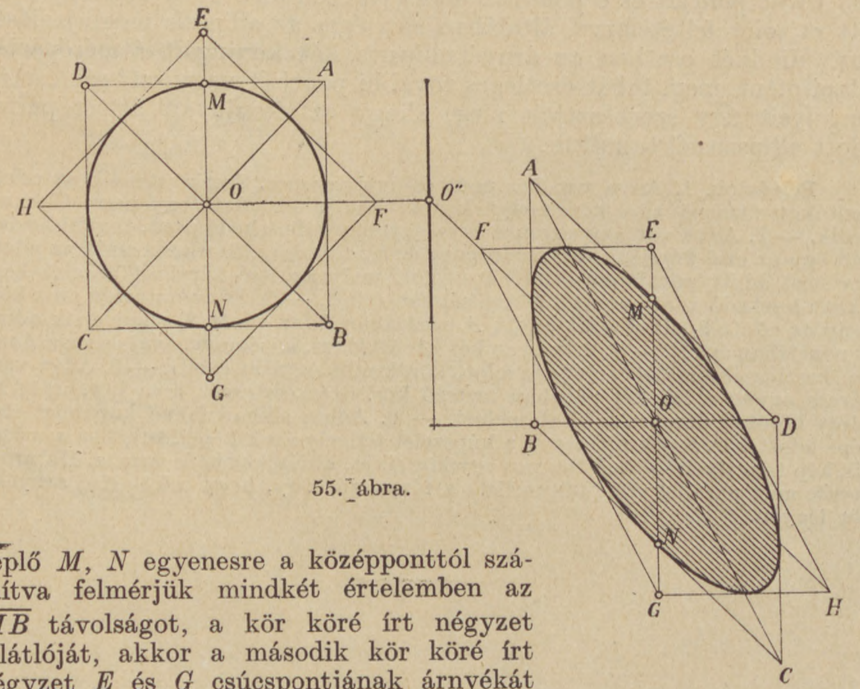


53. ábra.



54. ábra.

b) *Horizontális síkban fekvő kör falsíkra vetett árnyéka.* Mindenekelőtt megszerkesztjük a második képével adott kör középpontjának a falra vetett árnyékát, legyen ez O (54. ábra). Az O ponttól számítva felmérjük a kör sugarát mindkét éretlemben e pontra illeszkedő vízszintes és függélyes egyenesre. A nyert M és N pontok a második képsíkkal parallel körátmérő végpontjainak árnyékai, míg a B és D pontok a kör köré írt első érintő négyzet ama szemközt fekvő csúcspontjainak árnyékai, mely csúcspontokra illeszkedő négyzetátló a fénysugár első képével parallel. Mivel a kör köré írt első négyzet két oldala a második képsíkkal parallel és két oldala második vetítősugár, a négyzet árnyéka oly parallelogramma, melynek két oldala vízszintes és két oldala a fénysugár második képével parallel egyenes. Ezt tudva, az M, N, B, D pontok felhasználásával megrajzolhatjuk az első körülírt négyzet árnyékát. A nyert parallelogrammát még kiegészítjük a hiányzó egyik átlóval és a hiányzó egyik oldalfelezővel. Ha az árnyékban sze-



55. ábra.

replő M, N egyenesre a középponttól számítva felmérjük mindkét értelemben az $\overline{MB}$ távolságot, a kör köré írt négyzet félátlóját, akkor a második kör köré írt négyzet E és G csúcspontjának árnyékát szerkesztettük meg. Mivel pedig a második négyzet oldalai az első négyzet átlóival parallel egyenesek, a második négyzet oldalainak árnyékai a már megrajzolt árnyékparallelogramma átlóival parallel egyenesek lesznek, így a második négyzet oldalainak árnyékai megrajzolhatók, mert E és G a második árnyékparallelogramma két szemközt fekvő csúcspontja.

Megjegyzendő, hogy az ábrában a kör második képéhez csatoltuk első képét is, de csak azért, hogy az árnyékszerkesztés egyes lépéseit könnyebben követhessük.

c) *Profil síkban fekvő kör falsíkra vetett árnyéka.* Legyen megadva a kör második és harmadik képe (55. ábra). A kör árnyékának szerkesztésénél elsősorban meghatározzuk a kör középpontjának árnyékát, az így nyert pontra illesztünk vízszintes és függélyes egyenest és ugyanezen ponttól számítva felmérjük mindkét egyenesre mindkét értelemben a kör sugarát, így nyerjük az ábrában szereplő M, N és B, D pontok árnyékait. A nyert árnyékpontok alapján megrajzolhatjuk a kör köré írt első négyzetnek árnyékát. A kör köré írt második négyzet árnyékának szerkesztése előtt az első árnyékparallelogrammába még berajzoljuk a hiányzó oldalfelezőt és átlót. Ha a középpont árnyékára illeszkedő függélyes egyenesre a középponttól számítva felmérjük a $\overline{BM}$ távolságot, nyerjük a második körülírt négyzet $\overline{EG}$ átlójának árnyékát. Az E, G pontok a második árnyékparallelogrammának szemközt fekvő csúcspontjai, ám ugyanennek a parallelogrammának oldalai az első árnyékparallelogramma átlóival parallel egyenesek s így ez a parallelogramma is megrajzolható.

Úgy a *b)*, mint a *c)* esetben megszerkesztettük az árnyékellipszisnek nyolc pontját és e pontok mindegyikében az érintőt és ez gyakorlott rajzolót feltételezve, általában elégséges az ellipszis megrajzolásához. Mindkét esetben az árnyékellipszis két konjugált átmérőpárját állapítottuk meg, tehát esetleges további pontjait vagy szükség esetén tengelyeit úgy szerkesztjük meg, ahogy azt konjugált átmérőpárral adott ellipszisnél tanultuk.

Feladatok. 1. Adva van két pont és egy egyenes. Szerkesztessék az adott pontokon átmenő ama kör, melynek középpontja az adott egyenesre illeszkedik. — 2. Adva van egy egyenes és ez egyenesre illeszkedő pont, továbbá adva van egy az első képsíkra illeszkedő pont és a t távolság. Szerkesztessék az adott egyenest adott pontjában érintő ama kör, mely az első képsíkot az első képsíkra illeszkedő adott ponttól t távolságban érinti. — 3. Szerkesztessék ama kör, mely az adott $\mathbf{S}_1$ síkot e sík adott A pontjában és az adott $\mathbf{S}_2$ síkot e sík adott B pontjában érinti. — 4. Adva van két kör síkjával, középpontjával és sugarával. Szerkesztessék ama kör, mely az adott körök mindegyikét érinti. — 5. Adva van, három egymást két-két pontban metsző kör. Szerkesztessék ama kör, mely az adott köröket derékszög alatt metszi. — 6. Adott síkban fekvő kúpszelet első képe adott kör. Szerkesztesenek a kúpszelet tengelyeinek képei, továbbá a második kép tengelyei. — 7. Adva van egy kör síkja, középpontja és sugara. Határoztassék meg parallel világítás mellett a fénysugár úgy, hogy a kör első árnyéka kör legyen.

MÁSODIK FEJEZET.

KÚPFELÜLETEK, HENGERFELÜLETEK.

32. §. Kúp- és hengerfelületek. *Kúpfelület általában egy adott térgörbe ama egyszerű szelőinek összessége, melyek a tér tetszőleges pontjára illeszkednek.* A térgörbe a kúpfelület vezérgörbéje, a tetszőleges pont a kúp csúcspontja, a szelők, melyekkel a kúpfelületet előállítottuk, a kúp alkotói. A kúpfelületet egyenesekből nyertük, tehát a kúpfelület egyenes vonalú felület. Minden pont, mely a kúpfelület valamely alkotójára illeszkedik, a kúpfelület pontja, tehát a kúpfelület pontjai egyenes pontsorok egyméretű sokasága. Kúpfelület síkmetszetén értjük az alkotók nyompontjainak összességét egy adott síkban, e pontok síkgörbét adnak. Ha e síkgörbe minden pontját összekötjük a kúp csúcspontjával, akkor az összekötő egyenesek kimerítik a kúp alkotóit, mert a kúpnak nincs oly alkotója, mely a síkmetszet síkját ne metszené. Ebből következik, hogy minden kúp, melynek vezérgörbéje adott térgörbe, mint oly kúp állítható elő, melynek vezérgörbéje síkgörbe, a síkgörbe a kúp csúcspontjára nem illeszkedő síkkal való síkmetszete. *A következőkben általában feltesszük azt, hogy a kúp vezérgörbéje síkgörbe.* Síkgörbe projiciáló kúpjának tárgyalásánál megismertük a kúp érintősíkjának és érintőjének fogalmát, most pedig kimutattuk, hogy minden kúp tulajdonképpen projiciáló kúpnak minősíthető, tehát ismétlésképpen mondhatjuk, hogy a kúp érintősíkja két szomszédos alkotó összekötő síkja, a kúp érintősíkja a kúpot egész alkotó, az érintési alkotó mentén érinti; az érintősíkra illeszkedő egyenes a kúpfelület egy érintője, az érintő érintési pontja az a pont, melyben az érintő az érintési alkotót metszi. A kúp valamely érintősíkját úgy szerkesztjük meg, hogy a vezérgörbe érintőjét összekötjük a kúp csúcspontjával, ugyanakkor az érintési alkotó az érintő érintési pontjára illeszkedő kúpalkotó. Továbbá *a kúp valamely síkmetszetének egy pontjában az érintőt úgy nyerjük, hogy megszerkesztjük a kúp ama érintősíkját, mely a kúpot a pontra illeszkedő alkotó mentén érinti, e sík és a síkmetszet síkjának közös egyenese a keresett érintő.*

Minden a kúp csúcspontjára illeszkedő sík a kúpot alkotókban metszi, a síkmetszet ez esetben alkotókból áll, éspedig annyi alkotóból, ahány pontban a sík a kúp vezérgörbéjét metszi, mert egy metszéspont és a kúp csúcspontja mindig meghatároz egy a síkra illeszkedő kúpalkotót, mivel két pontja a síkra illeszkedő pont.

Kúpfelület rendszámán értjük a tér tetszőleges egyenesének és kúpfelület közös pontjainak számát. Egyenes és kúpfelület közös pontjait úgy szerkesztjük meg, hogy megszerkesztjük a kúpnak az egyenesre illeszkedő tetszőleges síkmetszetét, a síkmetszet és egyenes közös pontjai a keresett pontok. A kúp rendszáma tehát egyezik a kúp síkmetszetének rendszámával, de a síkmetszet rendszáma egyezik a kúp vezérgörbéjének rendszámával, tehát a vezérgörbe rendszáma egyúttal a kúp rendszáma.

Kúpfelületnek van osztályszáma is, ez a tér tetszőleges pontjára illeszkedő érintősíkok száma.

Oly kúpfelület, melynek csúcspontja végtelenben van, hengerfelület. Tehát a hengerfelület alkotói parallel egyenesek, vezérgörbéje lehet térgörbe, de ekkor legtöbbször síkgörbével helyettesítjük, a hengerfelület valamely síkmetszetével. A hengerfelület síkmetszetét, érintősíkját, érintőjét stb. ugyanúgy szerkesztjük meg, mint a kúpnál. A hengerfelületnek az alkotókkal parallel síkmetszete alkotókból áll, az alkotók száma a vezérgörbe rendszámával egyezik. Hengerfelületnek is van rendszáma és osztályszáma, e számokat ugyanúgy határozzuk meg, mint a kúpnál.

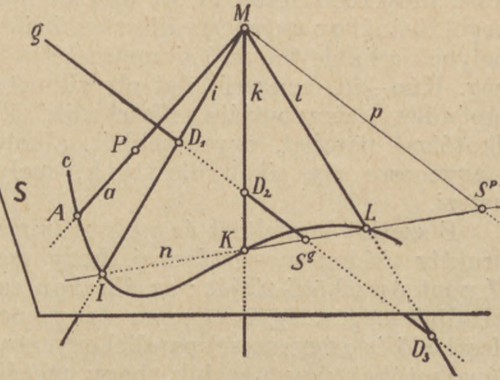
A hengerfelületet az egyetlen végtelenben fekvő sík alkotókban metszi, mert a hanger oly kúp, melynek csúcspontja a végtelenben van, tehát a végtelenben fekvő sík e kúp csúcspontjára illeszkedő sík. A végtelenben fekvő alkotóhoz tartozó érintősík, amennyiben nem azonos a végtelenben fekvő síkkal, a felület asymptotikus érintősíkja. Minden asymptotikus érintősík illeszkedik a vezérgörbe asymptotájára és a henger alkotóival parallel.

A következőkben főleg másodrendű kúp- és hengerfelületekre vonatkozó feladatokkal fogunk foglalkozni, vagyis oly felületekkel, melyek vezérgörbéje másodrendű vonal, tehát ellipszis, hyperbola vagy parabola. Oly hengerfelület, melynek vezérgörbéje ellipszis, elliptikus henger ; ha hyperbola, akkor a henger hyperbolikus ; ha parabola, akkor a henger parabolikus. *A másodrendű kúpokat* azonban *nem osztályozhatjuk a vezérgörbéül adott kúpszelet minősége szerint*, ennek okával későbben fogunk megismerkedni. A másodrendű kúpok közül külön kiemeljük az egyenes körkúpot. *Az egyenes körkúp vezérgörbéje kör és csúcspontja a kör középpontjára illeszkedő és a vezérkör síkjára merőleges egyenesen van ;* erről az egyenesről azt fogjuk mondani, hogy az a kúp tengelye. Az egyenes körkúp származtatásából következik, hogy minden alkotója a tengellyel egyenlő szöget alkot, tehát a tengelyre illeszkedő egyenes forgásából is származtatható, azért ugyanezt a kúpot még forgási kúpnak is mondhatjuk. Az egyenes körkúptól való megkülönböztetés kedvéért beszélünk ferde körkúpról, e másodrendű kúp vezérgörbéje kör, de csúcspontja nem illeszkedik a kör középpontján átmenő és a kör síkjára merőleges egyenesre.

Oly hengerfelület, melynek alkotói a vezérgörbe síkjára merőlegesek, egyenes henger. Az egyenes hengerek közül külön kiemeljük azt, melynek vezérgörbéje kör, ez az egyenes körhenger. Másodrendű hengernél a vezérgörbe középpontjára illeszkedő és a henger alkotóival parallel egyenest a henger tengelyének nevezzük. Egyenes körhengernél a henger alkotói a henger tengelyétől egyenlő távolságban vannak, tehát úgy is származtatható, hogy egyenest egy vele parallel tengely körül forgatunk, azért az egyenes körhengert forgási hengernek is mondjuk.

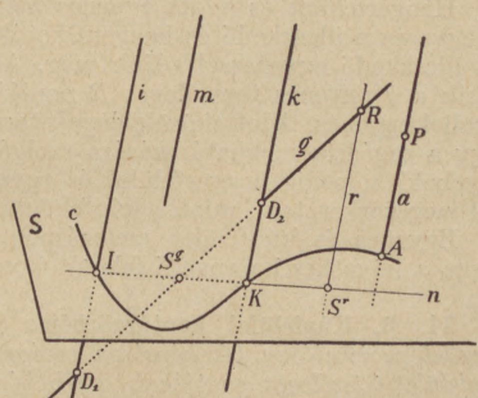
33. §. Kúp- és hengerfelület ábrázolása. Egyenesnek kúp- és hengerfelülettel való metszéspontjainak szerkesztése. Kúpfelület ábrázolását lényegben elintéztük, ha vezérgörbéjét és csúcspontját ábrázoltuk. Ugyanúgy hengerfelületet akkor ábrázoltunk, ha vezérgörbéjét és alkotóinak irányát ábrázoltuk.

Legyen valamely képsíkon a vezérgörbe képe c és csúcspontjának képe M (56. ábra). A vezérgörbe és csúcspont egy-egy képével az eredeti kúp természetesen nincs meghatározva. Így az 56. ábrán adott kúp végtelen sok különböző kúp orthogonális, ill. klinogonális vagy centrális projekciójának tekinthető. Az általunk ábrázolt kúp adott, ha pl. azt mondjuk, hogy a kúpot kavalierperspektívában ábrázoltuk, vezérgörbéjének síkja az alaprajz síkja, de akkor is még fel kell venni a tengelykereszt ferde parallel képét, az y tengely rövidülési léptékét és a csúcspont alaprajzát. Mivel sok esetben az eredeti kúp meghatározására szükséges adatokat nem vesszük fel, konstruktív feladatok megoldásánál egyes elemeket még tetszőlegesen választhatunk.



56. ábra.

A kúp most nyujtott ábrázolásához hasonlóan ábrázolhatjuk a hengerfelületet (57. ábra). Megadjuk a vezérgörbe képét és az alkotók irányát, az irányt felvettük az m egyenes képével.



57. ábra.

A kúp- és hengerfelület fent vázolt hiányos ábrázolási módját előszeretettel használjuk akkor, ha e felületekre vonatkozó helyzetgeometriai feladatok konstruktív kivitelének szemléltetését kívánjuk bemutatni. Így mindkét ábra mutatja, miként kell e felület tetszőleges alkotóját ábrázolni. A kúp tetszőleges alkotóját ábrázoltuk azáltal, hogy a vezérgörbe tetszőleges A pontjának képét összekötöttük a csúcspont képével, a nyert egyenes a kúp, mondjuk a alkotójának képe. A hengerfelület egy alkotóját pedig ábrázoltuk, ha a vezérgörbe A pontjának képére illeszkedő és az m egyenes képével parallel egyenest vezettünk. Mindkét esetben a felület egy-egy pontját is ábrázoltuk. Az ábrák szemlélete mutatja, hogy e felületek egy pontját úgy ábrázoljuk, hogy a pont képére illeszkedően megrajzoljuk annak az alkotónak képét is, melyre a felületi pont illeszkedik.

Mindkét ábrán szemléltetjük azt is, hogy hogyan kell egy-egy ilyen felületnek metszéspontját tetszőleges g egyenessel megszerkeszteni. ***Általában egyenes és felület közös pontjait úgy szerkesztjük meg, hogy megszerkesztjük az egyenesre illeszkedő tetszőleges sík és felület síkmetszetét, az egyenes és síkmetszet közös pontjai a keresett pontok.*** Az egyenesre illeszkedő síkok felett szabadon rendelkezünk s így a feladat megoldásánál az egyenesre illeszkedő síkok közül azt fogjuk választani, melynek a felülettel való síkmetszetét a legkönnyebben szerkeszthetjük meg. Kúp-, ill. hengerfelület oly síkmetszete, mely síkmetszet síkja a kúpfelület csúcspontjára illeszkedik, ill. hengerfelületnél a henger alkotóival parallel, egyenesekből, alkotókból tevődik össze, tehát a g egyenesre oly síkot illesztünk, mely sík a felületet alkotókban metszi.

E szerint kúpfelület és g egyenes metszéspontjait úgy fogjuk konstruktív módon meghatározni, hogy megszerkesztjük a g egyenes és M pont összekötő síkját ; az ábrában ezt a síkot két metsző egyenessel adjuk meg, az egyik egyenes a g egyenes, a másik egyenes az M pontra illeszkedő és g egyenessel parallel egyenes, p. A segédsík által kimetszett kúpalkotókat úgy nyerjük, hogy megállapítjuk a segédsík n nyomvonalát a vezérgörbe síkján, a nyomvonal egyik pontja a g egyenesnek, másik pontja a p egyenesnek metszéspontja a vezérgörbe síkján : e nyomvonal és vezérgörbe I, K,... stb. közös pontjai felé menő kúpalkotók a kimetszett alkotók, i, k,... stb. A kimetszett alkotók illeszkedési pontjai a g egyenessel a kívánt metszéspontok, D_1, D_2,... stb.

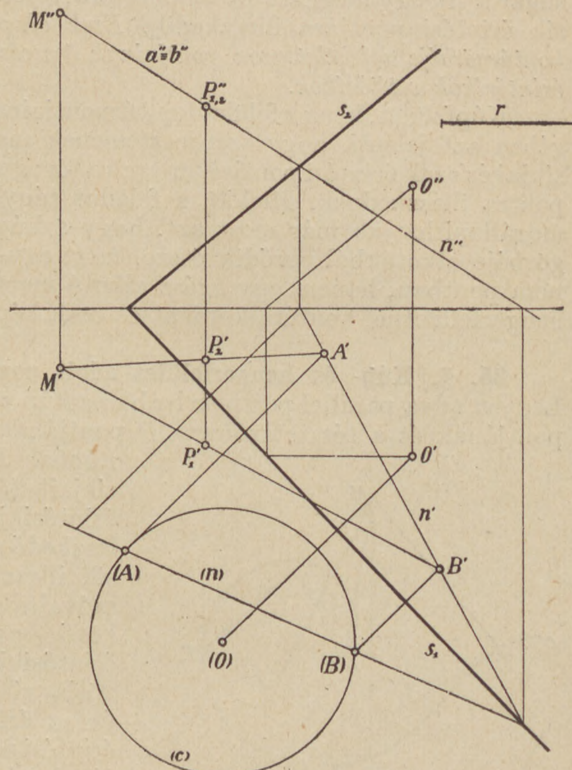
Hengerfelület és adott egyenes metszéspontjainak szerkesztésénél az egyenesre illeszkedő és hengeralkotókkal parallel segédsíkot szintén két illeszkedő egyenessel adjuk meg. Az egyik az adott g egyenes, a másik a g egyenes tetszőleges R pontjára illeszkedő és m egyenessel parallel egyenes. Adott körülmények természetesen arra késztethetnek, hogy a segédsík meghatározására szolgáló egyeneseken változtassunk. Egyebekben pedig hengerfelület és egyenes metszéspontjait ugyanúgy kell megszerkeszteni, mint a kúpfelületnél.

Egyenes és kúpfelület metszéspontjának szerkesztésére vezetjük vissza a következő alapvető feladat konstruktív kivitelét :

34. §. Kúpfelület kontúrgörbéje. *Szerkesztessék meg orthogonális parallel projekcióban két képsíkon vezérgörbéjével és csúcspontjával adott kúpfelület tetszőleges pontjának egyik képe alapján e pont hiányzó másik képe.*

A feladatot az 58. ábrában oldottuk meg. A kúp legyen egy ferde körkúp, vezérkörének síkja **S** (s_1, s_2), középpontjának második képe O'', sugara r, a kúp csúcspontja $M(M', M'')$ és a kúpfelületre illeszkedő pont második képe P''. Ha adva van egy pont második képe, akkor az eredeti pont mértani helyeként megadtuk a pont második képére illeszkedő második vetítősugarat. Feladatunk tehát abban áll, hogy szerkesszük meg a kúpfelület és ismeretes második vetítősugár metszéspontjait. A vetítősugárra illeszkedő sík második vetítősík, tehát a P'' pontra illeszkedő második vetítősugár és a kúp csúcspontja által meghatározott segédsík oly vetítősík, melynek második nyomvonala az

M'' és P'' pontok összekötő egyenese. A segédsík a vezérgörbe síkját az n egyenesben metszi, ennek az egyenesnek második képe, n'', az $|M''P''|$ egyenessel azonos egyenes, első képe, mint az **S** síkra illeszkedő egyenes, meghatározható, ez n'. Miután megszerkesztettük a segédsík n nyomvonalát a vezérgörbe síkján, további feladatunk abban áll, hogy a vezérkör és n egyenes közös pontjait állapítsuk meg. E végett a vezérgörbe síkját a benne fekvő körrel és n egyenessel együtt beforgatjuk valamely képsíkba. Az ábrában a síkot az első képsíkba forgattuk és az n egyenes és c kör leforgatásában nyert közös pontjait felállítottuk. Ha az így nyert A és B pontok első képeit összekötjük a kúp csúcsának első képével, akkor megszerkesztettük a segédsík által kimetszett alkotók első képeit. A P'' pontra illeszkedő rendező kimetszi az alkotók első képein a keresett pontokat, ezek P_1' és P_2'. Vagyis a pont második képével adott kúpfelületi pont a jelen esetben két pont második képe, e pontok a második képsíkra nézve födőpontok.



58. ábra.

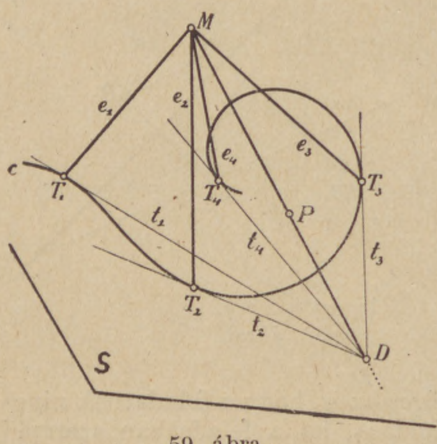
Ha a tárgyalt feladatban szereplő kúpfelület helyett hengerfelületet választunk, akkor a feladat megoldásának menete az előbbihez teljesen hasonló, mert ekkor a kúp csúcspontja egy m egyenessel megadott végtelenben fekvő pont.

Mindkét esetben lehetséges, hogy a feladatnak mindig van megoldása, de lehetséges az is, hogy a feladatnak nincs megoldása. A feladatnak nincs megoldása, ha a feladatban szereplő segédsík, a második vetítősík, a vezérkör síkját oly n egyenesben metszi, melynek a körrel közös pontja nincs, az n egyenes a kört képzetes pontokban metszi. A feladat szempontjából átmeneti esettel állunk szemben, ha két megoldás helyett egy megoldást nyerünk ; ez akkor következik be, ha az n egyenes a vezérkört érinti. Akkor a P'' pontra illeszkedő vetítősugár a kúpfelületet két szomszédos pontban metszi, a vetítősugár a kúpfelület érintője.

Általában valamely ábrázolt felület minden olyan pontja, mely pontra illeszkedő vetítősugár a felület érintője, az ábrázolás szempontjából a felületnek fontos pontja. E pontok a felületen általában egy görbe vonal mentén helyezkednek el, ez a görbe vonal a felület körrajz- vagy kontúrgörbéje, e görbe képe a felület képkörrajza vagy képkontúrja. Ha a kontúrgörbe egy pontját megszerkesztettük és e pontban megállapítjuk a felület érintősíkját, akkor ez az érintősík vetítősík, mert a felület reguláris pontjához tartozó érintők közül egy vetítősugár. Megfordítva, ha a felület egy pontjához tartozó érintősík vetítősík, akkor az érintősíkra illeszkedő érintők közül van egy vetítősugár. Mert vetítősugárra illeszkedő síkban a vetítősugarak parallel sugársort alkotnak és e sugársornak mindig van egy oly sugara, mely sugár a sík egy meghatározott pontjára, a jelen esetben az érintő vetítősík érintési pontjára illeszkedik. *Ezek alapján mondjuk, hogy felület kontúrgörbéje a felület azon pontjainak összessége, mely pontokhoz tartozó érintősíkok vetítősíkok.*

Kúpfelület, hengerfelület kontúrpontjainak szerkesztése tehát lényegében azt jelenti, hogy szerkesztessenek meg e felületek ama érintősíkjai és ezek érintési pontjai, melyek a tér egy pontjára, a vetítési középpontra illeszkednek. Mielőtt e feladat tényleges kivitelére áttérnénk, megállapíthatjuk már most azt, hogy a kúp- és hengerfelület kontúrgörbéje alkotókból tevődik össze, mert egy-egy érintősík e felületeket nem pontban, hanem egy egész alkotó mentén érinti, tehát a kúp- és hengerfelületnél kontúralkotókat és ezek képeit fogjuk szerkeszteni.

35. §. Kúp- és hengerfelület adott pontra illeszkedő érintősíkjai. Legyen adva parallel perspektívában a kúp c vezérgörbéjének, M csúcspontjának és a tér tetszőleges P pontjának képe. Szerkesszük meg a kúpnak P pontra illeszkedő érintősíkjait (59. ábra). A kúp minden érintősíkja a kúp csúcspontjára illeszkedő sík, tehát a keresett érintősík illeszkedik az M és P pontra, szóval illeszkedik e két pont összekötő egyenesére. A kúp minden érintősíkjának nyomvonala a vezérgörbe síkján a vezérgörbe érintője, és az érintőnek érintési pontja az érintési alkotónak a vezérgörbe síkjával való metszéspontja. A keresett sík nyomvonala a vezérgörbe síkján e szerint a vezérgörbe érintője; mivel egy érintősíkra illeszkedő egyenesek metszik egymást, kell, hogy $|MP|$ egyenes a megállapítandó érintősíknak nyomvonalát messe, ez a pont csak ott lehet, ahol az $|MP|$ egyenes a vezérgörbe síkját metszi.



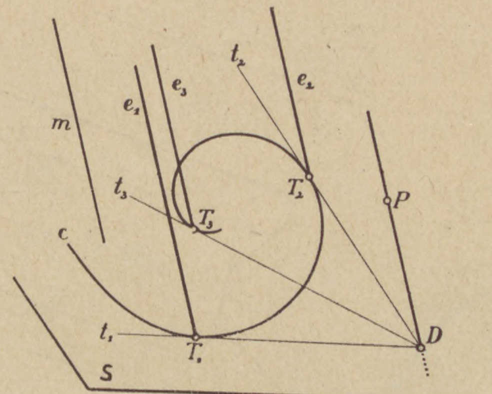
59. ábra.

Vagyis a kívánt érintősíkokat úgy nyerjük, hogy megszerkesztjük az $|MP|$ egyenesnek D metszéspontját a vezérgörbe síkjával, megállapítjuk a vezérgörbének e pontra illeszkedő t_1, t_2, t_3,... érintőit, valamint ez érintők T_1, T_2, T_3,... érintési pontjait és e pontokhoz tartozó e_1, e_2, e_3,... érintési alkotókat, akkor minden érintősíknak három egyenesét ismerjük; így ha a keresett érintősík jele $\mathbf{T}_i$, akkor

$$\mathbf{T}_i \equiv [|MP|t_i] \equiv [|MP|e_i] \equiv [t_i e_i].$$

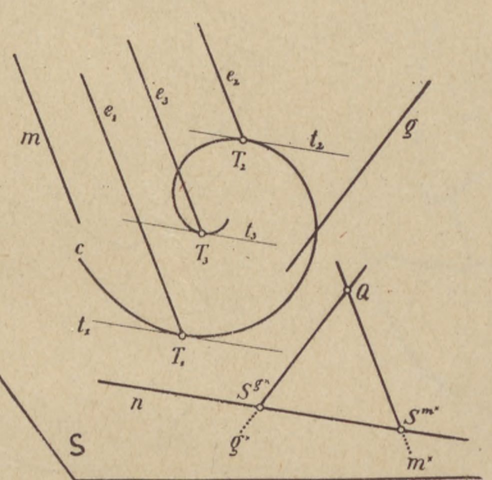
Kúpfelületnek adott végtelenben fekvő pontjára illeszkedő, azaz a tér adott g egyenesével parallel érintősíkját úgy szerkesztüjk meg, hogy a kúp csúcspontjára illeszkedő adott egyenessel parallel g^x *egyenest vezetünk, ez egyenes metszi a vezérgörbe síkját a D pontban, a D pontból a vezérgörbéhez vont érintők bármelyike a* g^x *egyenessel együtt meghatározza a keresett érintősíkot.*

Támaszkodva kúpfelületnél alkalmazott ama szerkesztésre, mellyel adott pontra illeszkedő éiintősíkját megállapítottuk, mondhatjuk, hogy *hengerfelületnek a tér tetszőleges pontjára illeszkedő érintősíkját úgy nyerjük, hogy megszerkesztjük az adott pontra illeszkedő és a hengerfelület alkotóival parallel egyenest, meghatározzuk ez egyenesnek a vezérgörbe síkjával való D metszéspontját, megrajzoljuk a vezérgörbének e ponton átmenő érintőit, akkor minden érintő az adott ponttal meghatároz egy-egy síkot a kívánt érintősíkokból* (60. ábra).



60. ábra.

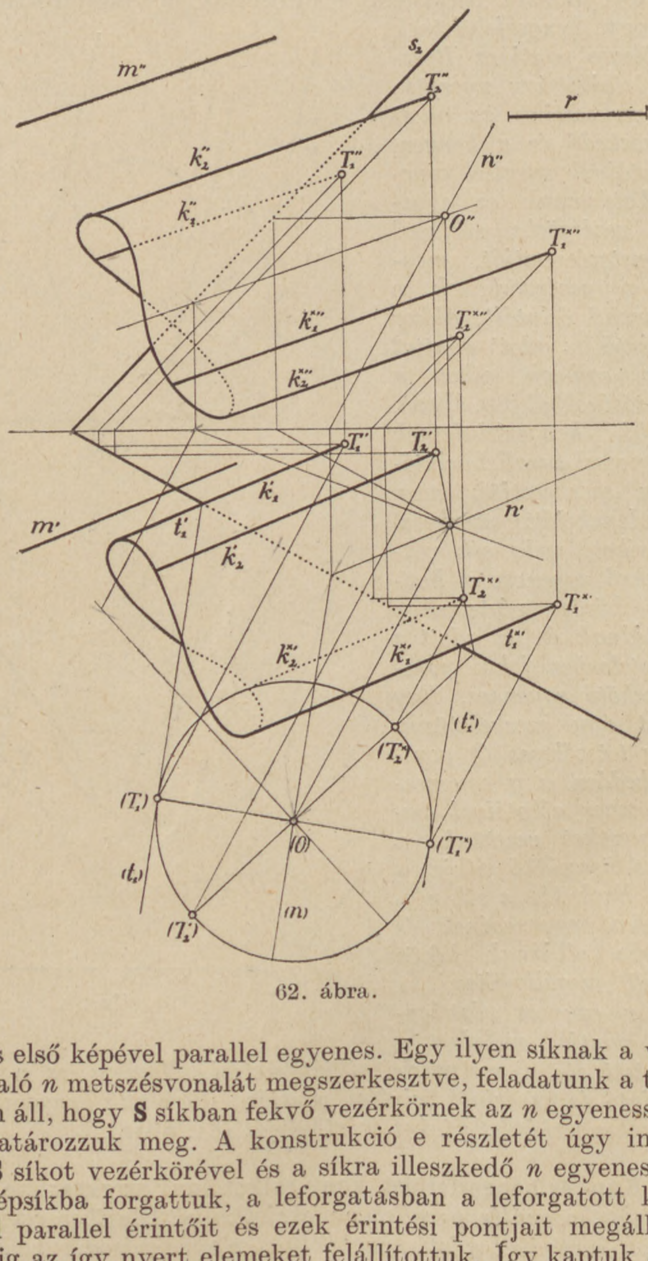
Továbbá hengerfelületnek adott g egyenessel parallel érintősíkját úgy szerkesztjük meg, hogy mindenekelőtt szerkesztünk oly síkot, mely sík végtelenben fekvő egyenese a hengeralkotók közös végtelenben fekvő pontjának és az adott g egyenes végtelenben fekvő pontjának összekötő egyenese. Egy ilyen síkot úgy szerkesztünk, hogy a tér tetszőleges Q pontjára illeszkedően a g egyenessel és a henger alkotóival parallel egyeneseket vezetünk, a két egyenes összekötő síkja a kívánt sík. Ezekután e sík végtelenben fekvő egyenesének és a vezérgörbe síkjának közös pontját kell megállapítani, e pont ama n egyenes végtelenben fekvő pontja, melyben a megszerkesztett sík a vezérgörbe síkját metszi. Minden az n egyenessel parallel érintő és az érintő érintési pontjára illeszkedő hengeralkotó meghatározza a hengerfelület kívánt érintősíkját (61. ábra).



61. ábra.

36. §. Kúp- és hengerfelület kontúralkotóinak szerkesztése. *Szerkesztessenek meg orthogonális parallel projekcióban két képsíkon vezérgörbéjével és az alkotók irányával adott hengerfelület első és második kontúralkotói*

Legyen (62. ábra) a felület ferde körhengerfelület, vezérkörének síkja **S** (s_1, s_2), középpontjának első képe O', sugara r, alkotóinak iránya m (m', m''). A hengerfelület első kontúralkotói azok az alkotók, mely alkotók menti érintősíkok első vetítősíkok. Minden első vetítősík első vetítősugárral parallel sík, tehát a hengerfelület első kontúralkotói érintő első vetítősíkok érintési alkotói. Az m egyenessel és első vetítősugárral parallel sík oly első vetítősík, melynek első nyomvonala az

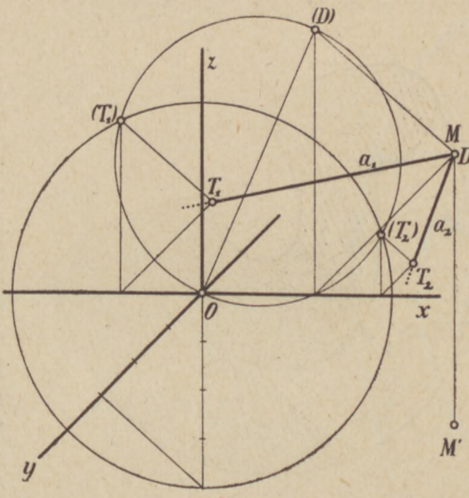


62. ábra.

m egyenes első képével parallel egyenes. Egy ilyen síknak a vezérgörbe síkjával való n metszésvonalát megszerkesztve, feladatunk a továbbiakban abban áll, hogy **S** síkban fekvő vezérkörnek az n egyenessel parallel érintőit határozzuk meg. A konstrukció e részletét úgy intéztük el, hogy az **S** síkot vezérkörével és a síkra illeszkedő n egyenessel együtt az első képsíkba forgattuk, a leforgatásban a leforgatott körnek (n) egyenessel parallel érintőit és ezek érintési pontjait megállapítottuk. végül pedig az így nyert elemeket felállítottuk. Így kaptuk a t_1 (t_1', t_1'')

és $t_1^\times$ ($t_1^{\times\prime}, t_1^{\times\prime\prime}$) érintőket és ezek T_1 (T_1', T_1'') és $T_1^\times$ ($T_1^{\times\prime}$, $T_1^{\times\prime\prime}$) érintési pontjait. Mivel a szerkesztett érintősík első vetítősík e síkra illeszkedő vezérgörbe érintőnek első képe és az érintési alkotó első képe azonos egyenesek, vagyis, ha a hengerfelület első kontúralkotói k_1 és $k_1^\times$, akkor $t_1' \equiv k_1'$, és $t_1^{\times\prime} \equiv k_1^{\times\prime}$, természetesen ugyanezen egyenesek második képei egymástól különböző egyenesek. Hasonlóan szerkesztettük meg a hengerfelület második kontúralkotóit is, ezek az ábrában szereplő jelölés szerint k_2 (k_2', k_2'') és $k_2^\times$ ($k_2^{\times\prime}$, $k_2^{\times\prime\prime}$).

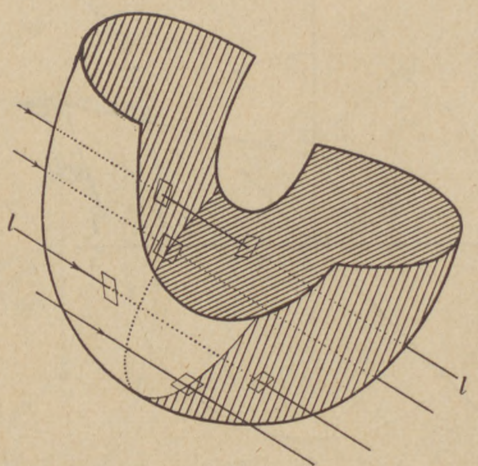
A 63. ábrában megszerkesztettük kavalierperspektívában egy ferde körkúp kontúralkotóit. Itt feltettük azt, hogy a vezérkör az alaprajz síkjában van, középpontja a koordinátarendszer kezdőpontja, sugara r, csúcspontjának axonometrikus képe M, alaprajza M', és $q_y = \frac{3}{4}$. Jelen esetben a kúpfelület kontúralkotói az axonometrikus vetítősugárral parallel érintősíkok érintési alkotói. A kúpfelület csúcspontjára illeszkedő vetítősugár a vezérgörbe síkját, az $[x, y]$ síkot, D pontban metszi, e pont axonometrikus képe és alaprajza az M pont axonometrikus képével azonos pont. Hogy a D pontból a vezérgörbéhez rajzolt érintők érintési pontjait nyerhessük, a kört és az $[x, y]$ síkban fekvő D pontot az x tengely körül beforgattuk az axonometrikus képsíkba, ott a szükséges szerkesztést elvégeztük, az érintési pontokat felállítottuk és a nyert érintési pontok axonometrikus képeit a kúpfelület csúcspontjának axonometrikus képével összekötöttük. A meghatározott a_1 és a_2 kúpalkotók a kúp perspektívájában a kontúralkotók.



63. ábra.

Kúpfelület és hengerfelület kontúralkotóinak szerkesztését alkalmazva orth. parallel projekcióban két képsíkon ábrázolt oly kúp- és hengerfelületre, melynek vezérgörbéje valamely, mondjuk az első, képsíkban van, akkor a kúpfelület első kontúralkotóinak első képei a vezérgörbének a csúcspont első képére illeszkedő érintői; második kontúralkotói a vezérgörbe ama pontjaira illeszkedő alkotók, mely pontokban a vezérgörbe érintői az $x_{1,2}$ tengelyre merőleges egyenesek. Továbbá hengerfelület első kontúralkotóinak első képei a vezérgörbének a hengeralkotó első képével parallel érintői; második kontúralkotói a vezérgörbe ama pontjaira illeszkedő alkotók, mely pontokban a vezérgörbe érintői ugyancsak az $x_{1,2}$ tengelyre merőleges egyenesek. Általában pedig, ha a kúpfelület vezérgörbéjének képét valamely képsíkban megrajzoltuk, akkor a kúp kontúralkotóinak képeit ugyanezen képsíkra vonatkozólag úgy nyerjük, hogy a vezérgörbe képének a csúcspont ugyanazon képsíkon lévő képére illeszkedő érintőit megszerkesztjük. Külön meg kell emlékezni oly hengerfelület kontúralkotóiról, melynek összes alkotói vetítősugarak, ekkor a hengerfelületet röviden vetítőhengernek mondjuk. Vetítőhenger bármely alkotóját kiválasztva és az alkotó menti érintősíkot megszerkesztve a hengerfelület oly érintősíkját nyerjük, mely érintősík vetítősík, vagyis ekkor a hengerfelület minden alkotója kontúralkotó. Mivel vetítőhenger minden alkotója kontúralkotó, ez esetben kontúralkotókról nem beszélünk, a hengerfelületnek a szokásos értelemben nincs képkörrajza, ekkor a hengerfelületnek van képe, képe a vezérgörbe projekciója.

37. §. Görbe felületek megvilágításáról általában. Feltételezett parallel világítás mellett mindig vannak a görbe felületet metsző fénysugarak. Legyen l egy ilyen fénysugár, akkor a fénysugár haladási értelmében a fénysugárra illeszkedő pontok során végighaladva, eljutunk a fénysugár és felület első metszéspontjához, a metszéspont kis környezetében lévő felületi pontok a felület egy kis részén helyezkednek el, a felület ilyen kis része felületelem. A felületelemnek két oldala van, az egyik oldal a fényforrás felé fordított, a másik a fényforrástól elfordított oldal. Felület és fénysugár első metszéspontjával kijelölt felületelemnek a fényforrás felé fordított oldala meg van világítva, míg másik oldala önárnyékban van. A fénysugár csak addig fénysugár, míg a felületet metszi, a metszésponttól számítva a fénysugár mint az első metszéspont árnyéktere folytatódik, ez az árnyéktér metszheti a felületet egy további pontban, utóbbi metszéspont által kijelölt felületelemnek a fényforrás felé eső oldala rávetett árnyékban van, míg másik oldala megint önárnyékban van, és ez ismétlődik a pont árnyékterének és görbe felület minden esetleges további metszéspontjánál (64. ábra). Ezen az alapon beszélhetünk a felület megvilágított, önárnyékban lévő és rávetett árnyékban lévő részéről. Tegyük fel, hogy a fénysugár a felület érintője, akkor a fénysugár és felület metszéspontja azonos e metszéspont árnyékterének és felület első metszéspontjával, szóval az érintő fénysugár érintési pontja *a)* pontja a felület megvilágított és önárnyékban lévő részének, *b)* vagy pontja a felület önárnyékban és rávetett árnyékban lévő részének. Ez csak úgy lehetséges, hogy az érintési pont a megvilágított résznek és önárnyékban lévő résznak, vagy önárnyékban lévő résznek és rávetett árnyékban lévő résznek közös határpontja. Mivel a fénysugárral parallel érintők érintési pontjai a felületen lévő görbe vonal mentén helyezkednek el, mondhatjuk, hogy e görbe vonal elválasztja a felület megvilágított részét az önárnyékban lévő részétől, illetőleg e vonal elválasztja a felület önárnyékban lévő részét a felület rávetett



64. ábra.

árnyékban lévő részétől, mindkét esetben azt mondjuk, hogy e vonal a felület önárnyékhatárgörbéje. *E szerint felület önárnyékhatárgörbéjén értjük a fénysugárral parallel érintők érintési pontjainak mértani helyét. Az önárnyékhatárgörbe pontjaira illeszkedő fénysugarak hengerfelület alkotói, a hengerfelület az adott görbe felület egy érintőhengere, az önárnyékhatárgörbe az érintőhenger érintési görbéje. A felület önárnyékhatárgörbéjét úgy is értelmezhetjük, hogy az önárnyékhatárgörbe a fényforrásra illeszkedő érintősíkok érintési pontjainak mértani helye, ekkor a felület érintőhengerét az érintősíkok burkolják.*

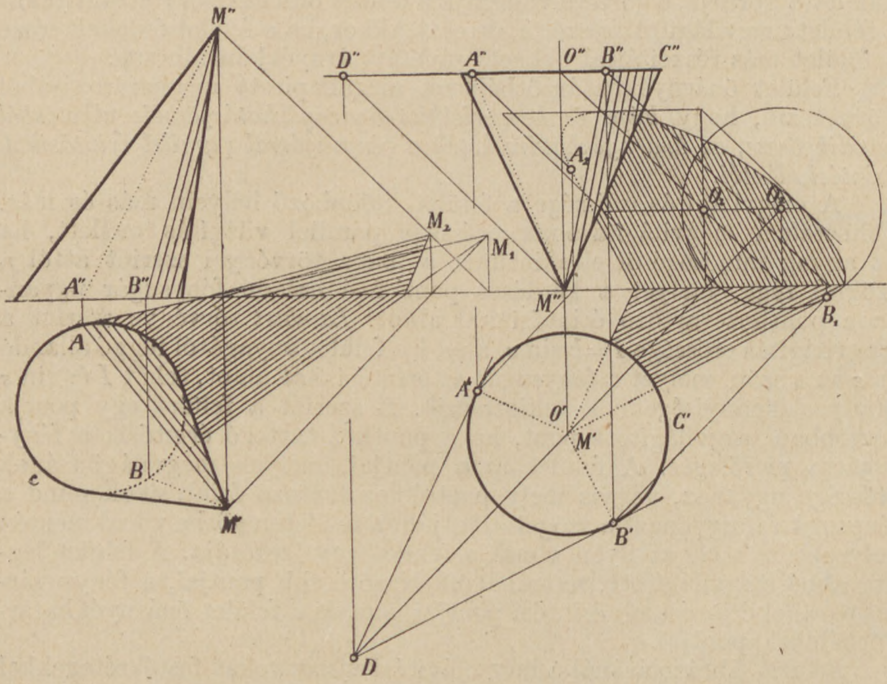
A fénysugárral parallel felületi érintő a felületet egy további pontban metszheti, e pontok összessége a felület önmagára vetett árnyékának határgörbéje, e görbe elválasztja a felület önmagára vetett árnyékát a felület megvilágított részétől, de csak akkor, ha a felület érdekelt része a felület más részei által okozott rávetett árnyékban nincsen.

Felület önárnyékhatárgörbéjének megállapított meghatározásából következik, hogy *kúp- és hengerfelület önárnyékhatárgörbéje alkotókból tevődik össze, az önárnyékhatáralkotók a fénysugárral parallel érintősíkok érintési alkotói.*

A megvilágítás erőssége a felület különböző helyein más és más. Felületelem megvilágításának erőssége parallel világítás mellett, ha az anyag minőségétől eltekintünk, a fizika törvényei szerint attól a szögtől függ, melyet a kérdéses pont felé haladó fénysugár ugyanazon ponthoz tartozó érintősíkkal alkot. *Lambert* törvénye szerint a megvilágítás erőssége $I = k \sin \varepsilon$, ahol k a felület anyagától függő állandó és ε az a szög, melyet a fénysugár az érintősíkkal alkot, tehát I és $\sin \varepsilon$ arányos mennyiségeknek tekinthetők. E szerint a felület egy pontja legjobban megvilágított pont, ha a ponthoz tartozó érintősík a fénysugárra merőleges. A felület ama pontjai, melyek megvilágításának erőssége ugyanaz, vagyis mely pontokhoz tartozó érintősíkok mind a fénysugárral ugyanazt a szöget alkotják, a felületen görbe vonal mentén helyezkednek el, az ilyen vonal a felület egy izofótája. A felület legkevésbbé megvilágított, mondhatjuk legsötétebb pontjai, a fénysugárral parallel érintősíkok érintési pontjai, vagyis a felület önárnyékhatárgörbéjének pontjai.

Felület ábrázolásánál a megvilágítási viszonyokat festékrétegekkel tüntethetjük fel. A legsötétebbre kellene a felületet az önárnyékhatárgörbe mentén befesteni és a felület megvilágított részében az alkalmazott festékréteg tónusát fokozatosan enyhíteni, annyira, hogy a felület legvilágosabb helyei festékrétegmentesen maradjanak. Meg kellene állapítani, hogy a különböző tónusrétegeket miként alkalmazzuk a felület önárnyékban lévő és rávetett árnyékban lévő részeinek festésénél, hogy rajzunk minél jobban visszatükröztesse a természetes megvilágítási viszonyokat. A felmerülő nehézségek elkerülése végett megállapodunk abban, hogy a felület megvilágított részét egyenletes egész világos tónusban tartjuk, a felület önárnyékban lévő részét közepes sötétségű tónussal látjuk el, míg a rávetett árnyékban lévő részt sötét réteggel vonjuk be.

38. §. Kúp és henger önárnyéka és vetett árnyéka. Kúp- és hengerfelületekre vonatkozó árnyékszerkesztéseknél egyelőre zárt kúp- és hengerfelületeket tételezünk fel. A szó szokásos értelmezése szerint a kúp test, mely határolva van a kúpfelület egy részével, továbbá síkrésszel, a síkrész határoló görbéje a síkrész síkjának és kúpfelületnek metszésvonala. A henger, mint test, határolva van a hengerfelület egy részével és síkrészekkel, itt is egy-egy síkrész határoló görbéje a síkrész síkjának és hengerfelületnek metszésvonala. A kúp és henger határolásánál szereplő síkrész, ill. görbe felületrész határoló görbéje a test egy görbe éle. Ha tehát kúpot, hengert ábrázolunk, akkor ezeket a görbe éleket is kell ábrázolnunk. Még megemlítjük, hogy a kúp és hengernél a határoló síkrészeket a kúp és henger térbeli elhelyezkedése szerint hol alaplapoknak, hol fedőlapoknak, hol oldallapoknak nevezzük.



65. ábra. 66. ábra.

Így mondhatjuk, hogy orthogonális parallel projekcióban két képsíkon ábrázoltunk a

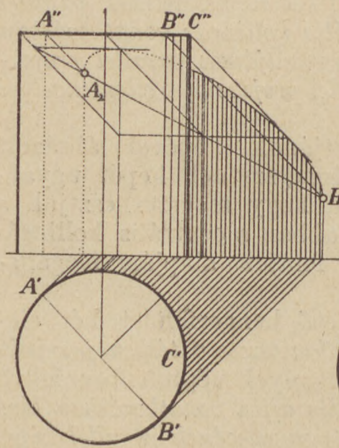
65. ábrában ferde körkúpot, melynek alaplapja az első képsíkban van,

66. ábrában egyenes körkúpot, melynek csúcspontja az első képsíkban és fedőlap körének síkja az első képsíkkal parallel síkban van.

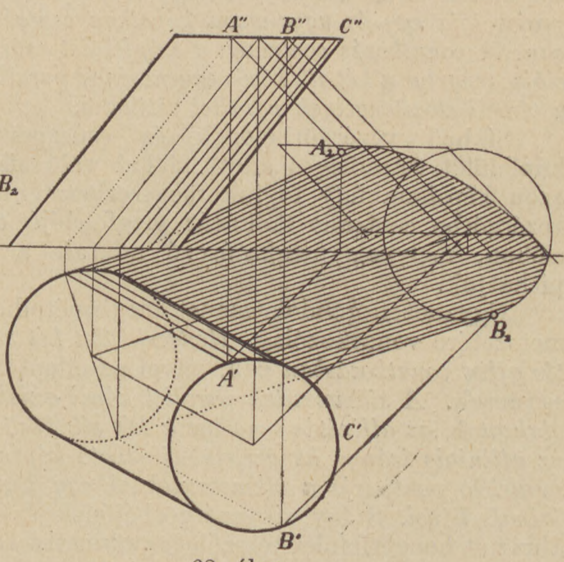
67. ábrában forgási hengert, melynek alaplapja az első képsíkban és fedőlapja az első képsíkkal parallel síkban van.

68. ábrában ferde körhengert, melynek alaplapja az első képsíkban, fedőlapja az első képsíkkal parallel síkban van.

Minden esetben megszerkesztettük az önárnyékhatárt és a két képsíkra vetett árnyék árnyékhatárát. Mivel e testek lényeges tulajdonságaikban egyeznek, elég, ha egynél részletezzük a szerkesztést. Vegyük a 66. ábrában rajzolt egyenes körkúpot. E kúpnak első kontúralkotói képzetesek, mert a kúp csúcspontjára illeszkedő első vetítősugár a vezérkör síkját oly pontban metszi, mely pontból a vezérkörhöz vont érintők képzetesek. A második kontúralkotók az $x_{1,2}$ tengelylyel parallel körátmérő végpontjaira illeszkedő alkotók. A kúpfelület önárnyékhatáralkotóit úgy nyertük, hogy a fénysugárral parallel érintősíkok érintési alkotóit állapítottuk meg ; e végett a kúp csúcspontjára fénysugarat illesztettünk és meghatároztuk e fénysugár D metszéspontját a vezérkör síkjával, e pontból vonható körérintők érintési pontjaira illeszkedő alkotók az önárnyékhatáralkotók. A test önárnyékhatáraként az önárnyékhatáralkotók ama részei érvényesülnek, amennyi



67. ábra.



68. ábra.

azokból a kúpfelület ábrázolt véges részére esik. Ha e kúpalkotók végpontjai a födőlapon A és B, akkor a test önárnyékhatárának még hiányzó része az $\overset{\frown}{ACB}$ körív. A képsíkokra vetett árnyék árnyékhatára az $|MA|$ $|MB|$ önárnyékhatáralkotók $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ véges részek képsíkokra vetett árnyékából és az $\overset{\frown}{ACB}$ körív képsíkokra vetett árnyékából tevődik össze. E szerint az első képsíkra vetett árnyék árnyékhatára két egyenes és egy körív, a második képsíkra vetett árnyék árnyékhatára két egyenes s egy ellipszis ívdarabja. Külön hangsúlyozzuk, hogy az $\overset{\frown}{ACB}$ körív és az önárnyékhatáralkotók $\overline{MA}$ és $\overline{MB}$ véges részeinek vetett árnyéka az A és B pont vetett árnyékában törés nem mutatkozik, egyenes és ív ott egymásba érintőleg megy át, mert a kör A pontjához tartozó érintője egyenese annak a fénysíknak, mely síkra az $|MA|$ alkotó illeszkedik és egy fénysíkra illeszkedő elemek árnyéka a fénysíknak az árnyékfelfogó síkon lévő nyomvonalára esik.

39. §. Kúp- és hengerfelület síkmetszete. *A kúpfelület csúcspontja két síkbeli rendszer egynemű elemei között kölcsönös és egyértelmű vonatkozást létesít, ha a kúp csúcspontjára illeszkedő egyenesnek a két síkkal való metszéspontjait és a kúp csúcspontjára illeszkedő síknak a két síkkal való metszésvonalait megfelelőknek tekintjük ; természetesen itt feltesszük, hogy egy síkbeli rendszer síkja sem illeszkedik a kúpfelület csúcspontjára. E vonatkozás a síkbeli rendszerek között a perspektív kollineár vonatkozás. A perspektív kollineár vonatkozás tengelye a síkbeli rendszerek közös egyenese, középpontja a kúpfelület csúcspontja, egy-egy rendszer ellentengelye az az egyenes, melyben a kúpfelület csúcspontjára illeszkedő és a másik rendszer síkjával parallel sík a rendszer síkját metszi.* E szerint *kúpfelület két síkmetszete a térben perspektív kollineár alakzatok*, ennek következménye, hogy *a kúpfelület két síkmetszetének parallel projekciója egy és ugyanazon képsíkon centrális kollineár vonatkozásban van. A vonatkozás centruma a kúpfelület csúcspontjának parallel projekciója, tengelye a két sík közös egyenesének parallel projekciója, ellentengelyei a térbeli ellentengelyek parallel vetületei.*

Síkbeli vezérgörbéjének és csúcspontjának képével ábrázolt kúpfelület tetszőleges adott síkkal való síkmetszetnek képét ugyanazon képsíkon úgy fogjuk megszerkeszteni, hogy megszerkesztjük a vezérgörbe centrális kollineár megfelelőjét abban a centrális kollineációban, melynek meghatározó adatait a fentiek alapján megállapíthatjuk.

Ugyanezen gondolatmenet megismételhető hengerfelület két síkmetszetére vonatkozólag. *Hengerfelület két síkmetszete a térben perspektív affin vonatkozásban van*, mivel az ellentengelyek végtelenben fekvő egyensek. *A síkmetszetek parallel képei axiális affin vonatkozásban lévő alakzatok, az affinitás tengelye a két sík közös egyenesének parallel képe, az affinitás iránya hengerfelületi alkotó képének iránya, az affinitás egy megfelelő pontpárja a síkmetszeteknek egy hengeralkotóra illeszkedő pontjainak képei.* S így síkvezérgörbéjének és alkotó irányának képével ábrázolt hengerfelület tetszőleges síkmetszetének képét ugyanazon képsíkon úgy fogjuk megszerkeszteni, hogy a vezérgörbének axiális affin megfelelőjét megszerkesztjük.

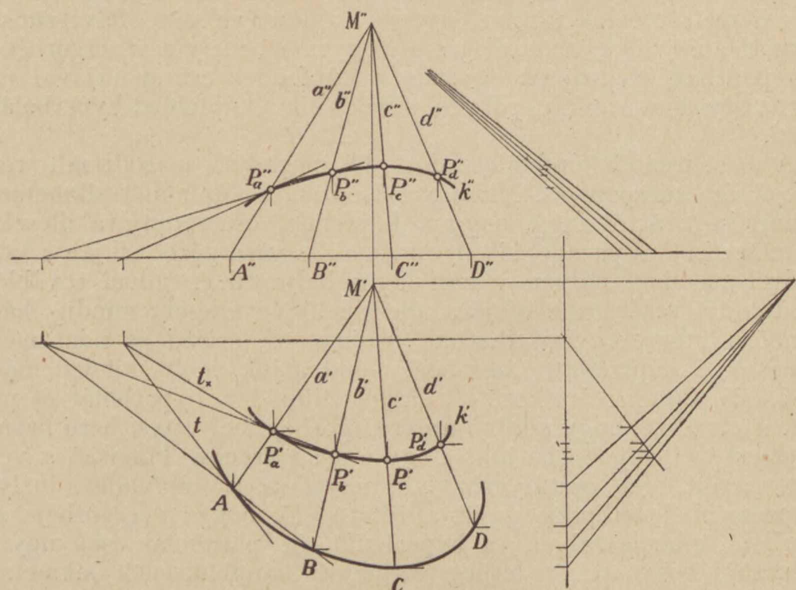
A kúp- és hengerfelület síkmetszetét orth. parallel projekcióban két képsíkon sokszor úgy fogjuk megszerkeszteni, hogy bevezetünk a metszősíkra merőleges új képsíkot, meghatározzuk a felület új képét és a metszősík új nyomvonalát. A síkmetszet új képe a sík új nyomvonalával azonos egyenes. A síkmetszet egy pontjának első és második képét ekkor úgy nyerjük, hogy felveszünk egy felületi alkotót két képével, meghatározzuk a felvett alkotó új képét, e kép a metszősík új nyomvonalát egy pontban metszi, ha az alkotóra illeszkedő eme pontnak megállapíthatjuk első és második képét, akkor megszerkesztettük a síkmetszet egy pontjának két képét.

40. §. Másodrendű kúpfelület síkmetszete. Minden sík a másodrendű kúpfelületet másodrendű görbében metszi, a metszet egy pontja kúpfelületi alkotó és metszősík közös pontja ; mivel a kúpfelületi alkotók a metszősíkot általában végesben fekvő pontban metszik, a síkmetszet pontjai általában végesben fekvő pontok. A síkmetszetnek egy pontja végtelenben fekvő pont, ha van a kúpfelületnek a metszősíkkal parallel alkotója. A metszősíkkal parallel kúpalkotók mindenesetre a kúpfelület csúcspontjára illeszkedő és a metszősíkkal parallel síkban vannak, ezeket pedig, mint tudjuk, úgy nyerjük, hogy a kúpfelület csúcspontjára és a metszősíkkal parallel síknak nyomvonalát szerkesztjük meg a vezérgörbe síkján, e nyomvonal és vezérgörbe közös pontjaira illeszkedő kúpfelületi alkotók a metszősíkkal parallel kúpfelületi alkotók. Mivel egyenes a másodrendű vezérgörbét két valós, vagy két képzetes, vagy két összeeső pontban metszi, a másodrendű kúpfelület síkmetszetének van két valós, vagy két képzetes, vagy két összeeső végtelenben fekvő pontja. *E szerint a másodrendű kúpfelület síkmetszete hyperbola, ha a metszősíkkal parallel és a kúpfelület csúcspontjára illeszkedő sík a kúpot két különböző valós alkotóban metszi ; a metszet ellipszis, ha a kúp csúcspontjára illeszkedő és a metszősíkkal parallel sík a kúpfelület egy valós alkotóját sem tartalmazza ; a metszet parabola, ha a kúpfelület csúcspontjára illeszkedő és a metszősíkkal parallel sík a kúpfelület egy érintősíkja.* Ha tehát másodrendű kúpfelület hyperbola síkmetszetét kívánjuk nyerni, akkor először felveszünk a vezérgörbe síkján egy tetszőleges oly egyenest, mely a vezérgörbét két valós pontban metszi, ez egyenes a kúpfelület csúcspontjával meghatároz egy síkot, e síkkal parallel minden sík a kúpfelület hyperbolában metszi.

A másodrendű kúpfelület adott, ha megadjuk másodrendű vezérgörbéjét és csúcspontját. Mivel a másodrendű kúpfelület síkmetszetének minősége attól függ, hogy a kúpfelület csúcspontjára illeszkedő és a metszősíkkal parallel sík nyomvonala a vezérgörbe síkján a vezérgörbével szemben milyen viszonylagos helyzetű és mivel továbbá a másodrendű vezérgörbe síkjára illeszkedő egyenesek mindig három különböző helyzetet foglalhatnak el (metsző, érintő és nem metsző egyenesek) a kúpszelettel szemben, mondhatjuk, hogy minden másodrendű kúp síkmetszetei között találunk ellipszist, hyperbolát és parabolát. Tudva azt, hogy adott kúp vezérgörbéje helyettesíthető bármely síkmetszetével, kijelenthetjük, hogy a másodrendű kúpokat a vezérgörbe szerint nem osztályozhatjuk, mivel az a kúpfelület, melynek pl. vezérgörbéje ellipszis úgyis állítható elő, hogy vezérgörbéje akár hyperbola, akár parabola ; a hyperbolát, ill. parabolát csak úgy kell választani, hogy az eredetileg megadott kúpfelületnek síkmetszete legyen. Itt megjegyezzük, de nem bizonyítjuk be, hogy minden másodrendű kúpfelületnek vannak körmetszetei is, úgy, hogy minden másodrendű kúp körkúpnak is mondható.

41. §. Másodrendű hengerfelület síkmetszete. Ha másodrendű hengerfelület vezérgörbéje kör vagy ellipszis, akkor a felület minden alkotója a tetszőlegesen választott metszősíkot végesben fekvő pontban metszi, szóval a másodrendű síkmetszet minden pontja végesben fekvő pont, tehát a síkmetszet mindig ellipszis. Ha másodrendű henger vezérgörbéje hyperbola, akkor a hengerfelületnek két különböző alkotója illeszkedik a tér egyetlen végtelenben fekvő síkjára, de akkor a henger minden metszősíkja a hengert oly kúpszeletben metszi, melynek két különböző végtelenben fekvő pontja van ; e pontok a végtelenben fekvő hengeralkotóknak metszéspontjai a metszősíkkal, tehát a síkmetszet mindig hyperbola. Ha a másodrendű henger vezérgörbéje para bola, akkor a végtelenben fekvő sík a másodrendű hengerfelület érintősíkja, az érintési alkotó jellemzésére szolgáló sík egy egyenese a hengerfelület alkotóival parallel egyenes, másik egyenese a parabola tengelye vagy vele parallel egyenes. Ezek alapján mondhatjuk, hogy a parabolikus hengerfelület minden síkmetszete, amennyiben a síkmetszet síkja nem parallel a henger alkotóival, parabola, mert minden síkmetszetnek van egy végtelenben fekvő pontja és e pontban a síkmetszet érintője a végtelenben fekvő síkra illeszkedő egyenes. Tekintettel arra, hogy *egy* másodrendű hengerfelület síkmetszetei egynemű kúpszeletek, a másodrendű hengerfelületeket osztályozzuk, *megkülönböztetünk elliptikus (kör), hyperbolikus és parabolikus másodrendű hengerfelületeket.*

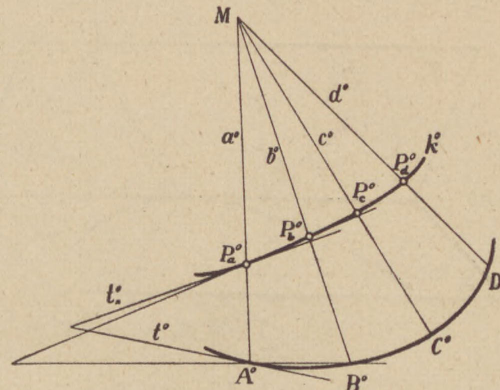
42. §. Kúp- és hengerfelület kifejtése. Csúcspontjával és vezérgörbéjével adott kúpfelület palástját modelljének esetleges elkészítése



69. ábra.

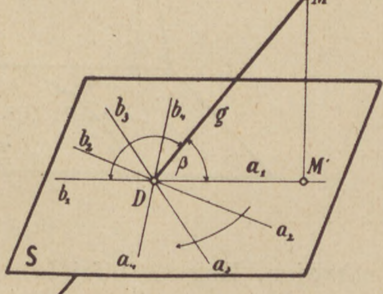
végett kifejtjük, síkba terítjük. A kifejtést úgy végezzük, hogy a vezérgörbén felvesszük rendre az A, B, C, D,... pontokat (69. ábra) és megrajzoljuk e pontokra illeszkedő kúpalkotókat, a, b, c, d, ..., akkor a kúpalkotók felületsávokra bontják a kúpfelületet, minél sűrűbben vesszük fel a kúpalkotókat, annál jobban helyettesíthető a kúpfelületi sáv két egymásután következő alkotó által meghatározott síksávval, a síksávok összeségükben a kúpfelületbe írt gúlafelületet adnak, e gúlafelület kifejtése megközelítő pontossággal a kúppalást kifejtése. E szerint ábránkban az a és d alkotók által határolt palástrész kifejtését úgy végezzük, hogy az MCD háromszöget a c alkotó körül addig forgatjuk, míg az MBC háromszög síkjába jut, ekkor MBC háromszög síkjában két háromszög van, a beforgatott MCD és az MBC háromszög, e háromszögeket a b alkotó körül forgatjuk addig, míg az MAB háromszög síkjába jutnak.

Legyen a kifejtett palástrészben az M, A, B, C, D, stb., pontok kifejtett pontjai (70. ábra) rendre $M°$, $A°$, $B°$, $C°$ $D°$ stb., akkor amennyiben $A°$, $B°$, $C°$, $D°$ stb. pontokat folytonos görbe vonallal összekötjük, nyerjük a vezérgörbe kifejtését. Ha pedig a kúpfelületen lévő további k görbe $k°$ kifejtését kívánjuk nyerni, akkor megállapíthatjuk a k görbe metszéspontjait az a, b, c, d stb. alkotókkal, legyenek ezek rendre P_a, P_b, P_c, P_d stb., majd meghatározzuk az $\overline{MP_a}$, $\overline{MP_b}$, $\overline{MP_c}$, $\overline{MP_d}$ stb. távolságok valódi nagyságát és e távolságokat a palást kifejtésében rendre az $M°$ ponttól számítva az $a°$, $b°$, $c°$, $d°$ stb. alkotókra felrakjuk, a nyert pontok a $k°$ görbe pontjai.



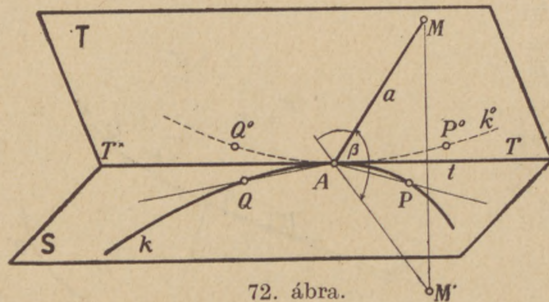
70. ábra.

Legyenek a 69. ábrában szereplő a és b kúpfelületi alkotók szomszédos alkotók, akkor ez alkotók összekötő síkja a kúpfelület érintősíkja, ugyanakkor az A és B pontok összekötő egyenese a vezérgörbe érintője, továbbá a P_a és P_b pontok összekötő egyenese a kúpfelületen fekvő k görbe érintője. Ha ekkor a kúpfelületet az a menti érintősíkba gondoljuk kifejtve, az a és b alkotók, az A és B pontok, végül a P_a és P_b pontok viszonylagos helyzete nem változik, de ez más szóval azt mondja, hogy az a egyenes, a vezérgörbe A pontjához tartozó érintő, továbbá a k görbe P_a pontjához tartozó érintő a kúpfelület mondott kifejtésénél helybenmaradó elemek lesznek. Tehát, ha a kúpfelületet egy rajta fekvő k görbéjével együtt kifejtjük, akkor a *kifejtett k görbe egy tetszőleges pontjában az érintőt úgy szerkesztjük meg, hogy a tetszőleges pont eredeti megfelelőjében meghatározzuk a k görbe érintőjét és e ponthoz tartozó kúpfelületi alkotó és érintő eredeti viszonylagos helyzetét a kifejtésben lemásoljuk.*



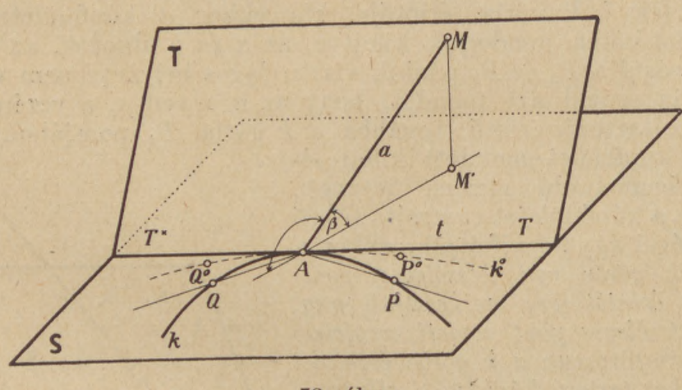
71. ábra.

Ha a kúpfelület egy síkmetszetét a kúpfelülettel együtt kifejtjük, akkor a kifejtett síkmetszet különböző helyein a kifejtett csúcsponttal szemben más és más viselkedést tanusít. Lesznek pontok a kifejtett görbében, melynek környezetében a kifejtett csúcspont felé a kifejtett görbe konkáv, majd konvex oldalát mutatja és lesznek átmenti esetek is. Hogy az egyes eseteket megállapíthassuk, hivatkoznunk kell egyenes és sík hajlásszögénél tanultakra. Messe (71. ábra) a g egyenes az **S** síkot a D pontban és legyen a g egyenes M pontjának orthogonális projekciója az **S** síkon az M' pont. Ekkor a $DM' = a_1$ félsugár a DM félsugárnak orthogonális projekciója, s így DM félsugár és a_1 félsugár által bezárt hegyesszög a legkisebb szög ama szögek között, melyet a DM félsugár az **S** síkra illeszkedő és D kezdőponttal bíró félsugárakkal alkot. Ha az a_1 félsugarat az **S** síkban a D pont körül forgatjuk, akkor DM félsugár a forgatott félsugárral mindig nagyobb és nagyobb szöget alkot, a legnagyobb szöget alkotja akkor, ha a forgatott félsugár kezdő helyzetével ellentétes helyzetbe jut; a rajzban a_1 e momentán helyzete b_1; ha pedig az a_1 félsugarat tovább forgatjuk, akkor a DM fokozatosan csökkenő szöget alkot a forgatott egyenes momentán helyzeteivel.



72. ábra.

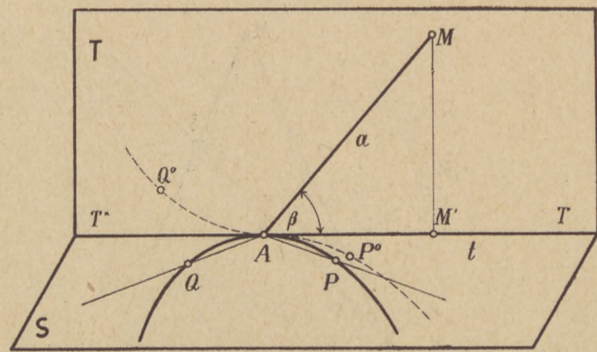
Legyen egy adott kúpfelületnek az **S** síkkal való síkmetszete k és legyen a kúpfelület M csúcspontjának orthogonális képe az **S** síkon M' (72. ábra). Vegyük fel a k görbe A pontját; ha az A pontra illeszkedő kúpalkotó a és a k görbe A pontjához tartozó érintő t, akkor t és a egyenesek összekötő síkja a kúpfelület a alkotómenti érintősíkja, **T**. Fejtsük ki a kúpfelület az a alkotó környezetében lévő részt **T** érintősíkba, de úgy, hogy az a alkotó a **T** érintősíkban eredeti helyzetében



73. ábra.

maradjon. Hogy a kifejtést elvégezhessük, felvesszük a k görbén az A pont környezetében a P és Q pontokat. Mint tudjuk, a k görbe P pontjának kifejtését, a $P°$ pontot, a **T** érintősíkban úgy nyerjük, hogy a MAP háromszöget az a alkotó körül a **T** érintősíkba forgatjuk és hasonlóan járunk el a Q kifejtésének szerkesztésénél. Még megemlítjük, hogy a k görbe A pontjához tartozó t érintőjét az A pont két félsugárra bontja, az egyik félsugár legyen AT, a másik $AT^{\times}$. A k görbe az A pont környezetéhez tartozó pontok kifejtésénél a következő viszonylagos helyzeteket vehetjük figyelembe: *a)* a k görbe az A pont környezetéhez tartozó részében az M' pont felé *konkáv* oldalát mutatja (72 ábra), *b)* az M' pont felé *konvex* oldalát mutatja (73. ábra), *c)* az M' pont a *t érintőre illeszkedő pont* (74. ábra).

a) Mivel $MAM'\sphericalangle$ a legkisebb szög azon szögek között, melyet az a alkotó az **S** síkra és A pontra illeszkedő félsugarakkal alkot, az $MAP\sphericalangle < MAT\sphericalangle$ és $MAQ\sphericalangle < MAT^{\times}\sphericalangle$, ebből következik, hogy a P és Q pont kifejtettje, a P° és Q° pontok, a rajz szerint a t érintő fölött lesznek, vagyis a k° görbének az A pont környezetéhez tartozó része az M pont felé konkáv oldalát mutatja.



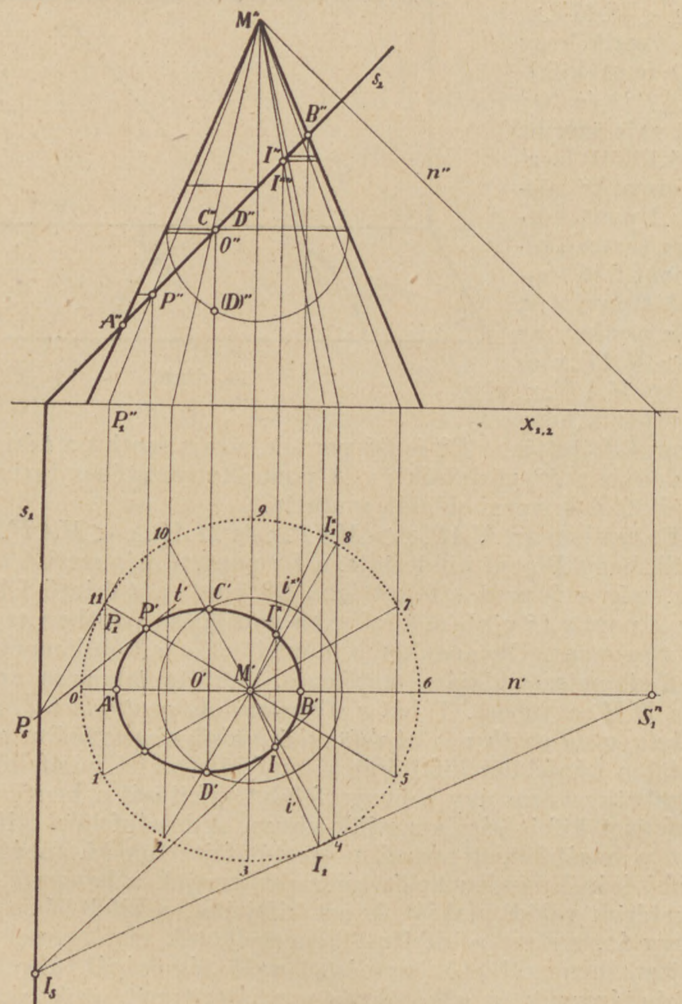
74. ábra.

b) Ez esetben az $MAP\sphericalangle > MAT\sphericalangle$ és $MAQ\sphericalangle > MAT^{\times}\sphericalangle$, ebből következik, hogy P és Q pont kifejtettje, a P° és Q° pontok, a rajz szerint a t érintő alatt lesznek, vagyis a k° görbének az A pont környezetéhez tartozó része az M pont felé konvex oldalát mutatja.

c) Ez esetben az $MAP\sphericalangle > MAT\sphericalangle$ és $MAQ\sphericalangle < MAT^{\times}\sphericalangle$, ebből következik, hogy P pont kifejtettje, a P° pont, a rajz szerint a t érintő alatt lesz, míg a Q pont kifejtettje, a Q° pont, a t érintő fölött lesz, vagyis az A pont a k° görbének inflexiós pontja és e pontban az inflexiós érintő a t egyenes. Ugyanekkor a kúpfelület a alkotójamenti érintősíkja az **S** síkmetszet síkjára merőleges, mert tartalmazza az **S** síkra merőleges MM' egyenest. Tehát *a síkmetszet oly pontja lesz a kifejtésben inflexiós hely, mely pontban a kúpfelületi érintősík a metszősíkra merőleges.*

Amint a kúpfelület kifejtését a kúpfelületbe írt gúlafelület kifejtésére vezettük vissza, úgy a hengerfelület kifejtését a hengerfelületbe írt hasábfelület kifejtésére vezetjük vissza. A hasábfelület kifejtésénél elsősorban a hasábfelület normálmetszetét fejtettük ki, tehát hengerfelület kifejtésénél mindenekelőtt megszerkesztjük a hangerfelület normálmetszetének valódi alakját és ezt kifejtjük, a kifejtésben ez egyenesbe megy át, melyre a kifejtett hengeralkotók merőlegesek lesznek. Két kifejtett hengeralkotó egymástól való távolságát úgy nyerjük, hogy meghatározzuk az alkotók és normálmetszet közös pontjait, e pontok ívtávolsága a normálmetszetben a keresett távolság. Amenynyiben a hengerfelület valamely síkmetszetének kifejtését kívánjuk nyerni, úgy ezt pontonként szerkesztjük meg. A síkmetszet P pontjának kifejtését úgy nyerjük, hogy megállapítjuk először a kifejtésben ama alkotó helyét, melyre a P pont illeszkedik, ha P_n az alkotó és normálmetszet közös pontja, és P_n° e pont kifejtése a normálmetszet kifejtésében, akkor e ponttól számítva felmérjük P_nP távolság valódi nagyságát. A kifejtett síkmetszet egy-egy pontjában az érintőt, továbbá az esetleges inflexiós helyeket ugyanúgy szerkesztjük meg, mint a kúpfelület síkmetszetének kifejtésében.

43. §. Egyenes körkúp ellipszis metszete és kifejtése. Legyen az egyenes körkúp vezérköre az első képsíkban, csúcspontja pedig M (M', M''). A metsző sík, **S** (s_1, s_2), második vetítősík (75. ábra). A választott metszősík a kúpot ellipszisben metszi, mert a kúp csúcspontjára illeszkedő és a metszősíkkal parallel sík a kúpból képzetes alkotókat metszi ki. A síkmetszet második képe a metszősík második



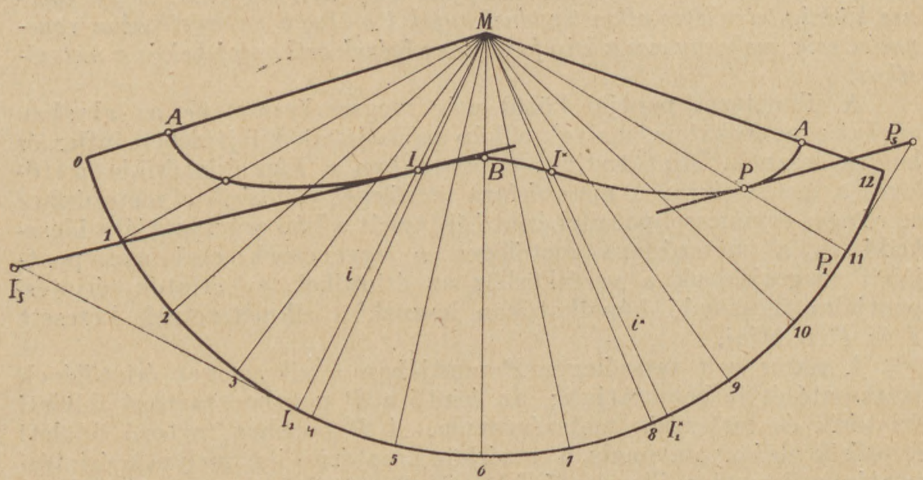
75. ábra.

nyomvonalának ama része, melyet rajta a kúp második képkörrajz alkotói határolnak. A síkmetszet első képének meghatározásánál felvettük egyenlő beosztással a kúp tizenkét alkotóját és megszerkesztettük minden egyes alkotó metszéspontját a metszősíkkal. Legyenek a síkmetszetnek a második kontúralkotókra illeszkedő pontjai A és B. E pontok a síkmetszetnek lényeges pontjai, mert e pontokban a síkmetszet érintői második vetítősugarak és az érintési pontok összekötő egyenese a második képsíkkal parallel. Tehát AB a metszet átmérője és mivel az AB átmérő egyúttal merőleges a végpontokhoz tartozó érintőkre, az AB átmérő tengely, de tengely az ellipszis első vetületében is, mert átmérő és végpontjában az érintő viszonylagos helyzete az első projekcióban ugyanaz. Az AB átmérő felezési pontja, O, az ellipszis középpontja, a középpontra illeszkedő második vetítősugárra esik az ellipszis másik tengelye. Hogy e tengely végpontjait nyerhessük, meg kell szerkeszteni a vetítősugár és kúpfelület metszéspontjait; e végett felveszünk a második vetítősugárra illeszkedő és az első képsíkkal parallel síkot, e sík a kúpfelületet körben metszi, ezt és a második vetítősugarat beforgatjuk az AB egyenesen átmenő, a második képsíkkal parallel síkba, ha a beforgatott kör és második vetítősugár egyik közös pontja $(D)''$, akkor $\overline{O''(D)''}$ távolság a fél tengely valódi hossza, ezt a második vetítősugár első képére valódi nagyságában az O' ponttól számítva valódi nagyságban felrakhatjuk, e pontok C', D' az ellipszis első képében a másik tengely végpontjai. Általában a fentiek allapján meg kell jegyezni, hogy *egyenes körkúp tetszőleges síkmetszetének egyik tengelye a metszősík azon egyenesére esik, mely egyenes a kúp forgástengelyének orth. projekciója a metszősíkon.*

A síkmetszet pontjai közül még megszerkesztettük az ábrában azokat a pontokat is, melyek a kúp palástjának kifejtésében inflexiós helyek lesznek. Mint tudjuk, e pontokban a kúp érintősíkja merőleges a metszősíkra. A metszősíkra merőleges érintősík a metszősíkra merőleges egyenessel parallel érintősík, tehát a kúp csúcspontjára illeszkedő és a metszősíkra merőleges n egyenesnek első nyompontjából megrajzoltuk a vezérkörhöz az érintőket, ez érintők érintési pontjaira illeszkedő kúpalkotókon lesznek a síkmetszetnek keresett I és I^{x} pontjai.

A síkmetszet tetszőleges P pontjában a síkmetszet érintőjének szerkesztését is bemutatjuk; az érintő a P ponthoz tartozó felületi érintősík és metszősík metszésvonala. A P ponthoz tartozó felületi érintősík első nyomvonala a vezérkör ama érintője, melynek érintési pontja a P pontra illeszkedő felületi alkotó első nyompontja, P_1, a szerkesztett érintősík első nyomvonalának metszéspontja a metszősík első nyomvonalával, P_s, a keresett érintőnek egy pontja, másik pontja maga a P pont, mert ez az érintősíknak és a metszősíknak is pontja, a két pont összekötő egyenese a kívánt érintő. Hasonlóan szerkesztettük meg a síkmetszet I pontjában az érintőt.

Ha a kúpfelületnek a csúcspont és vezérkör által határolt részét kifejtjük, akkor a vezérkör kifejtése, mivel a vezérkör minden pontja a kúp csúcspontjától egyenlő távolságban van, oly körvonal egy ívdarabjába megy át, mely körvonalnak sugara egy alkotónak a csúcspont és első képsík közötti része, e távolság a második képsíkon közvetlenül lemérhető, mert a kúp második kontúralkotói a második képsíkkal parallel egyenesek, tehát ezek második képein minden távolság valódi nagyságban látszik, s így a körvonalnak sugara a második képkörrajzalkotónak az M'' pont és $x_{1,2}$ tengely által határolt része. Miután a vezérkör kifejtését (76. ábra) már megrajzoltuk, erre fel kell mérni a a vezérkör kerületét. A feladatnak ez a része általában csak közelítő pontossággal végezhető, leggyakrabban úgy járunk el, hogy a vezérkör kerületét egyenlő részekre bontjuk és két szomszédos osztópont közti húrtávolságot a kifejtett vezérkörre annyiszor rakunk fel mint húrtávolságot, ahány részre a vezérkört felosztottuk. Minél több részre osztottuk a vezérkört, annál pontosabban nyerjük kifejtését. Az ábrában oly kúpot vettünk fel, melynek vezérkörét egész pontosan kifejthetjük, mert az alkotó o hosszát úgy választottuk, hogy $o=\frac{5r}{2}$, ahol r a vezérkör sugara. Az o és r távolságok e kapcsolata folytán a kifejtett vezérkör az o sugarú kör $\frac{2}{5}$-részével egyenlő. Ha a kifejtett vezérkör ívét tizenkét egyenlő részre osztjuk és az osztáspontokat a kör középpontjával összekötjük, akkor a kifejtésben megrajzoltuk azt a tizenkét alkotót, melyeknek segítségével a síkmetszet egyes pontjait megszerkesztettük. A síkmetszet tetszőleges P pontjának kifejtését úgy nyertük, hogy megállapítottuk a P pontra illeszkedő tizenegyes alkotó helyét a kifejtésben és erre az M pont kifejtésétől számítva felmértük az $\overline{MP}$ távolság valódi nagyságát. E távolság valódi nagyságát úgy



76. ábra.

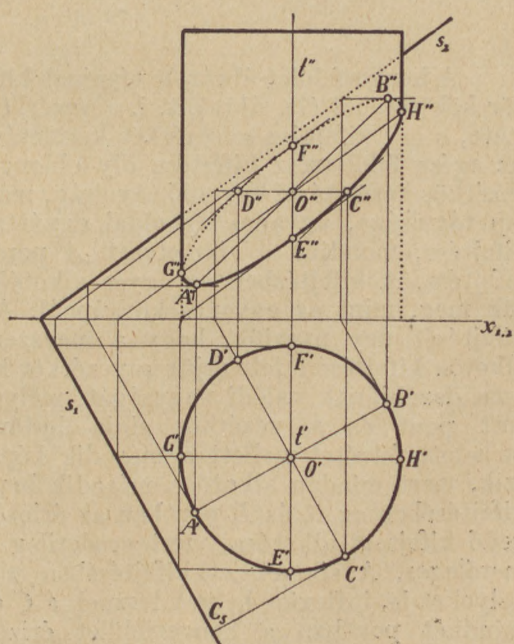
szerkesztettük meg, hogy a tizenegyes alkotót a kúp forgástengelye körüli forgatással a második kontúralkotóba forgattuk; ha tehát a P'' pontra illeszkedő és az $x_{1,2}$ tengellyel parallel egyenessel metszük a második képkörrajz alkotót, akkor e metszéspontnak távolsága az M'' ponttól a keresett távolság. Hasonló meggondolással nyertük a síkmetszet minden pontjának kifejtését, így azokat a pontokat is, mely pontok a síkmetszet kifejtésében inflexiós helyek lesznek, az I és $I^{\times}$ pontokat, természetesen ezt megelőzőleg a kifejtésbe be kellett iktatni az i és $i^{\times}$ alkotókat, melyeken e pontok vannak. Az i alkotót a kifejtésben úgy nyertük, hogy a vezérkör kifejtésébe beiktattuk az i alkotó I_1 nyompontját, ezt úgy szerkesztettük meg, hogy a vezérkör első képén megmértük az I_1 pontnak távolságát a legközelebb eső és kifejtett négyes alkotó első nyompontjától és e távolságot a vezérkör kifejtésében a négyes alkotó első nyompontjának kifejtésétől számítva a hármas alkotó kifejtett első nyompontja felé a vezérkör kifejtésére felraktuk.

A kifejtett síkmetszet P pontjában az érintőt úgy nyerjük, hogy a kifejtett tizenegyes alkotó mellé P csúcsponttal az eredeti tizenegyes alkotó és eredeti P pontbeli érintő által bezárt szöget lemásoljuk. A szög lemásolásánál legtöbbször oly háromszöget szerkesztünk valódi nagyságban, mely háromszögnek egyik belszöge a kérdéses szög. Adott esetünkben lemásoljuk a PP_1P_s derékszögű háromszöget, a derékszög csúcspontja a P_1 pont. A derékszögű háromszög PP_1 befogójának valódi nagyságát ismerjük, ez a kifejtésben a P és P_1 pontok távolsága, a háromszög P_1P_s befogóját valódi nagyságban a 75. ábrában az első képsíkban közvetlenül lemérhetjük, mert e távolság egyenese a kúpfelület P pontjához tartozó érintősík első nyomvonala és egy első nyomvonalon fekvő távolság az első képsíkban valódi nagyságban látszik. A kifejtésben az ismeretes két befogóval szerkesztett derékszögű háromszög átfogója a kifejtett síkmetszet P pontjában az érintő, természetesen a kifejtésben a derékszögű háromszöget a tizenegyes alkotó azon oldalán kell rajzolni, amely oldalon e háromszög a tizenegyes alkotó mellett a térben van.

Ugyanezen eljárással szerkesztettük meg a síkmetszet kifejtésében az inflexiós érintőket. A kifejtett síkmetszet A és B pontjában az érintőket közvetlenül rajzolhatjuk, mert e pontokhoz tartozó érintők eredetileg e pontokra illeszkedő alkotókkal derékszöget alkotnak.

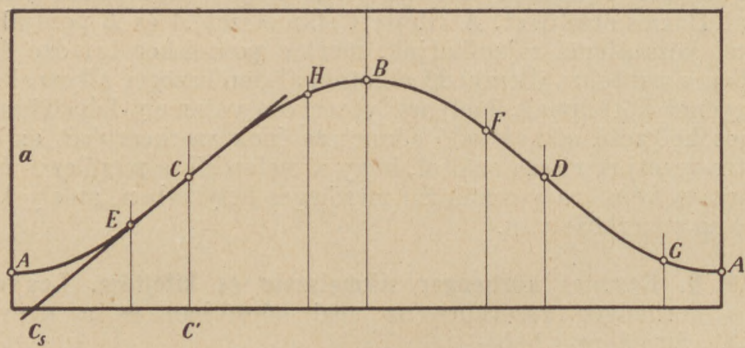
Egyenes körkúpnak, melynek vezérköre valamely képsíkban van, általános helyzetű síkkal való síkmetszetének szerkesztését az előbbi helyzetre vezetjük vissza azáltal, hogy a metszősíkra merőleges új képsíkot arra a képsíkra vesszük fel merőleges helyzetben, amely képsíkban a kúp vezérköre van.

44. §. Egyenes körhenger síkmetszete és kifejtése. Legyen az egyenes körhenger vezérköre az első képsíkban és a metszősík, **S** (s_1, s_2), általános helyzetű sík (77. ábra). A hengerfelület síkmetszete ellipszis lesz, az ellipszis első képe a hengerfelület vezérkörével azonos kör, mert a henger első vetítő henger. Az ellipszis középpontja az **S** síknak és a hengert t forgástengelyének közös pontja. $O(O', O'')$. A síkmetszet ellipszis második képének szerkesztésénél felhasználhatjuk azt az affin vonatkozást, mely fennáll síkalakzat első és második képe között, sőt e vonatkozást felhasználhatjuk arra is, hogy az ellipszis második képében megszerkesszük a tengelyeket. Az ábrában meghatároztuk a térbeli ellipszis tengelyeit, az egyik tengely rajta



77. ábra.

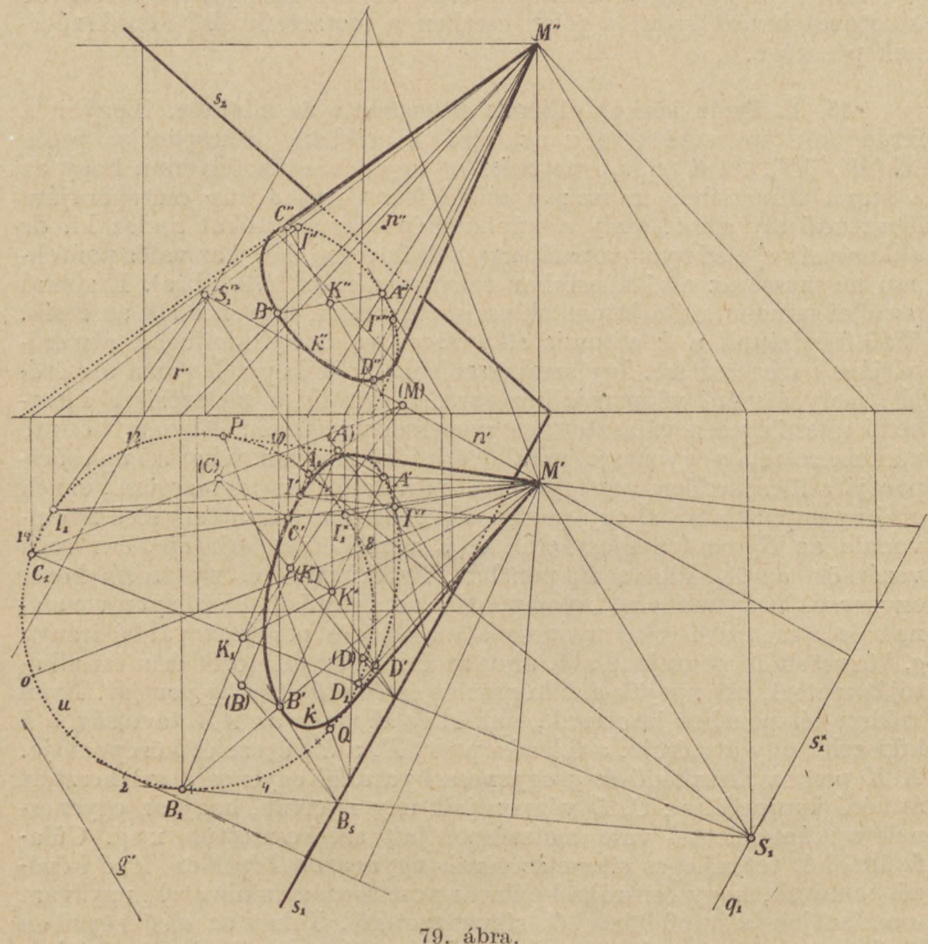
van a forgástengely S síkon lévő oth. projekcióján, a másik erre merőleges. A tengelyek végpontjai A, B és C, D, e tengelyek második képei az ellipszis második képében általában csak konjugált átmérők. Az ellipszis második képében fontos pontok a henger második képkörrajzalkotóira eső pontok, e pontok a második projekcióban elválasztják az ellipszis látható részét annak nem látható részétől. Hogy e pontokat nyerhessük, megszerkesztjük a második kontúralkotók összekötő síkjának metszésvonalát a metszősíkkal, a metszésvonal és kontúralkotók közös pontjai lesznek a kívánt pontok. A jelen esetben a második kontúralkotók összekötő síkja a tengelyre illeszkedő, második képsíkkal parallel sík, tehát a kontúralkotók összekötő síkja a metszősíkot az ellipszis középpontjára illeszkedő második fővonalban metszi, e fővonal második képe a második képkörrajzalkotókat metszi a keresett G'', H'' pontokban. Az ellipszis második projekcióját még kiegészítettük a legutóbb szerkesztett pontok által meghatározott átmérő konjugáltjával, ez átmérő végpontjai E'', F''.



78. ábra.

A hengerfelület ábrázolt részének kifejtésénél kiindultunk a vezérkör kifejtéséből (78. ábra), t. i. a vezérkör a hengerfelület normálmetszete, s így kifejtése a vezérkör kerületével egyenlő egyenes távolság. Az egész felületrész kifejtése oly oblongum, melynek egyik oldala a vezérkör kerületével egyenlő távolság, másik oldala az alaplap és fedőlap távolsága, ugyanez az oldal egyúttal a henger egy alkotójának kifejtése, mondjuk a síkmetszet A pontjára illeszkedő a alkotónak kifejtése. A kifejtésben az egyes alkotók helyét ugyanúgy szerkesztjük meg, mint az egyenes körkúpnál. A síkmetszet egyes pontjainak kifejtését úgy nyerjük, hogy a megszerkesztett pontokra illeszkedő alkotók kifejtésére felmérjük a vezérkör kifejtésétől számítva az alkotó ama darabjának valódi nagyságát, melyet az alkotón a megszerkesztett pont és a vezérkör síkja határol; minden ilyen távolság az adott felvétel mellett a második képsíkon valódi nagyságban látszik, mert minden alkotó a második képsíkkal parallel. A síkmetszet kifejtésében az A és B pontban az érintő merőleges e pontokra illeszkedő kifejtett alkotóra, mert eredetileg is alkotó és érintő egymásra merőleges. A síkmetszet kifejtésében megszerkesztettük az inflexiós helyeket is, inflexiós helyek lesznek a C és D pontok kifejtettjei, mert mindkét pontban a hengerfelület érintősíkja merőleges a metszősíkra. Az inflexiós érintőt a c alkotómenti érintősíkban fekvő $CC'C_s$ derékszögű háromszög segítségével szerkesztettük meg, ahol C_s az érintősík és metszősík első nyomvonalainak közös pontja, a háromszög CC' és $C'C_s$ befogóit a második, illetve első képsíkon közvetlenül lemérhetjük, és miután a kifejtésben e távolságokat megfelelő helyre lemásoltuk, a már ismeretes kifejtett C pont a megszerkesztett C_s ponttal meghatározza az inflexiós érintőt; különben megjegyezhető, hogy az inflexiós érintőnek az inflexiós pontra illeszkedő alkotóval bezárt szöge a jelen esetben a metszősík első képsíkszögének pótszöge.

45. §. Ferde körkúp ellipszis síkmetszete és kifejtése. Legyen a ferde körkúp vezérköre u az első képsíkban, csúcspontja pedig $M\,(M', M'')$. Az $\mathbf{S}$ (s_1, s_2) metszősíkot úgy kívánjuk felvenni, hogy az a kúpot ellipszisben messe; e célból felvettünk a kúp csúcspontjára illeszkedő oly síkot, mely a kúpból képzetes alkotókat metsz ki. de akkor e sík $\overset{\times}{s_1}$ első nyomvonalát úgy kell felvenni, hogy az valós pontokban ne messe az első képsíkban fekvő vezérkört (79. ábra). E síkkal parallel minden sík a kúpot ellipszisben metszi, legyen e sík az $\mathbf{S}$ sík. Első feladatunk a k ellipszis síkmetszet valamely konjugált átmérőpárjának szerkesztése. Így szerkesszük meg a k kúpszelet ama átmérőjét, mely átmérő végpontjaihoz tartozó érintők a metszősíkra illeszkedő tetszőlegesen választott g egyenessel parallelek. A keresett érintő mindenesetre a g egyenessel parallel érintősíkban van, tehát a kúp csúcspontjára illeszkedően, a g egyenessel parallel egyenest vezetünk, ennek első nyompontja az $\overset{\times}{s_1}$ egy pontja, S_1. A keresett érintősík első nyomvonala az S_1 pontra illeszkedik és a vezérkörnek érintője, érintse a vezérkört az A_1, illetve B_1 pontban. Az érintősík és metszősík közös egyenese, melynek első nyompontja az érintősík első nyomvonalának és a metszősík első nyomvonalának közös pontja, továbbá iránya g, közvetelnül megrajzolható, ahol az érintő az érintősík érintési alkotóját metszi, ott nyejük a k kúpszelet és érintő érintési pontját. Ilyen módon két ponthoz jutottunk, ezek A és B, maga az $\overline{AB}$ távolság a k kúpszelet egy átmérője, a felezési pont, K, a k kúpszelet középpontja. A K pontra illeszkedő és g egyenessel parallel egyenes a szerkesztett átmérő konjugáltja; C, D végpontjait úgy nyertük, hogy az egyenesnek a kúpfelülettel való metszéspontjait szerkesztettük meg. Gúlafelület két tetszőleges síkmetszetének ugyanazon képsíkon lévő képéről tanultuk, hogy centrális kollineár vonatkozású alakzatok, ugyanazt mondhatjuk a kúpfelület két síkmetszetéről. Tehát az első képsíkon lévő u vezérkör és a k kúpszelet első képe, k', centrális kollineációban lévő alakzatok, a kollineáció centruma a kúp csúcspontjának első képe, a kollineáció tengelye a metszősík első nyomvonala, az egyik ellentengely $q_1 \equiv \overset{\times}{s_1}$. E centrális kollineáció kizárólagos felhasználásával szintén szerkeszthetünk a k kúpszelet első képében konjugált átmérőpárt. Egy átmérőt úgy nyerünk, hogy felvesszük a vezérkör oly húrját, melynek végpontjaihoz tartozó érintők közös pontja a q_1 ellentengelyen van, t. i. érintőnek megfelelője érintő, és mivel az érintők közös pontja a q_1 ellentengelyre illeszkedik, ezek megfelelői parallel egyenesek, parallelek avval az egyenessel, mely a kollineáció centrumát az ellentengelyre illeszkedő ponttal összeköti. Szóval a vezérkör minden oly húrjának centrál kollineár megfelelője a k' síkmetszetprojekciónak átmérője, mely húrnak egyenese a q_1 ellentengely egy pontjának polárisa. A k' síkmetszetprojekciónak minden átmérője a k' középpontjára illeszkedő egyenes, ha a síkmetszetprojekciónak K' középpontjának megfelelője K_1, úgy a K_1 pontra illeszkedik a q_1 ellentengely minden pontjának polárisa, e pont a q_1 ellentengely pólusa. A nyert eredményt egész általánosságban úgy is fogal-

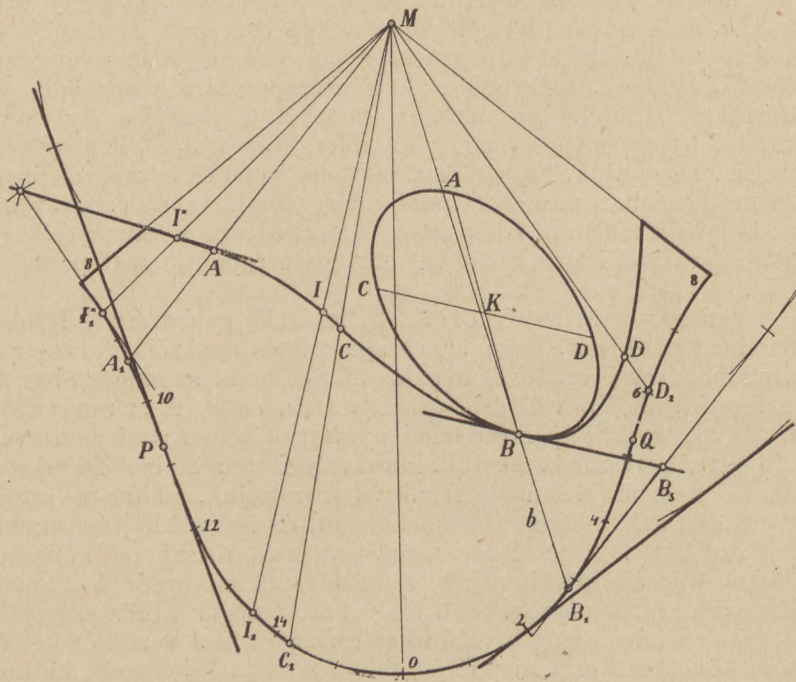


79. ábra.

mazhatjuk, hogy *vezérgörbéjével és csúcspontjával adott másodrendű kúp síkmetszetének középpontja a vezérgörbe rendszeréhez tartozó ellentengely pólusának centrál kollineár megfelelője abban a centrális kollineációban, melyet ugyanazon a képsíkon a vezérgörbe képe és a síkmetszet képe meghatároz.*

A 79. ábrában a síkmetszet mindkét képében megszerkesztettük a kontúralkotókra illeszkedő pontokat. Így az első kontúralkotókon lévő pontok ama egyenes centrál kollineár megfelelőjén vannak, mely egyenes az első kontúralkotók összekötő síkjának első nyomvonala. Hasonlóan nyertük a síkmetszetnek a kúp második kontúralkotóira illeszkedő pontjait. A síkmetszet lényeges pontjaiként megállapítottuk az I és I^{x} pontokat, amelyek a síkmetszet kifejtésében inflexiós helyek lesznek. E végett megszerkesztettük a kúp csúcspontjára illeszkedő és a metszősíkra merőleges n egyenest, a kúpnak az n egyenesre illeszkedő érintősíkjainak i és i^{x} érintési alkotóin nyerjük a kívánt pontokat, mert az i és i^{x} alkotómenti érintősík a metszősíkra merőleges. Végül megszerkesztettük a síkmetszet valódi nagyságát, az egyes pontok szerkesztésénél részben felhasználtuk azt a centrális kollineár vonatkozást, mely fennáll az első képsíkban lévő vezérkör és a síkmetszetnek első képsíkba forgatottja között, és mely vonatkozásnál a kollineáció (M) centruma a kúp csúcspontjának első képsíkba forgatottja, ha a kúp csúcspontját ama sík első nyomvonala, s_1^{x}, körül forgatjuk, mely sík a kúp csúcspontjára illeszkedik és a metszősíkkal parallel. Így, ha a síkmetszet C pontjára illeszkedő c alkotó első nyompontja C_1, a C pont leforgatottja a $|C_1(M)|$ egyenesre illeszkedik. De tudjuk, hogy síkmetszet első képe és leforgatottja orth. affin vonatkozásban van, a C pont leforgatottja tehát azon az egyenesen is van, mely a C' pontra illeszkedően a metszősík első nyomvonalára merőleges, a két egyenes metszéspontja a C pont leforgatottja.

A csúcspont és vezérkör által határolt palástrész kifejtésénél figyelembe vettük azt, hogy a csúcspontra és a vezérkör középpontjára illeszkedő első vetítősík a palástot két orth. szimmetriában lévő részre bontja, ahol a vetítősík a szimmetria síkja. A szimmetria síkjában fekvő egyik kúpalkotó első nyompontjától számítva a vezérkört 16 egyenlő részre osztottuk. Ha a szimmetria síkban fekvő másik kúpalkotó mentén a kúpot felvágva gondoljuk, akkor a kifejtett palást szintén szimmetriát fog feltüntetni, és így a kifejtés munkáját felére redukáltuk. A vezérkör osztáspontjaira illeszkedő kúpalkotók a palástot kúpsávokra bontják, a kifejtésnél e kúpsávokat helyettesítjük azon síkháromszögekkel, mely háromszögek közös csúcspontja M, és minden háromszög további két csúcspontja a vezérkör két egymásután következő osztási pontja, tehát minden háromszög határolva van két kúpalkotóval és a vezérkörbe írt szabályos tizenhatszög egy oldalával, utóbbi az első képsíkban valódi nagyságban látszik, míg a kúpalkotók valódi nagyságát a kúpalkotóknak a második képsíkkal parallel helyzetbe való forgatással határoztuk meg, amikor forgási tengelynek a kúp csúcspontjára illeszkedő első tengelyt használtuk fel. Ha minden háromszög valódi nagyságát a három oldalból megszerkesztettük és ezeket egy síkban a térbeli elhelyezkedés sorrendjében egymás mellett megrajzoljuk, és a kifejtett alkotók végpontjait egy folytonos görbével összekötjük, akkor közelítő pontossággal nyertük a palást kifejtését és evvel egyúttal a vezérgörbe kifejtését is (80. ábra). A vezérgörbe kifejtésében az ábra szerinti jelölés mellett a 0 és 8 pontban az érintő a 0, illetve 8 pontra illeszkedő kifejtett alkotóra merőleges, mert a térben is az. A vezérgörbe kifejtésének tetszőleges pontjában, mondjuk a 2 pontban az érintőt úgy szerkesztettük meg, hogy megrajzoljuk a 79. ábrában a 2 alkotómenti érintősík első nyomvonalát és feltüntettük a követhetőség kedvéért az érintősíkban a kúp csúcspontjára illeszkedő első esésvonalat. Az esésvonal első nyompontja, az érintési alkotó első nyompontja és a kúp csúcspontja derékszögű háromszög csúcspontjai, melynek a 2 pont melletti szöge az alkotó és érintő szöge. E szöget a kifejtésben úgy másoltuk le, hogy megszerkesztettük az esésvonal érdekelt részének valódi nagyságát és a kifejtésben e távolsággal a kifejtett M pont körül kört rajzoltunk, a kifejtett 2 pontból e körhöz vont egyik érintő a vezérkör kifejtésének 2 pontjában az érintő. Az adott felvétel mellett a vezérkör kifejtésének vannak inflexiós helyei is, e pontok az első kontúralkotókra illeszkedő pontok, P és Q, mivel e pontokhoz tartozó érintősíkok első vetítősíkok, és mint ilyenek, a



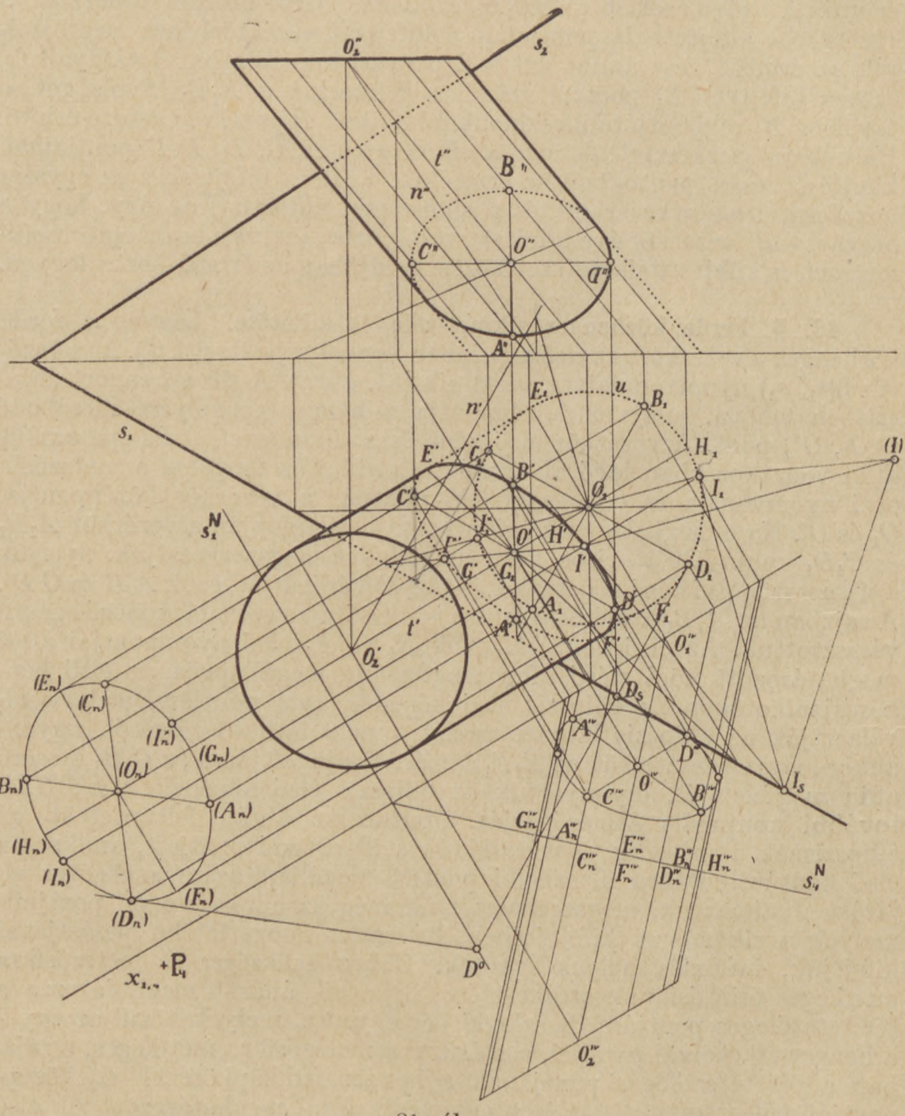
80. ábra.

kifejtendő vezérgörbe síkjára merőlegesek. A kifejtett P és Q pontokban az érintőket az előbb nyujtott általános utasítás szerint nyerjük.

A szerkesztett síkmetszet egyes pontjainak kifejtésére vonatkozólag különösebb megjegyezni valónk nincs; így, ha a B pont kifejtését akarjuk nyerni, akkor először a pontra illeszkedő b kúpalkotó kifejtését állapítjuk meg; hogy ezt nyerhessük, felkeressük a b alkotó B_1 első nyompontjának helyét a vezérgörbe kifejtésében, e végett a vezérgörbe kifejtésére a 3-as ponttól számítva a 2 pont felé felmérjük a 3 és B_1 pontok távolságát, amelyet a vezérgörbe első képében közvetlenül lemérhetünk. Ha a kifejtett B_1 pont ugyancsak B_1, akkor a kifejtésben a kifejtett M és B_1 pontok összekötő egyenese a kifejtett b alkotó, és miután erre az M, B pontok távolságának valódi nagyságát az M ponttól számítva felmértük, meghatároztuk a B pont kifejtését. A kifejtett B pontban az érintőt annak a szögnek lemásolásával szerkesztjük, melyet a B ponthoz tartozó érintő ugyane pontra illeszkedő kúpalkotóval alkot. Ha a 79. ábrában a b alkotómenti érintősík első nyomvonalának és a metszősík első nyomvonalának közös pontja B_s, akkor B B_s pontok összekötő egyenese a B ponthoz tartozó érintő. A szögmásolást a BB_1B_s általános háromszöggel végezzük, a vezérgörbe kifejtett B_1 pontjában a kifejtett vezérgörbéhez megrajzoljuk az érintőt, úgy amint azt a 2 ponttal kapcsolatban letárgyaltuk, erre a kifejtett B_1 ponttól számítva felmérjük a B_1B_s távolságot, e távolság B_s végpontjára illeszkedik a kifejtett B ponthoz tartozó érintő. Hasonlóan szerkesztettük meg a síkmetszet A, C, D, I, I^x pontjainak kifejtését és e pontokban az érintőket. Végül a kifejtéshez ez egyszer hozzácsatoltuk a vezérkört és a síkmetszet ellipszist, de úgy, hogy a hozzácsatolt vezérkör és a kifejtett vezérgörbe, illetve a hozzácsatolt síkmetszet és kifejtett síkmetszet közös pontjában az érintő közös legyen.

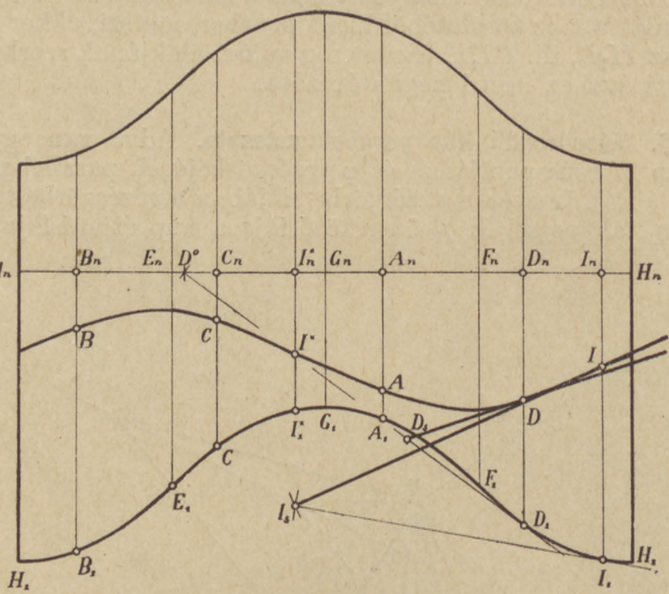
46. §. Ferde körhenger síkmetszete és kifejtése. Legyen a ferde körhenger u vezérköre az első képsíkban, tengelye pedig $t(t', t'')$. A metszősík $S(s_1, s_2)$ nyomvonalaival adott sík (81. ábra). A sík a hengert ellipszisben metszi, melynek középpontja a henger tengelyére illeszkedő $O(O', O'')$ pont. A vezérkör első képe és a síkmetszet első képe axiális affin vonatkozásban lévő alakzatok, az affinitás tengelye a metszősík első nyomvonala és egy megfelelő pontpár a vezérkör középpontja, O_1 és O'. Ha e meghatározott affin vonatkozás alapján a vezérkör A_1B_1 és C_1D_1 konjugált átmérők affin megfelelőit megszerkesztjük, nyerjük a síkmetszet első képének egy konjugált átmérőpárját, ezek $A'B'$ és $C'D'$. A rajzban az A_1B_1 átmérőt a metszősík első nyomvonalára merőlegesen választottuk. Az első kontúralkotók E_1 és F_1 első nyompontjai által meghatározott körátmérő affin megfelelője megállapítja az első képkörrajzalkotókon az ellipszis első képének ama pontjait, melyek elválasztják az ellipszis látható részét a nem látható részétől, ugyanakkor megszerkesztettük az E_1F_1 átmérő konjugáltjának, a G_1H_1 átmérő affin megfelelőjét, így nyertük az ellipszis első képének $E'F'$, $G'H'$ további konjugált átmérőpárját. Miután az ábrán feltüntettük az ellipszisnek a második kontúralkotókra illeszkedő pontjait, amikor az első kontúralkotókra illeszkedő pontok megállapítására szükséges eljárást alkalmaztuk, megszerkesztettük még az ellipszis azon pontjait, melyek a síkmetszet kifejtésében, ha azt a hengerfelület palástjával kifejtjük, inflexiós helyek lesznek. Ehhez szükséges a metszősíkra merőleges érintősíknak szerkesztése, ilyen sík állását meghatározza a tér tetszőleges pontjára illeszkedő két egyenes, melyek közül az egyik a henger alkotóival parallel, a másik n a metszősíkra merőleges, a rajzban a tér tetszőleges pontjának a henger fedőlapkörének O_2 középpontját választottuk. A t és n egyenesek által meghatározott sík első nyomvonalával parallel vezérkörérintő a keresett érintősík első nyomvonala, az érintősík érintési alkotójára illeszkedik a síkmetszetnek a kifejtésben inflexiós helyként mutatkozó pontja, az érdekelt pontok első képei I' és $I^{x\prime}$.

A henger palástjának kifejtésénél a szerkesztést ugyanúgy rendezzük be, mint a ferde hasáb oldallapjainak kifejtésénél. (I. kötet, 131. old.) Bevezetünk a henger alkotóival parallel negyedik képsíkot ; amennyiben a henger vezérgörbéje valamely képsíkban van, az új képsíkot erre a képsíkra merőlegesen választjuk, mert szerkesztéseinket ezáltal némileg egyszerűsítjük ; a mi esetünkben az új képsíkot az első képsíkra merőlegesen vettük fel. Ha meghatároztuk a síkmetszet szerkesztésénél szerephez jutott alkotóknak és a síkmetszet szerkesztett pontjainak



81. ábra.

negyedik képeit, felveszünk a henger alkotóira merőleges **N** síkot és megkonstruáljuk az **N** sík és hengerfelület normálmetszetének valódi nagyságát a normálmetszetnek egyenesre eső negyedik képének felhasználásával. Ha a már előbb megszerkesztett síkmetszet A, B, C, D, E,... pontjaira illeszkedő alkotók rendre a, b, c, d, e,... és a normálmetszetnek ez alkotókra illeszkedő pontjai rendre A_n, B_n, C_n, D_n, E_n,..., akkor (E_n) (F_n) a normálmetszet első képsíkba forgatottjának nagytengelye és (G_n) (H_n) a kistengelye. A normálmetszet valódi alakjának legnagyobb gonddal történt megrajzolása után a normálmetszetet egy egyenesre kifejtjük (82. ábra), és e kifejtésbe rendre beiktatjuk az A_n, B_n, C_n stb. pontokat. E pontokat ugyanúgy jelölve, A_n, B_n, C_n stb., e pontokra illeszkedő és a normálmetszet kifejtésére merőleges egyenesek lesznek a szerkesztéseinkben szereplő hengeralkotók kifejtettjei; ha egy-egy kifejtett hengeralkotóra a normálmetszet kifejtésétől számítva felmérjük az alkotónak az első képsík és normálmetszet közti darabját, illetve az alkotónak **S** és **N** sík közti darabját, akkor nyerjük a vezérgörbe, illetve az **S** síkkal való síkmetszet egy-egy pontjának



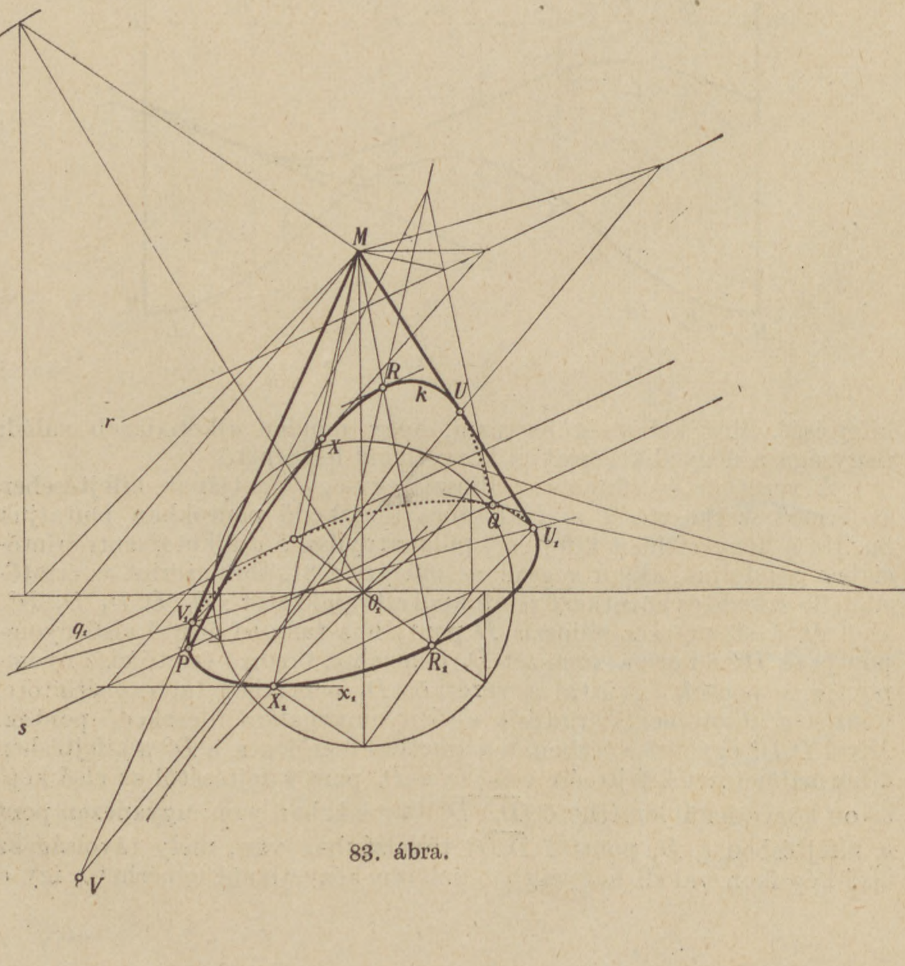
82. ábra.

kifejtését. Meg kell még jegyezni, hogy minden alkotódarab valódi nagysága a negyedik képsíkon közvetlenül lemérhető.

A vezérkör és síkmetszetellipszis egy-egy pontjának kifejtésében az érintő szerkesztését a d alkotóra illeszkedő pontokban mutatjuk be. Ha a hengerfelület kifejtését pillanatnyilag a d alkotómenti érintősíkban gondoljuk, akkor vegyük szemügyre a 81. ábra szerint az érintősíkra illeszkedő és következő pontokból álló alakzatot: D_n, D, D_1, D_s, $D°$, ahol D_s a síkmetszet ellipszis D pontjához tartozó érintő első nyompontja és $D°$ a normál metszet D_n pontjához tartozó érintő első nyompontja, e pontok egyúttal a vezérkör D_1 pontjához tartozó érintőre, mint a d alkotómenti érintősík első nyomvonalára illeszkedő pontok. Mivel $D_nD°$ egyenes a térben a d alkotóra merőleges, a $D°$ a kifejtésben a normálmetszet kifejtésére esik, és a D_n pont kifejtésétől az első képsíkon közvetlenül lemérhető $\overline{(D_n)\,D°}$ távolságban van; ugyanezen pont a kifejtésben a D_1 ponttól $\overline{D_1D°}$ távolságban van, mely távolság az első képsíkon valódi nagyságban szintén közvetlenül lemérhető, így a

D^0 pont szerkesztésére ellenőrzés is áll rendelkezésünkre. A kifejtésben a D_1 és D^0 pontok összekötő egyenese a vezérkör kifejtésének D_1 pontjához tartozó érintője. Ha a szerkesztett érintőre a D_1 ponttól számítva felmérjük a D_1D_s távolságot a d alkotómenti érintősík első nyomvonalán feltüntetett értelemben, akkor a kifejtésben így nyert D_s pont a síkmetszet ellipszis kifejtett D pontjával meghatározza az ellipszis kifejtett D pontjában az érintőt. A kifejtett vezérgörbe G_1 és H_1 pontjában az érintő merőleges a pontra illeszkedő alkotóra, az E_1 és F_1 pontok a kifejtés inflexiós pontjai. Ha a síkmetszet kifejtett görbéjének inflexiós pontjában kívánjuk az érintőt megszerkeszteni, akkor a D érintőjénél alkalmazott szerkesztést nem alkalmazhatjuk, mert az I és I^x ponthoz tartozó felületi érintősík első nyomvonala a normálmteszet síkjának első nyomvonalát a rajz területéből kieső pontban metszi, ekkor a legegyszerűbb az II_1I_s, ill. $I^xI_1^xI_s^x$ háromszög valódi alakjának szerkesztésével és lemásolásával az érintő meghatározása.

47. §. Másodrendű kúp parabolametszete. Adva van egy másodrendű kúp M csúcspontjának és u vezérgörbéjének parallel perspektív képe (83. ábra). Legyen a vezérgörbe síkjában a vezérgörbe tetszőleges érintője q_1, akkor M és q_1 összekötősíkja a kúp érintősíkja, e síkkal

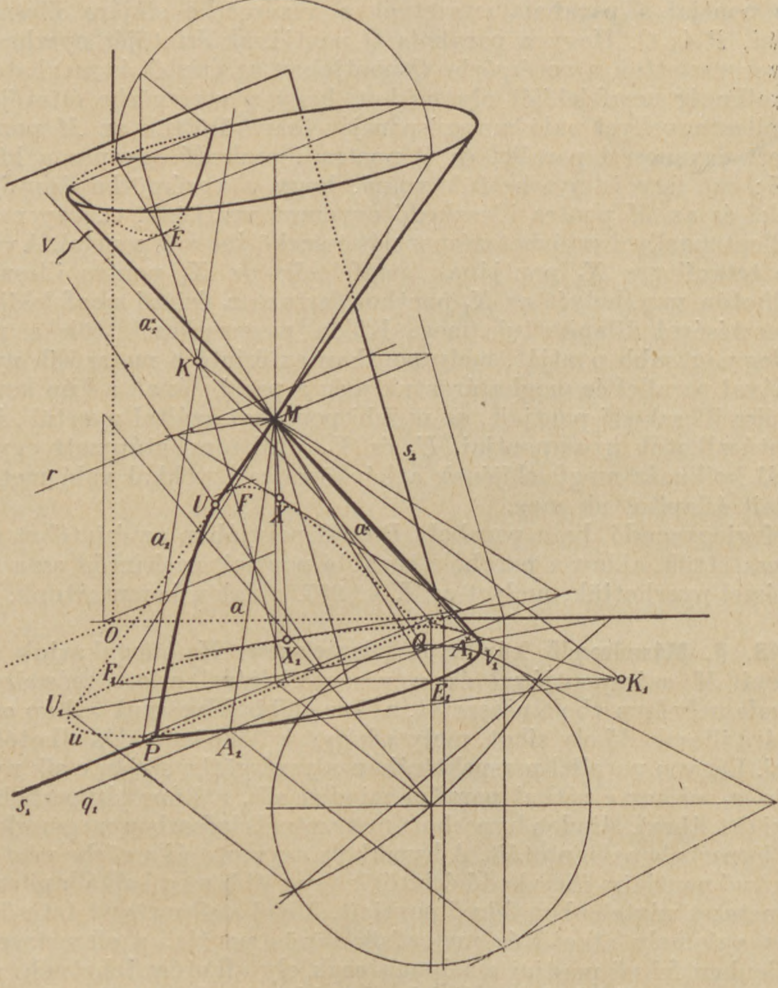


83. ábra.

parallel minden sík a kúpot parabolában metszi. A metszősík nyomvonala a vezérgörbe síkján a q_1 egyenessel parallel egyenes, legyen ez s. A parabolametszet parallel perspektív képének pontjai és érintői centrál kollineár megfelelői a vezérgörbe parallel perspektív képéhez tartozó pontoknak és érintőknek. A centrális kollineáció tengelye s, centruma M, egyik ellentengelye q_1, másik ellentengelye r az M ponttól ugyanolyan távolságban van, mint s egyenes a q_1 egyenestől. A vezérgörbe és tengely közös pontjai a parabolametszetnek a vezérgörbe síkjára illeszkedő pontjai, P és Q. Hogy a parabola Q pontjának érintőjét nyerhessük, megszerkesztettük a vezérgörbe Q pontjában az érintőt és meghatároztuk kollineár megfelelőjét oly módon, hogy a vezérgörbe érintőjének a q_1 ellentengellyel való metszéspontját összekötöttük az M ponttal, a nyert egyenessel parallel és Q pontra illeszkedő egyenes a kívánt érintő; ezt úgy is nyerhettük volna, hogy a vezérgörbe érintőjével parallel és az M pontra illeszkedő egyenest vezetünk, ez egyenesnek az r ellentengellyel való metszéspontját összekötjük a Q ponttal. A vezérgörbe tetszőleges X_1 pontjának megfelelője az X_1 pontra illeszkedő kúpalkotón van, helyét az X_1 ponthoz tartozó x_1 érintő megfelelőjének szerkesztésével állapítottuk meg. Külön megszerkesztettük a parabola legmagasabb pontját, mely pontban az érintő a metszősík nyomvonalával parallel és meghatároztuk még a parabolának a kúp kontúralkotóira illeszkedő pontjait, az utóbbi pontokat azáltal nyertük, hogy a kontúralkotók nyompontjai, U_1 és V_1 által meghatározott egyenes centrál kollineár megfelelőjének a képkörrajzalkotókkal való metszéspontjait állapítottuk meg.

Megjegyzendő, ha a parabola P és Q pontjában az érintőket megszerkesztettük, akkor a parabola további pontjait és érintőit ama szerkesztéssel nyerhetjük, melyet az I. k. 237. oldalon bemutattunk.

48. §. Másodrendű kúp hyperbolametszete. Ha megakarjuk szerkeszteni M csúcspontjával és u vezérgörbéjével adott másodrendű kúp valamely hyperbolametszetét, akkor előbb felvesszük a kúp csúcspontjára illeszkedő oly síkot, mely a kúpot különböző valós alkotókban metszi. Legyen parallel perspektívában a vezérgörbe síkján e sík nyomvonala q_1, akkor e síkkal parallel minden sík, a kúpot hyperbolában metszi (84. ábra). Minden hyperbola metszetnél elsősorban megszerkesztjük a hyperbola asymptotáit. A hyperbola asymptotái a görbe végtelenben fekvő pontjaira illeszkedő érintők s így előbb meg kell állapítanunk a síkmetszet végtelenben fekvő pontjait. Mivel a síkmetszet tetszőleges pontja valamely alkotó és metszősík közös pontja, a síkmetszetnek végtelenben fekvő pontjai a kúpnak csak oly alkotóin lehetnek, mely alkotók a metszősíkkal parallelek, de akkor ezek az alkotók a kúp csúcspontjára illeszkedő és a metsző síkkal parallel síkban vannak. Felvételünk szerint az utóbbi sík nyomvonala a vezérgörbe síkján q_1, tehát q_1 és u közös pontjaira, A_1 és $A_1^{\times}$ pontokra illeszkedő a és $a^{\times}$ alkotók végtelenben fekvő pontjai a hyperbola metszet végtelenben fekvő pontjai. A hyperbola végtelenben fekvő pontjában az érintőt ugyanúgy szerkesztjük meg, mint a síkmetszet hyperbola bármely más pontjában, vagyis megszerkesztjük a kúpnak azon érintősíkját, melynek érintési pontja a megszerkesztett végtelenben fekvő pont, az érintősík és metszősík közös egyenese lesz a metszet asymptotája. A kúpnak érintősíkja az a, illetve $a^{\times}$ végtelenben fekvő pontjában, mivel a kúp érintősíkja a kúpot az egész alkotó mentén érinti, azonos avval az érintősíkkal, melyet az a, illetve $a^{\times}$ alkotó bármely pontjában szerkesztünk. Az a, illetve $a^{\times}$ menti érintősík nyomvonala a vezérgörbe síkján a vezérgörbe érintője az A_1, illetve $A_1^{\times}$ pontjában, tehát a rajzolt érintő és a metszősík s nyomvonalának közös pontja a keresett asymptota



84. ábra.

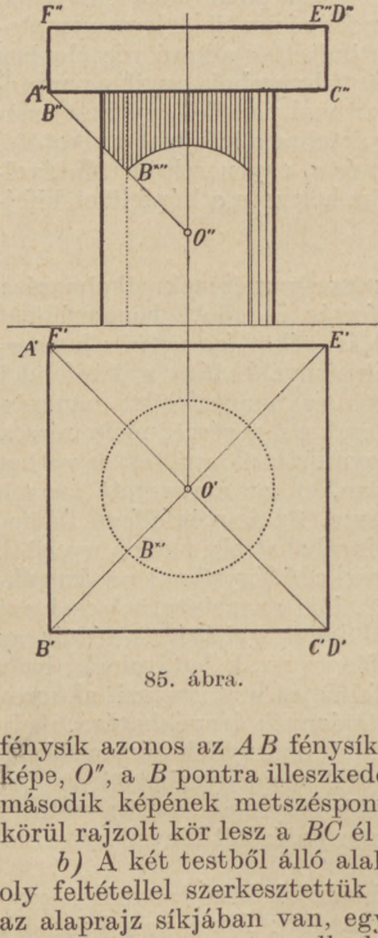
nyompontja a vezérgörbe síkján, és mivel továbbá az asymptota parallel az érintősíkra illeszkedő érintési alkotóval, a metszet a_1 és $a_1^{\times}$ asymptotái megrajzolhatók. Az asymptoták metszéspontja a hyperbola K középpontja, e pont e szerint három sík közös pontja, a három sík: az a alkotómenti, az $a^{\times}$ alkotómenti érintősík és a metszősík. De akkor a hyperbola középpontját úgy is nyerhettük volna, hogy a két érintősík közös egyenesének, melynek nyompontja a vezérgörbe síkján az A_1 és $A_1^{\times}$ pontokhoz tartozó vezérgörbeérintők közös K_1 pontja, egy másik pontja a kúp csúcspontja, megszerkesztjük a metszősíkkal való metszéspontját; mondhatjuk a szerkesztésből kifolyólag azt is, hogy a hyperbola középpontja annak a pontnak centrál kollineár megfelelője, mely pont a q_1 ellentengelynek az u vezérgörbére vonatkoztatott pólusa. A hyperbola tetszőleges pontját, X és az ábrázolás szempontjából fontos pontjait, E, F, U, V, a hyperbola és vezérgörbe parallel perspektívái között fennálló centrális kollineár vonatkozás alapján szerkesztettük meg.

Amennyiben a hyperbolametszetet a kúp palástjával kifejtjük, a kifejtett hyperbolának is lesz végtelenben fekvő pontja és lesz asymptotája. Az egyik végtelenben fekvő pont a kifejtett σ alkotó végtelenben fekvő pontja, e pontban az érintőt, a kifejtett hyperbola egyik asymptotáját úgy nyerjük, hogy a kifejtett a alkotóval parallel egyenest szerkesztünk, melynek távolsága és a távolság értelme a kifejtett a alkotótól nagyságra és értelemre nézve egyezik az a és a_1 egyenesek térbeli távolságával, mert érintő és alkotó viszonylagos helyzete a kúpfelület kifejtésével nem változik.

49. §. Kúp- és hengerfelület síkmetszetszerkesztésének alkalmazása árnyékszerkesztéseknél. Gondoljunk fényforrás és adott hengerfelület között pl. kúpfelületet, akkor a kúpfelület árnyékot fog vetni a hengerfelületre, a hengerfelületre vetett árnyék árnyékhatára a kúpfelület önárnyékhatáralkotójára illeszkedő fénysík és hengerfelület metszésvonala, helyesebben a metszésvonalnak csak az a része, mely rész a hengerfelület megvilágított részén van. Ugyanúgy síklapú test is vethet árnyékot kúpfelületre vagy hengerfelületre, ekkor a rávetett árnyék árnyékhatára kúpszeletívekből tevődik össze. Az árnyékfelfogó felület megvilágított részén az egyes kúpszeletívdarabokat oly módon nyerjük, hogy a polieder egy önárnyékhatárélére illeszkedő fénysíknak az árnyékfelfogó felülettel való metszetét megszerkesztjükés a metszetnek csak azt a részét vesszük figyelembe, melyet a felület megvilágított részén az önárnyékhatárél végpontjaira illeszkedő fénysugarak határolnak, ha e fénysugarak közül valamelyik az árnyékfelületet nem metszi, akkor a metszet ama pontjával végződik a rávetett árnyék árnyékhatára, mely pont a metszet és az árnyékfelfogó felület önárnyékhatárvonalának közös pontja és itt általános érvényességgel megjegyezhetjük azt is, hogy minden ilyen pontban a metszet érintője fénysugár, mert a metszet e pontjában az érintő két fénysík metszésvonala és két fénysík metszésvonala mindig fénysugár.

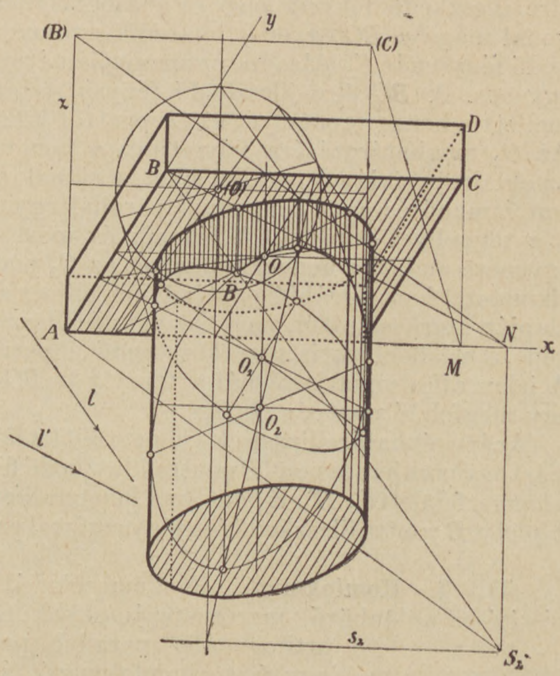
A most tárgyalt árnyékszerkesztési feladatok közé tartozik a gyakorlatban sokszor előforduló következő feladat: Adva van koaxiális helyzetben egy egyenes körhenger és négyoldalú szabályos hasáb úgy, hogy a henger fedőlapsíkja azonos legyen a hasáb alapsíkjával. Parallel világítás mellett szerkesztessenek meg az összes árnyékok.

a) A feladatot megoldjuk először orth. parallel projekcióban a szokásos 45°-os parallel világítás mellett és feltesszük, hogy a henger és hasáb közös tengelye az első képsíkra merőleges és a hasáb két oldallapja profilsík (85. ábra). Első dolgunk a henger önárnyékhatáralkotóinak és a hasáb önárnyékhatáréleinek meghatározása. A henger önárnyékhatáralkotóinak első nyompontjai a fénysugár első képére merőleges körátmérő végpontjai. A hasáb önárnyékhatáralkotói az ábra szerinti jelölés mellett az $ABCDEF$ torzpoligon oldalai. A hasáb AB és BC élének a hengerre vetett árnyéka lesz a hengerre vetett árnyék árnyékhatára. Az AB él a második képsíkra merőleges, ez egyenesre illeszkedő fénysík második vetítősík, melynek második nyomvonala az $A'' \equiv B''$ pontra illeszkedő és a fénysugár második képével parallel egyenes. A fénysík és henger metszete ellipszis, melynek egyenesszerű második képe a fénysík második nyomvonalának a henger második képkörrajzalkotói által határolt része. E metszetből a hengerre vetett árnyék határaként csak az a rész érvényesül, mely a metszet és nem látható önárnyékhatáralkotó közös pontjától a B pontra illeszkedő fénysugár és hengerfelület $B^{\times}$ metszéspontjáig terjed, ahol a $B^{\times}$ pont első képe a B pontra illeszkedő fénysugár első képének a henger vezérkörével való metszéspontja. A BC él az $x_{1,2}$ tengellyel parallel egyenes, s így erre az élre illeszkedő fénysík az első felezősíkkal parallel. E fénysík és henger metszete ellipszis, melynek első képe kör, a henger vezérköre, de akkor második képe is kör, mert első felezősíkkal parallel síkra illeszkedő alakzat két képe egybevágó. A metszet középpontjának második képe lesz a metszet körként mutatkozó második képének középpontja. A metszet középpontja a henger tengelyének a BC élre illeszkedő fénysíkkal való metszéspontja. Ezt úgy szerkesztjük meg, hogy a fénysíkot a henger tengelye körül 90°-kal az óramutató járásával egyező értelemben elforgatjuk, elforgatás után a fénysík azonos az AB fénysíkjával, s így a keresett középpont második képe, O'', a B pontra illeszkedő fénysugár második képének és a tengely második képének metszéspontja. A henger alapkörének sugarával O'' körül rajzolt kör lesz a BC él rávetett árnyékának második képe.



85. ábra.

b) A két testből álló alakzat kavalierperspektív alulnézetes képét oly feltétellel szerkesztettük meg, hogy a négyzetes hasáb alaplapja az alaprajz síkjában van, egy oldallapja a felrajz síkjában van, az y tengely képe az x tengellyel 60°-os szöget alkot és $q_y = \frac{2}{3}$ (86. ábra). Miután e feltételek alapján a hasáb képét megrajzoltuk, megszerkesztettük a henger födőlapkörének axonometrikus képét oly módon, hogy a hasáb alaplapját beforgattuk a felrajz síkjába, három csúcspontjának beforgatottja $A \equiv (A)$, (B), (C). A beforgatásban megrajzoltuk a kört a beforgatott négyzettel koncentrikus helyzetben, középpontja (O), majd meghatároztuk a középpont képét, az O pontot, úgyhogy az alapnégyzet képében az átlók metszéspontját állapítottuk meg. Mint tudjuk, a kör leforgatottja és axometrikus képe axiális affin vonatkozású alakzatok, mely affinitásnál a tengely x és egy megfelelő pontpár (O), O. Az affinitás alapján megszerkesztettük a kör egy konjugált átmérőpárjának, mely átmérők közül az egyik az x tengellyel parallel, axonometrikus képét. A kör képében lényeges pontok a henger képkörrajz alkotóira illeszkedő pontok, e pontokban a kör képében az érintők a z tengely képével parallel egyenesek, azért felvettünk az alaprajz síkjában oly egyenest, melynek képe a z tengely képével parallel, a CM egyenest, és meghatároztuk ennek beforgatottját, a (C) M egyenest, a beforgatásban a nyert egyenesre merőleges körátmérő végpontjai a kontúrpontok beforgatottjai, ezek affin megfelelői a kívánt kontúrpontok. A hengert alulról határoló kör képe a födőlapkör képével kongruens ellipszis.



86. ábra.

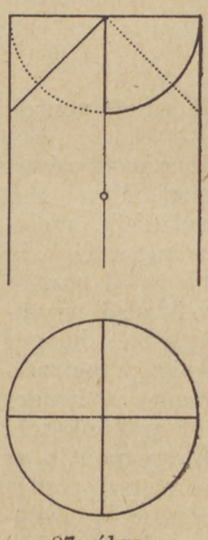
Az adott l, l' fénysugár melletti árnyékszerkesztést a henger önárnyékhatáralkotóinak meghatározásával indítjuk meg. Mivel a henger első vetítőhenger, a födőlapkörön az önárnyékhatáralkotók nyompontjai a fénysugár alaprajzával parallel érintők érintési pontjai. Ezért a B pontra illeszkedően megrajzoltuk a fénysugár alaprajzát és ezt az egyenest, mint az alaprajz síkjának egyenesét, a felrajzsíkjába beforgattuk, a nyert (B) N egyenesre merőleges átmérő végpontjai a keresett pontok leforgatottjai.

Az AB élnek a hengerre vetett árnyéka ama ellipszisnek része, melyben az AB élre illeszkedő fénysík a hengert metszi. Mivel AB a felrajz síkjára merőleges, fénysíkja oly második vetítősík, melynek második nyomvonala a fénysugár felrajzával parallel, a fénysík második nyomvonalának egy pontja A, másik pontja a B pontra illeszkedő fénysugár második nyompontja, S_2. A fénysík első nyomvonala az AB egyenes. A nyomvonalaival adott fénysík és henger síkmetszetének középpontját a fénysík és a hengertengely metszéspontjában találjuk. A metszéspont meghatározása végett a henger tengelyére illeszkedő és a felrajz síkjával parallel síkot vettünk fel; e sík a fénysíkot második fővonalban metszi, melynek egy pontja az O pontra illeszkedő és x tengellyel parallel egyenesnek metszéspontja az AB egyenessel, a fővonal és tengely közös pontja a keresett O_1 középpont. A fénysík síkmetszetében további pontokat úgy szerkesztettünk meg, hogy igénybe vettük azt az affin vonatkozást, melyet a henger két síkmetszete között minden parallel projekció a képsíkon megállapít. Az egyik síkmetszet képe a henger fedőlapkörének képe, a másik síkmetszet képe a keresett árnyékellipszis képe. Az affin vonatkozásnál az affinitás tengelye a két síkmetszet közös egyenesének parallel képe, ez a jelen esetben az AB egyenes, továbbá egy megfelelő pontpár, O, O_1. Az árnyékellipszisnek meghatároztuk egy konjugált átmérőpárját és azon pontjait, melyek a henger kontúralkotóira esnek.

A BC élnek a hengerre vetett árnyékánál meghatároztuk a BC élre illeszkedő fénysík első és második nyomvonalát, az első nyomvonal maga a BC egyenes, második nyomvonala s_2, a B pontra illeszkedő fénysugár S_2 második nyompontján átmenő és x tengellyel parallel egyenes. A BC élre illeszkedő fénysík tetszőlegesen adott fénysugár mellett a henger tengelyét az O_1 ponttól különböző O_2 pontban metszi. Az O_2 meghatározására felvettünk a henger tengelyére illeszkedő és az oldalrajz síkjával parallel síkot, e síknak első nyomvonala az O ponton átmenő és az y tengellyel parallel egyenes, második nyomvonala a z tengellyel parallel. A fénysík és most választott segédsík közös egyenese metszi a henger tengelyét az O_2 pontban. A fénysík és henger síkmetszetének további pontjait két ellipszis axiális affin vonatkozása alapján szerkesztettük meg ; az egyik ellipszis a henger födőlapkörének képe, a másik ellipszis a szerkesztendő ellipszis, melynek középpontja O_2. A jelen affin vonatkozásnál a tengely a BC él axonometrikus képe és egy megfelelő pontpár O, O_2.

Az árnyékhatárellipszisek a hengerfelület látható részében metszik egymást egy pontban, e pont B pontra illeszkedő fénysugárnak metszéspontja a hengerfelülettel, B^*. E pont ama hengeralkotón van, melyben a hengerfelület a B pontra illeszkedő és a fénysugárral parallel első vetítősík metszi.

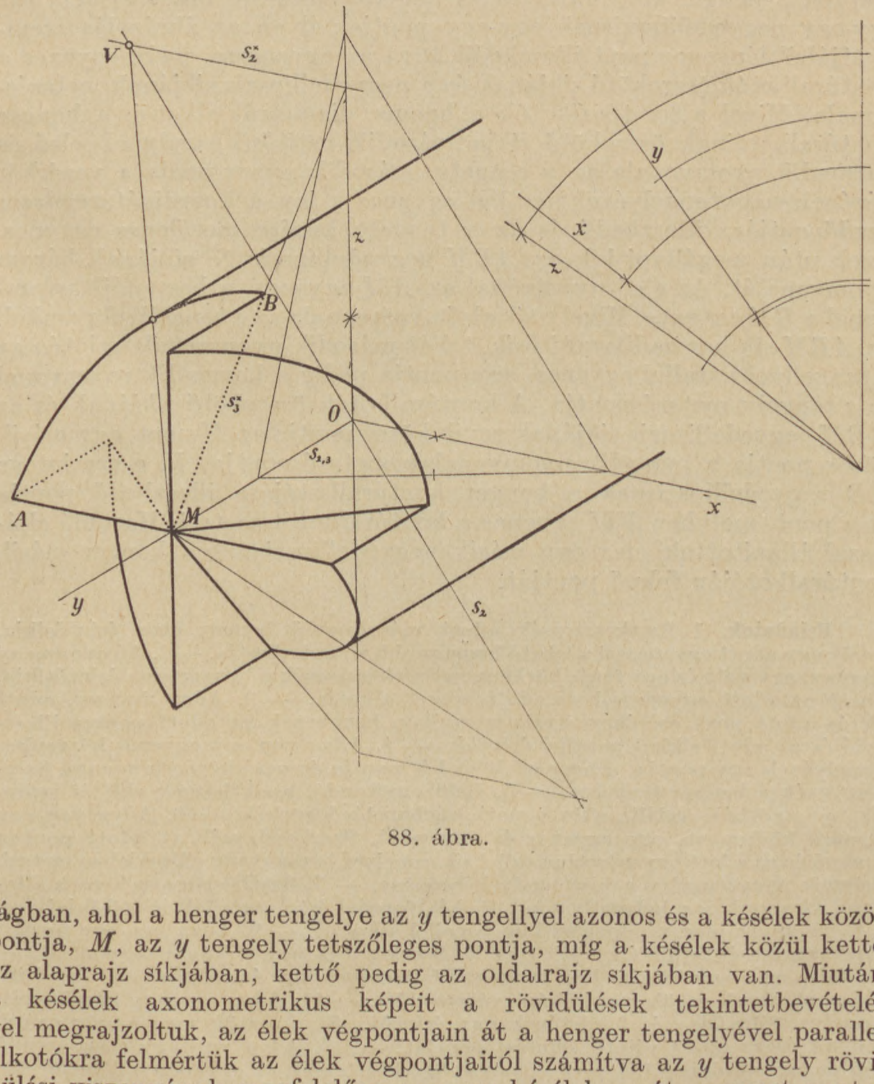
50. §. Homlokmaró. Fémlemezek átfúrása, hengeres üregek készítése különböző marószerszámokkal történik. A 87. ábrában orthogonális parallel projekcióban két képsíkon egy ú. n. homlokmarót ábrázoltunk. A maró teste forgási hengerfelülettel határolt test, melynek egyik végén kések vannak. A kések élei a henger vezérkörének sugarai és egy-egy késélben két sík metszi egymást. Az egyik sík az élre illeszkedő és a henger tengelyén átmenő sík, a másik sík a henger tengelyével 45°-os szöget alkot. Ha felvesszük azt, hogy a marónak négy kése van, akkor a kések éleit úgy helyezzük el, hogy azok a henger vezérkörének két egymásra merőleges átmérőjén legyenek. E feltételeknek megfelelő marót a két képsíkkal szemben úgy helyeztük el, hogy két késél a második képsíkra merőleges átmérőn és a másik két él az $x_{1,2}$ tengellyel parallel átmérőn van. Az ábrázolt maróra nézve csak azt kell megjegyezni, hogy a késélre illeszkedő és a henger tengelyével 45°-os szöget bezáró sík a maró hengerfelületét ellipszisben metszi, minden ellipszisből a nagytengely és kistengely végpontja által határolt



87. ábra.

negyedellipszis érvényesül. Két negyedellipszis második képe egyenes és a további negyedellipszisek második képei negyedkörívek, még pedig azért körívek, mert egy-egy negyedellipszis síkja az első, illetve második felezősíkkal parallel. Első, illetve második felezősíkkal parallel síkban fekvő alakzat első és második képe kongruens, és mivel jelen felvételnél a negyedellipszis első képe kör, második képe is kör.

A homlokmarónak orthogonális axonometrikus képét adott tengelykereszt mellett a 88. ábrában szerkesztettük meg kétszeres nagy-



88. ábra.

ságban, ahol a henger tengelye az y tengellyel azonos és a késélek közös pontja, M, az y tengely tetszőleges pontja, míg a késélek közül kettő az alaprajz síkjában, kettő pedig az oldalrajz síkjában van. Miután a késélek axonometrikus képeit a rövidülések tekintetbevételével megrajzoltuk, az élek végpontjain át a henger tengelyével parallel alkotókra felmértük az élek végpontjaitól számítva az y tengely rövidülési viszonyának megfelelően egy-egy késél hosszát, a nyert pontokat rendre összekötöttük a késélek közös pontjával, minden ilyen egyenes egy-egy negyedellipszis nagytengelye és ugyanakkor egy késél negyedellipszis kistengelye. E szerint az ábrában minden negyedellipszis konjugált átmérőpárja ismeretes, miből minden ellipszis érvényesülő része megrajzolható. Ezek után megállapítottuk a maró hengerfelületének kontúralkotóit. A henger vezérkörének síkja a kések által meghatározott sík, mely a felrajzsíkjával parallel. E síkban a vezérkör axonometrikus képe oly ellipszis, melynek nagytengelye a nyomháromszög második nyomvonalával parallel vagy az y tengely képére merőleges egyenes, mivel ez az egyenes az axonometrikus képsíkkal parallel egyenes, ezen rövidülés nincs s így erre a henger vezérkörének sugara valódi nagyságban felmérhető. A nyert végpontokra illeszkedő hengeralkotók a henger kontúralkotói. A két kontúralkotó mindegyikén lesz egy-egy negyedellipszisnek egy-egy pontja ; ilyen az ábrázolás szempontjából lényeges pont illeszkedik arra az egyenesre, mely egyenes a kontúralkotók összekötő síkjának és a negyedellipszis síkjának metszésvonala. Mivel a kontúralkotók a henger diametrál alkotói, a henger kontúralkotóinak összekötő síkja második vetítősík, melynek első és harmadik nyomvonala az y tengely, második nyomvonala a vezérkör képének nagytengelyével parallel egyenes s így a koordinátarendszer kezdőpontjára illeszkedő és az y tengely képére merőleges egyenes. Ezek után megállapítjuk az ABM negyedellipszis S^x síkjának három nyomvonalát. Az első nyomvonal az AM egyenes, a harmadik nyomvonal a BM egyenes. Mivel e sík első nyomvonala az x tengellyel parallel, az ABM sík harmadik vetítősík, tehát második nyomvonala szintén az x tengellyel parallel egyenes, egy pontja pedig a harmadik nyomvonal és z tengely metszéspontja. A kontúralkotók összekötő síkjának és az ABM negyedellipszis síkjának egyik közös pontja az M pont, egy másik közös pontja a második nyomvonalak metszéspontja, V, e szerint az AB negyedellipszisnek a henger kontúralkotójára illeszkedő pontja az a pont, melyben VM egyenes a kontúralkotót metszi. Hasonló eljárással állapítottuk meg egy másik negyedellipszisnek a henger másik kontúralkotóján fekvő pontját.

Feladatok. 1 Szerkesztessék adott másodrendű henger ama érintősíkja, amely egy adott egyenessel a lehető legnagyobb szöget alkotja. — 2. Adva van egy egyenes, egy szög és egy ferde körhenger. Szerkesztessék a henger ama érintősíkja, amely az adott egyenessel az adott szöget alkotja. — 3. Adott henger, adott sík és adott pont esetében szerkesztessék a hengernek az adott pontra illeszkedő és az adott síkkal parallel érintője. — 4. Adva van egy egyenes körgenher tengelyének egy pontja, a hengerfelület két pontja és vezérkörének sugara. Szerkesztessék a henger tengelye. — 5. Bebizonyítandó, hogy henger első és második nyomgörbéje axiális affin vonatkozásban lévő görbék. — 6. Adva van egy egyenes körhenger, egy egyenes és egy pont. Szerkesztessék az adott ponton átmenő és az adott egyenessel parallel sík, amely a hengert oly ellipszisben metszi, melynek nagytengelye a kistengely kétszerese. — 7. Szerkesztessenek meg általános viszonylagos helyzetben adott két forgási kúp parallel érintősíkjai. — 8. Szerkesszük meg két forgási kúp parallel alkotóit. — 9. Adva van egy forgási kúp tengelye és felületének két pontja. Szerkesszük meg a kúp csúcspontját. — 10. Adva van egy forgási kúp tengelye, felületének egy érintője és ezen az érintési pont. Szerkesszük meg a kúp csúcspontját. — 11. Adva van egy kúp forgási tengelye, félnyílása és felületének egy érintője. Szerkesszük meg a kúp csúcspontját és az adott réintő érintési pontját. — 12. Adva van egy másodrendű kúp és egy általános helyzetű egyenes. Szerkesztessék az egyenesen átmenő sík, amely a kúpot parabolában metszi. — 13. Adva van egy forgási kúp és egy egyenes, amely a kúpot valós pontokban metszi. Szerkesztessék az adott egyenesen átmenő sík úgy, hogy a sík és kúp metszetének kifejtésében az egyenes és kúp közös pontjának megfelelője inflexiós pont legyen.

Térgörbék.

51. §. A térgörbe és projekciója. Ha valamely görbe vonalnak pontjai nem illeszkednek egy és ugyanazon síkra, akkor a görbe térgörbe. A térgörbék lehetnek *algebrai vagy transzcendens görbék.* Az algebrai görbét a tér minden síkja egyenlő számú pontban metszi, melyek párosával képzetesek is lehetnek, e szám a térgörbe *rendszáma.* Az n-edrendű *térgörbe szétesést, elfajulást mutathat,* alacsonyabbrendű térgörbékre vagy síkgörbékre bomlik, *ekkor* azonban mindig *az egyes részek rendszámainak összege a térgörbe eredeti rendszámával egyenlő.*

Térgörbe projekcióján értjük a térgörbére illeszkedő pontok projekcióinak összességét. *Algebrai térgörbe vetületének rendszáma egyenlő a térgörbe rendszámával,* mert a térgörbe valamely vetítősíkra illeszkedő pontjainak száma mindig egyenlő ama pontok számával, mely pontokban a vetítősík nyomvonala a térgörbe vetületét metszi.

52. §. Egyszerű szelő, többszörös szelő. *Minden egyenes, mely a térgörbe egy és csakis egy pontjára illeszkedik, a térgörbe egyszerű szelője.* A térgörbe pontjaira illeszkedő vetítősugarak általában a térgörbének egyszerű szelői, e szelők összessége, ha a vetítési középpont végesben fekvő pont, a térgörbe vetítőkúpja, ha a vetítési középpont végtelenben fekvő pont, e térgörbe vetítőhengere.

Ha egy egyenes a térgörbét két pontban metszi, akkor az egyenes a térgörbe duplaszelője. A térgörbe vetítőkúpjának alkotói között vannak oly alkotók is, melyek a térgörbének duplaszelői. Ilyen alkotó mentén a projiciáló kúp önmagát metszi, ilyen alkotó a projiciáló kúpnak duplaalkotója. Ebből következik, hogy a görbe képének duplapontja ott lesz, ahol a projiciáló kúp duplaalkotója a képsíkot metszi. *A térgörbe képének oly duplapontja, mely a térgörbe két különböző pontjának közös képeként keletkezik, látszólagos duplapont, ellentétben a kép ama duplapontjával, amely a térgörbe duplapontjának képe.*

Tárgyalásaink folyamán oly térgörbékkel fogunk találkozni, melyeknél a projiciáló centrum különleges helyzeténél a projiciáló kúp, illetve henger minden alkotója a térgörbe duplaszelője. E speciális helyzetű centrumból vetítve a térgörbét adott képsíkra, a kép minden pontja kétszer számítandó pont, a kép a térgörbének *duplaprojekciója.* Ebből következik, hogy *a duplaprojekció rendszáma a térgörbe rendszámának fele,* ennek további következménye, hogy csak oly térgörbének lehet duplaprojekciója, melynek rendszáma páros szám.

53. §. Érintő, símulósík. Vegyük fel a térgörbe P és Q pontjait, akkor a PQ egyenes a térgörbe duplaszelője. Ha Q pont a térgörbét befutja, akkor a duplaszelő a P pont körül forog; a duplaszelő meghatározott határhelyzetbe jut, ha a Q pont a P ponthoz határtalanul közeledik, a duplaszelő e határhelyzete a térgörbe P pontjában az érintő. A duplaszelő határhelyzetének e részletes leírása helyett azt fogjuk mondani, hogy *a térgörbe érintője két szomszédos pontjának összekötő egyenese.* Ezek szerint az érintő a térgörbét két pontban metszi, az érintő a térgörbének speciális duplaszelője.

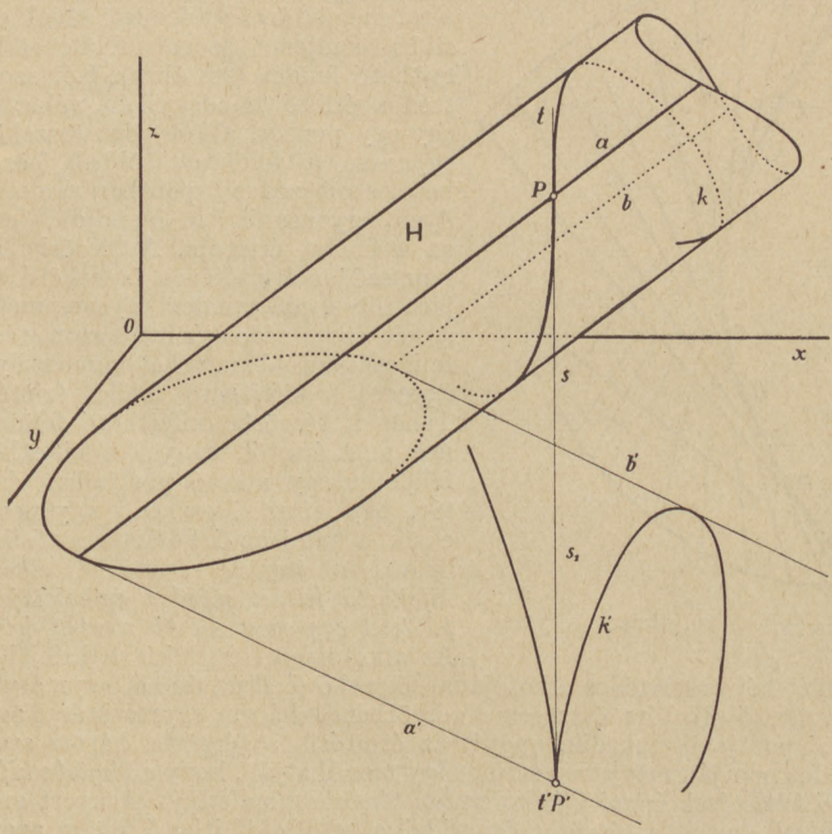
A térgörbe egy pontjára illeszkedő és e ponthoz tartozó érintőre merőleges egyenes a térgörbe egy normálisa. A térgörbe tetszőleges pontjára illeszkedő normálisok sugársort alkotnak, a sugársor síkja a térgörbe normálsíkja.

A térgörbe tetszőleges érintőjére illeszkedő bármely sík a térgörbe érintősíkja. A térgörbe érintősíkja a térgörbe két szomszédos pontjára illeszkedő sík, mert tartalmazza az érintő minden pontját, tehát azt a két szomszédos pontot is, melyben az érintő a térgörbét metszi. A térgörbe egy pontjához tartozó érintősíkok síksort alkotnak, melynek tengelye a ponthoz tartozó érintő. *Ha valamely érintősík a térgörbe két érintőjén megy keresztül, akkor az érintősík a térgörbe dupla érintősíkja.*

A térgörbét a P pontbeli tetszőleges érintősík további pontokban metszi, legyen az egyik metszéspont Q. Ha a Q pont a térgörbét befutja és közben az érintősík a térgörbét mindig a P pontban érinti, akkor az érintősíkok síksorából egy sík meghatározott határhelyzetbe jut, ha a Q pont minden határon túl a P ponthoz közeledik. Az érintősík e határhelyzete a térgörbe P pontjának símulósíkja. A símulósík e meghatározása alapján mondhatjuk azt is, hogy a *símulósík a térgörbe három szomszédos pontján megy keresztül,* avagy azt is, hogy *a símulósík két szomszédos érintő összekötő síkja.*

A térgörbe P pontbeli símulósíkjára illeszkedő és a P ponton átmenő normális a főnormális, míg a símulósíkra merőleges normális a binormális, továbbá az érintő és binormális által meghatározott érintősík a P pontbeli rektifikálósík. A térgörbe egy pontjának símulósíkja, normálsíkja és rektifikálósíkja háromszorosan derékszögű triédert alkot, a térgörbe kísérő triéderét, a triéder élei a mindenkori érintő, főnormális és binormális.

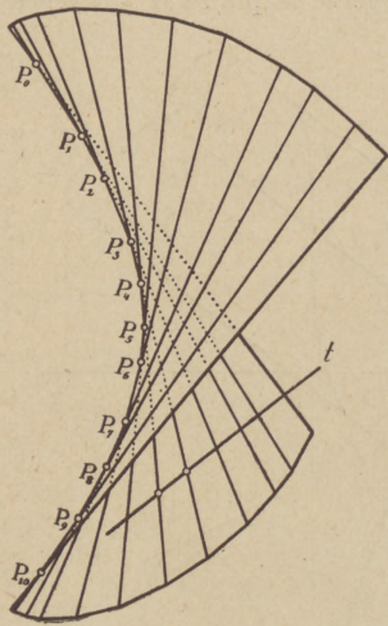
A térgörbe érintőjének és símulósíkjának fogalmával a térgörbe képének egyes szingularitásai magyarázhatók. Mindenekelőtt megállapíthatjuk azt, hogy a görbe tetszőleges pontjához tartozó érintő képe a képgörbe érintője a pont képében, mert a görbe két szomszédos pontjának képe a képgörbe két szomszédos pontja. E szerint általában a görbe valamely közönséges érintőjének képe a képgörbe közönséges érintője. Más eredményhez jutunk, ha feltesszük azt, hogy a görbe egy pontjában a símulósík vagy a görbe érintője a vetítési középpontra illeszkedő elem. Tegyük fel, hogy térgörbénk P pontjában a símulósík a vetítési középpontra illeszkedik, akkor e símulósíknak a képsíkon levő nyomvonala, ha P' a P pont képe, a képgörbe P' pontjában érintő. De ha tekintetbe vesszük az infinitesimális geometria ama megállapítását, hogy a símulósík az érintési pontban, a símuló pontban a térgörbét nemcsak érinti, hanem metszi is, vagyis a térgörbe a símulópont környezetében a símulósík egyik oldaláról átmegy e sík másik oldalára, úgy ennek következménye, hogy a térgörbe képe a P' pont környezetében a símulósík nyomvonalának egyik oldaláról átmegy a másik oldalára, mert a símulósík feltételünk értelmében vetítősík. Mindezekből következik, hogy a vetítési középpontra illeszkedő símulósík nyomvonala a képgörbének inflexiós érintője, P' az inflexiós pont. A képgörbe e szingularitását bemutatjuk a 89. ábrán, ahol axonometrikus rajzban a **H** hengeren felvettük a k térgörbét úgy, hogy a görbe a henger egyik első körrajzalkotójára illeszkedő P pontjában a símulósík a z tengellyel parallel axonometrikus vetítősík legyen. Ha megszerkesztjük a hengeren felvett térgörbe alaprajzát, felvételünk szerint a P pont alaprajza, P', a henger egyik első képkörrajzalkotójára illeszkedő pont. Ha a henger első körrajzalkotói a, b és ezek első képei a', b', mondhatjuk, hogy a térgörbe alaprajza az a' és b' közé esik. A P pont símulósíkjának s_1 első nyomvonala a P' pontra illeszkedő és a z tengely axonometrikus képével parallel egyenes ; a símulósíkról feltettük, hogy az első vetítősík, s így az előzők szerint kell, hogy a térgörbe alaprajza az s_1 egyenest



89. ábra.

a P' pont környezetében két oldalról érintse, ez csak úgy lehetséges, hogy a P' pont a térgörbe alaprajzának csúcspontja. Eredményeinket összefoglalva mondhatjuk, *ha a térgörbe símulósíkja a vetítési középpontra illeszkedő sík, akkor a símuló pont képe a térgörbe képének inflexiós helye, és ha a térgörbe érintője a vetítési középpontra illeszkedő egyenes, akkor az érintési pont képe a térgörbe képének csúcspontja.*

54. §. A térgörbe kifejthető felülete. Legyenek a térgörbe szomszédos pontjai P_0, P_1, P_2, P_3,... akkor P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3,... a térgörbe egymásután következő érintői. Az egymásután következő érintők összességükben felületet adnak, a térgörbe kifejthető felületét. E felület egyenesvonalú felület, mert a felület minden pontjára illeszkedik egy egyenes, a térgörbe egy érintője, röviden a felület egy alkotója, melynek minden pontja felületi pont. E felület kifejthető, mert háromhárom egymásután következő érintő közül az első metszi a másodikat, a második metszi a harmadikat, az első és második érintő, valamint a második és harmadik érintő egy-egy síkot határoz meg, mely síkok közül a második érintő körüli forgatással az elsőbe beforgatható. Így fokozatos beforgatásokkal elérhetjük azt, hogy két-két szomszédos érintő által meghatározott felületi sávok egy síkba kerüljenek, szóval a felület síkbafejthető felület (90. ábra). Két szomszédos érintő mindegyikén választva egy-egy pontot, a két pont összekötő egyenese a felületet többek között két szomszédos pontban metszi, ilyen egyenesről azt mondjuk, hogy az a felület érintője. A térgörbe két szomszédos érintőjének összekötő síkjára illeszkedő minden egyenes metszi a két szomszédos érintőt szomszédos felületi pontokban, tehát minden ilyen egyenes a kifejthető felület érintője. Tehát a térgörbe kifejthető felületének ama érintői, melyek a kifejthető felületet egy alkotó pontjaiban érintik, egy síkra illeszkedő egyenesek, e sík a kifejthető felület érintősíkja. Szóval *a térgörbe érintőiből alkotott kifejthető felület minden érintősíkja a felületet egy egész alkotó mentén érinti.*



90. ábra.

Az alkotómenti érintősík a kifejthető felület két szomszédos alkotójának összekötő síkja, de két egymásután következő alkotóra összesen a térgörbének három egymásután következő pontja illeszkedik, vagyis az érintősík a térgörbe három szomszédos pontján megy keresztül, s így mondhatjuk, hogy a *térgörbe kifejthető felületének érintősíkja az eredeti térgörbe símulósíkja.* A nyert eredmények szerint a térgörbe érintőiből alkotott kifejthető felület azonos azzal a felülettel, melyet a térgörbe símulósíkjai burkolnak. A térgörbe kifejthető felületén az eredeti térgörbét a kifejthető felület *visszatérő* görbéjének mondjuk.

55. §. Térgörbe görbületi mértékei. Láttuk, hogy a térgörbe P pontjához tartozik egy símulósík, e símulósík a térgörbe három egymásután P, Q, R pontján átmenő sík. A símulósík e meghatározásából következik, hogy e síkra illeszkedik a térgörbe P és Q pontjához tartozó érintő. A térgörbe minden pontjához tartozik egy görbületi kör. A térgörbe P pontjában a görbületi kör a P ponthoz tartozó símulósíkban ama kör, mely a P, Q, R szomszédos pontokon átmegy és e kör sugara a térgörbe görbületi sugara a P pontban. A térgörbe P pontjában a görbületi sugarat ugyanúgy határozzuk meg, mint síkgörbénél. Ha a görbe két érintőjének szöge $\triangle\varphi$ és az érintési pontok által határolt ív hossza $\triangle s$, akkor

$$\lim_{\triangle s=0} \frac{\triangle\varphi}{\triangle s} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r},$$

ahol r a görbületi sugár és $\frac{1}{r}$ a térgörbe első görbületi mértéke a P pontban.

A térgörbének négy egymásután következő pontja, P, Q, R, S, két simulósíkot határoz meg, az egyik sík a P, Q, R pontok, a másik a Q, R, S pontok összekötő síkja. A két simulósík szöge a torzió szöge a térgörbe P pontjában. Ha a térgörbe két simulósíkjának szöge $\triangle\psi$ és a simuló pontok által határolt ív hossza $\triangle s$, akkor

$$\lim_{\triangle s=0} \frac{\triangle\psi}{\triangle s} = \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\varrho},$$

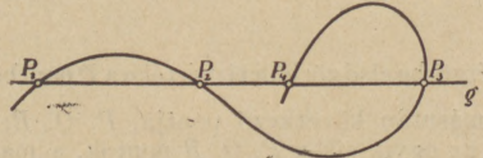
ahol ϱ a torzió sugara és $\frac{1}{\varrho}$ a térgörbe második görbületi mértéke a P pontban.

56. §. Kifejthető felület iránykúpja. *Térgörbe kifejthető felületének alkotóival parallel egyenesek, melyek a tér tetszőleges pontjára illeszkednek, kúpfelületet alkotnak, e kúp a kifejthető felület iránykúpja.* Mivel az iránykúp minden alkotója a kifejthető felület egy-egy alkotójával parallel, az iránykúpnak a végtelenben fekvő síkkal való síkmetszete azonos a kifejthető felület és végtelenben fekvő sík síkmetszetével, vagyis az iránykúp a kifejthető felület végtelenben fekvő pontjainak projiciáló kúpja. A térgörbe két szomszédos érintőjének összekötő síkja a térgörbe simulósíkja, az iránykúpnak a térgörbe két szomszédos érintőjével parallel kúpalkotói az iránykúpnak szomszédos alkotói, de az iránykúp két szomszédos alkotójának összekötő síkja az iránykúp érintősíkja, miből következik, hogy az iránykúp egy-egy érintősíkja a térgörbe egy-egy simulósíkjával parallel.

Görbe felületek.

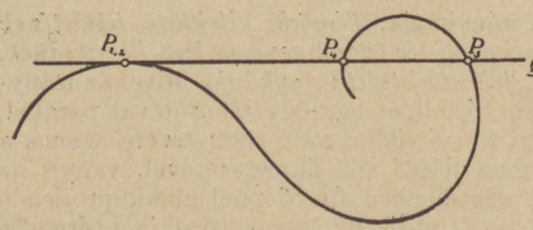
57. §. A görbe felületekről általában. Minden görbe felületet úgy származtathatunk, hogy valamely adott síkgörbét, vagy térgörbét adott törvény szerinti mozgásnak alávetjük és ugyanakkor a mozgó síkgörbét, illetve térgörbét adott törvény szerinti, a mozgás pillanatnyi helyzeteitől függő változásnak alárendeljük. A görbe felületet ily módon a görbe vonalak egy rendszerével állítottuk elő, de ez nem az egyedüli rendszer, mellyel a felület meghatározható. Így pl. ha valamely adott felületnek adott parallel síksor minden síkjával való metszetét meghatározzuk, akkor e síkmetszetek összessége a felületen fekvő görbék egy rendszere. Ezek szerint a görbe felületet akkor mondjuk adottnak, ha a felület síkgörbékből, vagy térgörbékből álló rendszere ismeretes.

Megkülönböztetünk algebrai és transzcendens felületeket. Az algebrai felületet a tér minden egyenese egyenlő számú pontban metszi, melyek párosával képzetesek is lehetnek, e pontok száma a felület rendszáma, tehát n-edrendű felület és egyenes közös pontjainak száma n. Messe az algebrai vagy transzcendens felületet a g egyenes a $P_1, P_2, \dots P_i, \dots$ pontokban, akkor a g egyenesre illeszkedő sík és felület síkmetszetének g egyenesre illeszkedő pontjai az egyenes és felület közös pontjai (91. ábra), mert minden ilyen pont felületi pont és a metszősíkra illeszkedő pont. Ebből következik, hogy a) *egyenes és felület közös pontjai mindazon síkmetszetek közös pontjai, melyeknek síkja az egyenesen keresztül megy*, b) *az n-edrendű felület síkmetszete n-edrendű.*



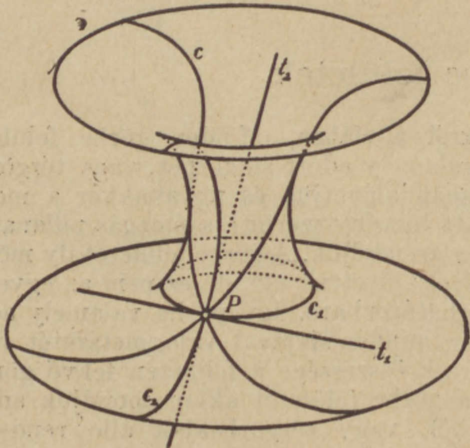
91. ábra.

58. §. Érintő. érintősík. Tegyük fel, hogy egyenes és felület közös pontjaiból kettő az egyenesen két egymásután következő pont, szomszédos pontok (92. ábra). Ekkor az egyenesre illeszkedő tetszőleges sík a felületet oly görbében metszi, melynek a g egyenessel való metszéspontjai közül az előbbi szomszédos pontok a g egyenesen mindig szomszédos pontok maradnak, e különleges helyzetű g egyenes a felület érintője. Ezzel utasítást nyertünk a felület érintőjének szerkesztésére. *Felület P pontjában egy érintőt úgy szerkesztünk meg, hogy meghatározzuk a felületnek a felület P pontjára illeszkedő síkkal való síkmetszetét és a síkmetszet P pontjában megállapítjuk az érintőt.*



92. ábra.

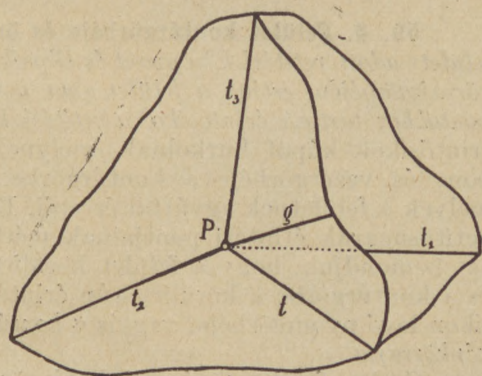
E szerint a felület P pontjában tetszőleges számú érintőt szerkeszthetünk meg, más-más érintőt nyerünk, ha a P pontra illeszkedő és a felületet metsző sík nem illeszkedik egy már megszerkesztett érintőre.



93. ábra.

Vegyük fel a felület P pontjában a t_1 és t_2 tetszőleges érintőkat, akkor a t_1 érintőre illesztett minden sík a felületet oly síkgörbében metszi, melynek P pontjában az érintő t_1 ; és t_2 érintőre illeszkedő minden sík a felületet oly görbében metszi, melynek P pontjában az érintő t_2 (93. ábra). De akkor a két érintő összekötő síkja a felületet oly görbében metszi, melynek P pontjában t_1 és t_2 is érintő, e szerint a P pont nem lehet a síkmetszetnek közönséges pontja, a P pont a síkmetszetnek csak duplapontja lehet. Síkgörbe duplapontjának tárgyalásánál láttuk, hogy a síkban a duplaponton átmenő minden egyenesen a duplapont az egyenes és síkgörbe metszéspontjainál kétszer számítandó pont. Ebből következik, hogy a t_1 és t_2 érintők összekötő síkjában a P pontra illeszkedő minden egyenes a felületet kétszer számítandó pontban metszi, tehát minden ilyen egyenes a felület P pontjában felületi érintő. Eredményeinket összefoglalva mondhatjuk, hogy *a felület egy pontjában megszerkesztett két érintő összekötő síkja a felületet oly görbében metszi, melyen a felvett felületi pont a síkmetszetnek duplapontja, továbbá két érintő összekötő síkjában a felvett felületi pontra illeszkedő minden egyenes a felület érintője. Egy pontban két felületi érintő sugársort határoz meg, melynek centruma az érintők metszéspontja és síkja a két érintő összekötő síkja, e sík a felvett felületi pontban az érintősík, a felvett pont az érintősík érintési pontja.*

Legyen a felület P pontjában két érintő t_1 és t_2, továbbá tegyük fel, hogy a felület P pontbeli érintői közül legyen egy, t_3, mely nem illeszkedik a t_1, t_2 érintők összekötő síkjára, akkor bebizonyíthatjuk, hogy a felület P pontjára illeszkedő minden egyenes a felület érintője. Ha a felület P pontjára illeszkedő tetszőleges egyenes g, akkor t_3 és g egyenesek összekötő síkja metszi a t_1 és t_2 érintők összekötő síkját a felület P pontjára illeszkedő t egyenesben (94. ábra). A t egyenes, mivel a t_1, t_2 összekötő síkjában a t_1 és t_2 érintők által meghatározott sugársornak egyenese, a felület P pontbeli érintője. De akkor a t_3 és g egyenes összekötő síkjában fekvő t egyenesről most mutattuk ki, míg a t_3 egyenesről feltettük, hogy a felületet P pontban érintik, ebből következik, hogy e síkra és P pontra illeszkedő minden egyenes a felület P pontjában érintő, tehát a g egyenes felületi érintő. *A felület oly pontja, mely pontra illeszkedő minden egyenes felületi érintő, a felület szinguláris pontja,* általában a felület közönséges pontjában a felületi érintők sugársort alkotnak, az érintők egy síkra, a felület érintősíkjára illeszkedő egyenesek, amint azt az infinitesimális geometriában be is bizonyítjuk.



94. ábra.

A felület közönséges P pontjában az érintősík a felületet duplaponttal bíró síkgörbében metszi, a duplapont az érintési pont. A duplapontban a síkmetszetgörbének általában két különböző érintője van, egy ilyen érintőn a síkmetszet és érintő közös pontjaiból a duplapont háromszorosan számítandó pont, vagyis ez az érintő a felületet három szomszédos pontban metszi. Ebből következik, hogy e meghatározott felületi érintőre illeszkedő tetszőleges sík a felületet oly görbében metszi, melynek ez a felületi érintő inflexiós érintője, azért ezt az érintőt *a felület inflexiós érintőjének* nevezzük, sokszor főérintőnek is mondjuk.

Felület és érintősík síkmetszetében a) *az érintési pont lehet tulajdonképpeni duplapont, ekkor a két inflexiós érintő két különböző valós egyenes, az érintési pont a felület hyperbolikus pontja,* b) *az érintési pont lehet csúcspont, ekkor a két inflexiós érintő két összeeső valós egyenes, az érintési pont a felület parabolikus pontja,* c) *az érintési pont lehet izolált pont, ekkor a két inflexiós érintő képzetes, az érintési pont a felület elliptikus pontja.* Ha valamely felületnek különböző típusú pontjai vannak, akkor a parabolikus pontok mértani helye a felületen oly görbe vonal, mely a felület elliptikus pontjait a hyperbolikus pontoktól elválasztja.

Itt megemlítjük, hogy a kúpfelületnek, a hengerfelületnek és a térgörbe kifejthető felületének pontjai parabolikus pontok, egy-egy felületi ponthoz tartozó főérintő a pontra illeszkedő felületi alkotó, mely a felület és érintősík síkmetszetében mindig kétszer számítandó egyenes. A kúpfelület csúcspontja, a hengerfelület végtelenben fekvő pontja és a térgörbe kifejthető felületének a visszatérő görbéjére illeszkedő pontjai nem parabolikus pontok, e pontok mind felületi szinguláris pontok.

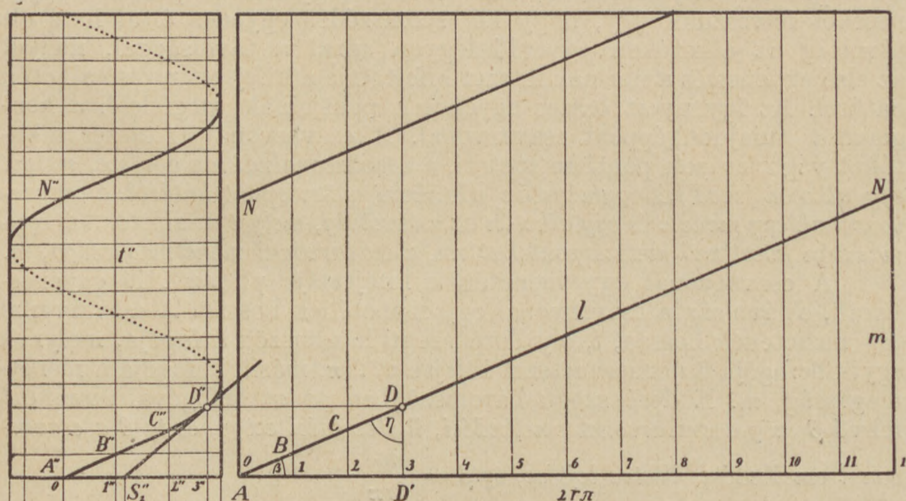
59. §. Felület kontúrgörbéje és önárnyékhatárgörbéje. *Adott görbe felület, adott vetítési középpont és képsík mellett a felület kontúrgörbéjén, körrajzgörbéjén, értjük a felület ama pontjainak összességét, mely felületi pontokhoz tartozó érintősíkok a vetítési középpontra illeszkednek.* Ezek az érintősíkok kúpot burkolnak, melynek csúcspontja a vetítési középpont és vezérgörbéje a kontúrgörbe. A kúp alkotói vetítősugarak, melyek a felületnek egyúttal érintői. E szerint a kontúrgörbe az érintő vetítősugarak érintési pontjainak mértani helye. A nyert kúpról még azt is mondjuk, hogy a felület körülírt kúpja a vetítési középpontból és a kontúrgörbe a körülírt kúp érintési görbéje. A körülírt kúp képsíkon lévő nyomgörbéje, vagyis *a kontúrgörbe képe a felület képkontúrja, képkörrajza.*

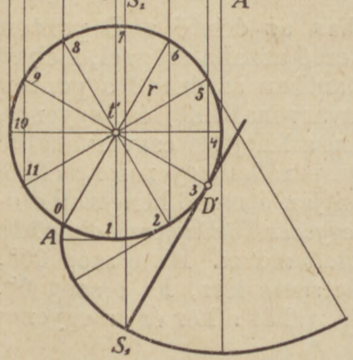
Görbe felület önárnyékhatárgörbéjén értettük a felület ama pontjainak összességét, mely pontokhoz tartozó egy-egy felületi érintő fénysugár. E fénysugarak összességükben kúpfelületet alkotnak, melynek csúcspontja a pontszerű fényforrás. A kontúrgörbe definiciójára való hivatkozással mondhatjuk azt is, hogy *a felület önárnyékhatárgörbéje ama felületi érintősíkok érintési pontjainak mértani helye, mely érintősíkok a fényforrásra illeszkedő síkok.* E szerint az önárnyékhatárgörbe végesben lévő fényforrás mellett szintén a felület egy körülírt kúpjának érintési görbéje, de a jelen esetben a körülírt kúp csúcspontja a végesben lévő fényforrás. Míg adott parallel megvilágítás mellett az önárnyékhatárgörbe a felület egy körülírt hengerének érintési görbéje, a henger alkotói a jelen esetben az adott fénysugárral parallel egyenesek.

Felület kontúrgörbéje és önárnyékhatárgörbéje általában nem síkgörbék, hanem térgörbék. E szerint e görbék képeiben felléphetnek inflexiós helyek és csúcspontok. A felület képkörrajzában, illetve a felület vetett árnyékának árnyékhatárában csúcspont akkor keletkezik, ha a körülírt kúp érintési görbéjének van oly pontja, melyhez tartozó kúpalkotó egyúttal az érintési görbének érintője. A képkörrajznak, illetve a vetett árnyék árnyékhatárának e lényeges pontjait mindig meg kell szerkeszteni, de már itt megjegyezzük, hogy e pontokat csak megközelítőleg állapítjuk meg, mert körzővel és vonalzóval nem szerkeszthetők meg.

A csavarvonal.

60. §. A csavarvonal származtatása és szerkesztése. Kúp-, illetve hengerfelület kifejtésénél láttuk, hogy a felület minden pontjának a kifejtésében egy és csakis egy pont felel meg, vonalnak pedig meghatározott vonal. Megfordítva, ha a kifejtésben felveszünk valamely görbe vonalat és előzetesen megállapodunk abban, hogy a





95. ábra.

kifejtés első alkotója, mely alkotónak kifejtettje, továbbá abban, hogy a palást kifejtésében az eredeti kúp-, ill. hengerfelület mely oldalát mutatja, végül hengerfelületnél még abban is, hogy valamely hengeralkotón fekvő pont a kifejtésben hol van, akkor a görbe vonalnak az eredeti kúp-, ill. hengerfelületen egyértelműen meghatározott vonal felel meg. E vonal általában térgörbe lesz. Ily módon különböző térgörbékhez juthatunk, ezek között igen fontos szerepet játszanak azok a térgörbék, melyek azáltal nyerhetők, hogy az egyenes körhenger palástjának kifejtésében egyenest választunk.

Legyen adva az r sugarú egyenes körhenger tengelye, t, az első képsíkra merőleges helyzetben (95. ábra). Vegyük fel a hengerfelület kifejtését oly módon, hogy az első képsíkban fekvő vezérkör kifejtése a 0, 1 ,2, 3, 4,... számokkal ellátott egyenes, melyre a vezérkör kerületének 12-edrészét egymásután tizenkétszer felraktuk, hogy a kifejtett egyes hengeralkotók helyét megállapíthassuk. A henger kifejtésében az A pontra illeszkedően egyenest rajzolva, ahol A a henger 0 alkotójának első nyompontja a kifejtésben, az egyenes a kifejtésben feltüntetett alkotókat rendre a B, C, D,... pontokban metszi, az utolsó alkotóval való metszéspont legyen N. Az egyenes egyes pontjait a hengerre való ráfejtésében úgy szerkesztjük meg, hogy megállapítjuk azt az alkotót a hengerfelületen, melyen a pont van és erre az alkotóra felmérjük az alkotó ama darabját, melyet az alkotón a normálmetszet és a pont meghatároz ; a felmérést a második projekcióban közvetlenül végezhetjük, mert felvételünkben az alkotók a második képsíkkal parallel egyenesek. A nyert pontok térgörbének pontjai, a térgörbe a csavarvonal. A csavarvonal összes pontjait akkor nyerjük, ha a palást kifejtésében a már felvett egyenessel parallel egyeneseket felveszünk úgy, hogy két szomszédos egyenes által határolt távolság az alkotókon egyenlő legyen azzal a távolsággal, melyet az első egyenes és a normálmetszet kifejtettje a kifejtett utolsó alkotón határol. Az így nyert összes egyenesek pontjainak megfelelői a hengeren a tulajdonképpeni csavarvonal. A csavarvonal az összes alkotókat végtelen sok pontban metszi, a *csavarvonalnak az a része, melyet egy alkotón fekvő két egymásután következő metszéspont határol, a csavarvonalnak egy menete és egy alkotón az a távolság, melyet az alkotón két egymásután következő metszéspont határol, a csavarvonal menetmagassága, m.*

A csavarvonal egy menetének kifejtettje pl. az AN egyenesdarab, e távolság a csavarvonal egy menetének hossza. A csavarvonal egy menetének hossza, l, oly derékszögű háromszög átfogója, melynek egyik befogója a normálmetszet kifejtése, $2r\pi$, másik befogója a menetmagasság, m. E derékszögű háromszögben az m befogóval szemközt fekvő *β szög a csavarvonal emelkedési, illetve esési szöge, és tg β a csavarvonal emelkedése, illetve lejtése,* $\operatorname{tg} \beta = \frac{m}{2r\pi}$.

A csavarvonal tetszőleges D pontjában az érintő a D ponton átmenő alkotóval η szöget alkot, e szög egyenlő azzal a szöggel, melyet a csavarvonal kifejtésében a kifejtett D pontban az érintő a ponton átmenő kifejtett alkotóval bezár. De a csavarvonal kifejtése egyenes, s így a kifejtésben az érintő minden pontban a kifejtett csavarvonallal azonos egyenes. A kifejtett hengeralkotók parallel egyenesek, ebből következik, hogy a csavarvonal minden pontján átmenő hengeralkotóval η szöget alkot. *Tehát a csavarvonal az egyenes körhengeren oly görbe vonal, mely minden alkotót ugyanazon szög alatt metszi.* Ha e szög 90°, akkor a csavarvonalból a henger normálmetszete lesz, ha e szög 0°, akkor a csavarvonal a henger egyik alkotója, tehát a kör és az egyenes a csavarvonalnak szélső esetei.

Mivel a csavarvonal az alkotókat η szög alatt metszi, ami egyenlő értékű azzal a kijelentéssel, hogy a csavarvonal minden pontjában az érintő az érintési ponton átmenő alkotóval η szöget alkot, ez lehetővé teszi az érintő szerkesztését. A csavarvonal érintője a hengerfelület érintője, tehát illeszkedik arra a hengerfelületi érintősíkra, melynek érintési alkotója a csavarvonal választott pontján átmenő alkotó és ezzel alkot az érintő η szöget. Így, ha a csavarvonal D ($D'D''$) pontjában akarjuk megszerkeszteni az érintőt, meghatározzuk a hengerfelület ama érintősíkját, melynek érintési alkotója a D pontra illeszkedő hengerfelületi alkotó és ebben az érintősíkban az érintési alkotó mellé D csúcsponttal felmérjük a csavarvonal kifejtésével adott η szöget, e szög megállapított másik szára az érintő. Az η szög lemásolására felvesszük a DS_1D' derékszögű háromszöget, ahol S_1 a szerkesztendő érintő első nyompontja. E háromszög egybevágó a kifejtésben lévő DAD' háromszöggel, mert a két háromszög a DD' befogóban és a mellette fekvő η szögben egyezik. A DS_1D' háromszög $D'S_1$ oldala az érintősík első nyomvonalán valódi nagyságban látszik és egyenlő a kifejtésben lévő $D\,A$ távolsággal. E szerint, ha az első képsíkban a henger vezérgörbéjének D pontjában az érintőre felmérjük a D' ponttól számítva a $D\,A$ távolságot, akkor e távolság végpontja a csavarvonal D pontbeli érintőjének első nyompontja, S_1, továbbá D és S_1 pontok összekötő egyenese a D pontban az érintő.

Ha a csavarvonal minden pontjában megszerkesztjük az érintőt, akkor az érintők összességükben adják a csavarvonal kifejthető felületét. A kifejthető felület első nyomgörbéje a csavarvonalérintők első nyompontjainak mértani helye. E mértani hely egy pontja az S_1, e pontot úgy nyertük, hogy a vezérkörhöz a *3* pontban rajzolt érintőre felmértük a kifejtés szerint a $D'A$ távolságot, ahol $D'A$ a normálmetszetkör kerületének $\frac{3}{12}$-ed része. E szerint a kifejthető csavarfelület egyes alkotóinak nyompontjait úgy nyerjük, hogy az első képsíkban a vezérkör 12 egyenlő részre való osztása mellett az egyes osztópontokhoz tartozó érintőkre rendre a vezérkör kerületének egy-, két-, három-,. . . tizenkettedrészét felmérjük a mindenkori érintési ponttól számítva, de akkor a nyomgörbének így szerkesztett pontjai a vezérkör evolvensének pontjai.

Vonatkoztassuk a kifejtett csavarvonalat oly derékszögű koordinátarendszerre, melynek kezdőpontja A és a normálmetszet kifejtése az abszcisszák tengelye, akkor a kifejtésben a csavarvonal pontjaihoz tartozó ordináták és abszcisszák aránya állandó. Mivel a kifejtésben a csavarvonal egy-egy pontjának ordinátája a csavarvonal ugyanazon pontjának második rendezőjével egyenlő, abszcisszája pedig egyenlő a vezérkör ama ívdarabjával, melynek kezdőpontja A és végpontja a csavarvonal pontjának első képe, mondhatjuk, hogy az egyenes körhengeren a csavarvonal egy mozgó pont pályagörbéje, melynél a mozgás két komponens mozgásból tevődik össze, az egyik komponens tengelyirányú transzláció, a másik tengelykörüli rotáció, továbbá a transzláció és rotáció mértékének aránya állandó. Alakzatnak oly mozgása, melynél az alakzat minden pontja adott egyenes irányában haladó mozgást és ugyanakkor ugyanazon adott egyenes körül forgó mozgást végez, de úgy, hogy az eltolás és forgatás mértékének aránya állandó, csavarmozgás. Az adott egyenes a csavarmozgásnak és az alakzat minden pontja által leírt csavarvonalnak tengelye, az eltolás és forgatás mértékének aránya a csavarmozgás parametere, $p=\frac{z}{\varphi}$, ahol z az eltolás, φ a forgatás mértéke. Míg a mozgó pont a csavarvonal egy menetét befutja, teljes körforgást végez a tengely körül és az eltolás mértéke ugyanakkor a menetmagasság, vagyis a *parameter* $p=\frac{m}{2\pi}$ alakot ölt.

A csavarvonal kifejthető felületét az érintősík egész alkotó mentén érinti, ha tehát a kifejthető felület ama érintősíkját akarjuk megszerkeszteni, mely a felületet a D ponton átmenő alkotó mentén érinti, akkor az alkotó tetszőleges pontjában két felületi érintőt kell megszerkeszteni. Két felületi érintő legkönnyebben állapítható meg az alkotó első nyompontjában, az S_1 pontban; az S_1 pontban az egyik felületi érintő maga a felületi alkotó, a másik érintő a kifejthető felület első nyomgörbéjének, a körevolvensnek S_1 pontbeli érintője, ez, mint tudjuk, merőleges az S_1 pontban a $D\,S_1$ egyenesre. Az alkotó és evolvensérintő összekötő síkja érinti a csavarvonal kifejthető felületét a D pontra illeszkedő alkotóban; a szerkesztésből egyúttal kitűnik, hogy a kifejthető felület érintősíkjának egy esésvonala az érintési alkotó. Mint tudjuk, a kifejthető felület érintősíkja a felület visszatérő görbéjének, a jelen esetben az eredeti csavarvonalnak simulósíkja, s így mondhatjuk, hogy a nyert érintősík a csavarvonal simulósíkja, a simuló pont D.

Hengerével és menetmagasságával adott csavarvonal még mindig kétféle lehet, még pedig jobbra vagy balra csavarodó csavarvonal. Jobbra csavarodónak mondjuk akkor, ha a tengely hosszirányában a tengelyben elhelyezett szemlélő jobbra fordul, miközben a csavarvonalat lefelé befutó pontot állandóan szemmel követi, ellenkező esetben a csavarvonal balra csavarodó csavarvonal. A gyakorlatban előforduló csavarvonalak majdnem mindig jobbra csavarodók.

Vegyünk fel az egyenes körhengerfelületen két azonos csavarvonalat, melyek közül az egyik fix, míg a másik mozgatható merev csavarvonal a felületen. Ha a mozgó csavarvonal egy pontja a fix csavarvonalat befutja, akkor a mozgó csavarvonal minden pontja a fix csavarvonalat futja be, mert minden pontra nézve a tengelymenti transzláció és tengelykörüli rotáció aránya állandó. Ez más szóval azt mondja, hogy *a csavarvonal önmagában eltolható.* A térben csak három olyan görbe vonal van, melyek önmagukban eltolhatók, az egyenes, a kör és a csavarvonal.

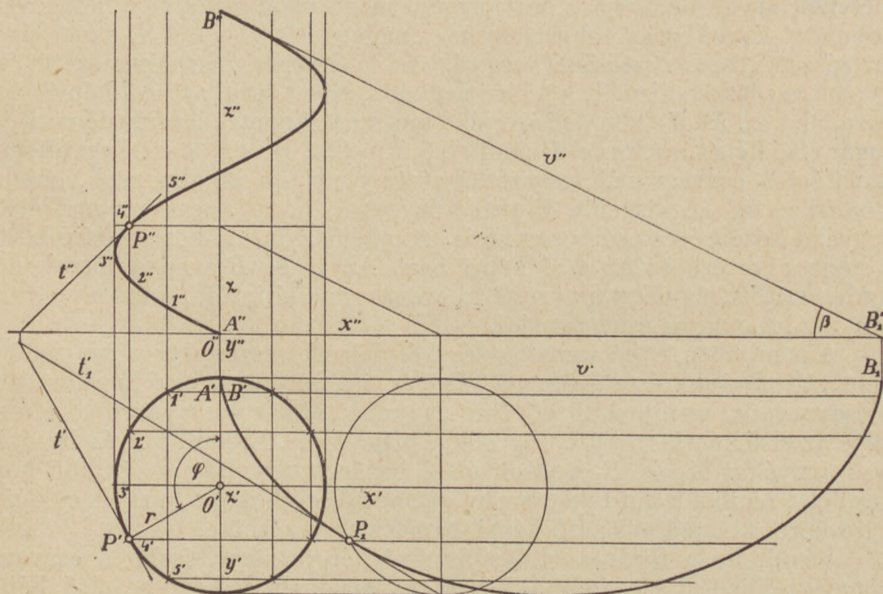
A csavarvonal kifejthető felülete a csavarvonal egy érintőjének csavarmozgásával is származtatható, ahol a csavarmozgás tengelye és parametere az eredeti csavarvonal tengelyével és parameterével azonos. Ebből következik, hogy a csavarvonal kifejthető felületének a csavarvonal tengelyével koaxiális hengerrel való metszésgörbéje ismét csavarvonal, melynek parametere és menetmagassága az eredeti csavarvonal parameterével és menetmagasságával egyenlő, de emelkedése annál kisebb, minél nagyobb a metsző henger alapkörének sugara.

61. §. A csavarvonal képgörbéje. A csavarvonal származtatása alapján a térgörbe egyenletrendszerét közvetlenül írhatjuk fel, ha oly térbeli derékszögű koordinátarendszerre vonatkoztatjuk, melynek z tengelye a csavarvonal tengelye, a tengely első nyompontja a koordinátarendszer kezdőpontja és az x tengely a képsíkrendszer tengelyével parallel. Ha a csavarvonal kezdőpontja a 96. ábra szerint A (A', A'') pont és egy tetszőlegesen megszerkesztett pontja P (P', P''), akkor e pont koordinátái rendre

$$x = r \sin \varphi,$$
$$y = r \cos \varphi,$$
$$z = p\, \varphi,$$

ahol φ jelenti azt a szöget, mellyel az A pontot a tengely körül elforgattuk.

A fenti egyenletrendszer két első egyenletéből álló egyenletrendszer a csavarvonal első képének egyenletrendszere; míg az első és harmadik egyenletből álló egyenletrendszer a csavarvonal második



96. ábra.

képének egyenletrendszere. A csavarvonal második képének egyenletrendszere,

$$x = r \sin \varphi, \; z = p\varphi,$$

a φ szög kiküszöbölésével így is írható, $x = r \sin \dfrac{z}{p}$, vagyis a csavarvonal második képe a feltüntetett helyzetben általános sinusvonal; míg oldalrajza ugyanolyan görbe vonal, mint felrajza, egyenlete $y = \cos \dfrac{z}{p}$. Felrajz és oldalrajz között csak fáziskülönbség van, a fáziskülönbség $\dfrac{\pi}{2}$.

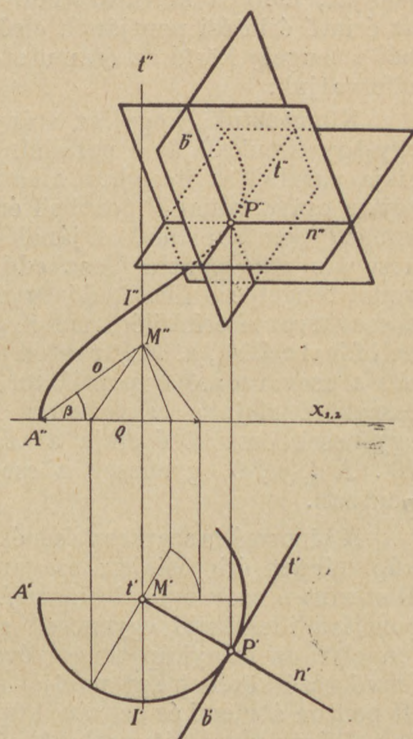
Mielőtt feltételezett tetszőleges parallel projekció mellett a csavarvonal képgörbéjének minőségét megállapítanók, előállítjuk a csavarvonal parallel képét egy a csavarvonal tengelyére merőleges képsíkon, az első képsíkon. A $v(v', v'')$ vetítősugár irányát úgy választottuk, hogy első képsíkszöge a csavarvonal emelkedési szögével legyen egyenlő és különben a második képsíkkal parallel. Amikor a csavarvonal $\boldsymbol{v}$ irányú képét szerkesztjük az első képsíkon, mondhatjuk azt is, hogy a csavarvonal első árnyékát szerkesztjük meg a v (v', v'') irányú parallel világítás mellett. Legyen a csavarvonalnak kezdőpontja a csavarvonalnak az első képsíkra illeszkedő $A(A', A'')$ pontja, egy menetének végpontja B (B',B''), továbbá a csavarvonal menetének tizenkét egyenlő részre való osztása mellett a csavarvonalnak negyedik pontja P (P', P''). A csavarvonal A kezdőpontjának első árnyéka önmaga, a B pont első árnyéka, B_1. A B_1 pontnak távolsága az A ponttól a henger vezérkörének kerületével egyenlő, mert e távolság oly derékszögű háromszög egyik befogója, melynek másik befogója a csavarvonal menetmagassága és e befogóval szemközt fekvő szög a csavarvonal emelkedési szöge. A P pont első árnyékának szerkesztésénél vegyük fel a henger normálmetszetét a P pontra illeszkedően. E kör első árnyéka, mivel síkja az első képsíkkal parallel, kör. Ahol e kör első árnyéka metszi a P pontra illeszkedő vetítősugár első képét, az lesz a P pont első árnyéka. Ha ezt a szerkesztésbeli utasítást a csavarvonal megszerkesztett pontjaira alkalmazzuk, akkor a szerkesztés közvetlenül tanúskodik arról, hogy a csavarvonal első árnyéka közönséges csúcsos cyklois. A cyklois gördülő köre és leíró köre a henger vezérköre az első képsíkban. Az A és B pontra illeszkedő ferde vetítősugár vagy fénysugár a csavarvonal érintője, ezért e pontok árnyékai a cyklois csúcspontjai.

Amennyiben a csavarvonal és két képsík viszonylagos helyzetén nem változtatunk és a ferde vetítősugár, ill. fénysugár első képsíkszöge a csavarvonal emelkedési szögénél nagyobb, akkor a csavarvonal ferde képe az első képsíkon közönséges hurkolt cyklois. Ekkor az A és B pont első árnyékai A_1 és B_1 pontok által határolt távolság a gördülő kör kerülete, amiből a gördülő kör sugara megállapítható, a hurkolt cyklois leíró köre a hengernek első képsíkban fekvő vezérköre.

Végül, ha a ferde vetítősugár első képsíkszöge kisebb a csavarvonal emelkedési szögénél, akkor a csavarvonalnak képe az első képsíkon közönséges nyujtott cyklois. E cykloisnál a leíró kör ugyancsak a hengernek az első képsíkban fekvő vezérköre, míg a gördülőkör sugara a gördülőkör kerületével egyenlő A_1B_1 távolságból állapítható meg.

Miután megállapítottuk, hogy a csavarvonal ferde parallel képe tengelyére merőleges képsíkon közönséges cyklois, egyúttal kimutattuk azt is, hogy a csavarvonal minden projiciáló hengerének van oly vezérgörbéje, amely vezérgörbe közönséges cyklois, a cyklois síkja mindig merőleges a csavarvonal tengelyére. Mivel a csavarvonal tetszőleges síkon lévő parallel képe a projiciáló henger síkmetszete és a projiciáló henger két síkmetszete affin vonatkozású síkgörbék, mondhatjuk, hogy a csavarvonal ortogonális képe tetszőleges képsíkon vagy ferde parallel képe tetszőleges képsíkon közönséges cykloissal affin vonatkozású síkgörbe. Tudva azt, hogy az affin vonatkozás síkgörbe csúcspontját csúcspontba, duplapontját duplapontba, inflexiós érintőjét inflexiós érintőbe viszi át, mondhatjuk, hogy a csavarvonal parallel képének akkor vannak csúcspontjai, ha a csavarvonal tengelyének és a vetítősugárnak szöge egyenlő a csavarvonal emelkedési szögének pótszögével. A csavarvonal parallel képének akkor vannak duplapontjai, ha tengely és vetítősugár szöge kisebb az emelkedési szög pótszögénél; végül a csavarvonal parallel képének akkor vannak inflexiós érintői, ha tengely és vetítősugár szöge nagyobb az emelkedési szög pótszögénél. Ebből következik, hogy a csavarvonal orthogonális projekciójának a tengelylyel parallel képsíkon mindig vannak inflexiós helyei, vagyis az általánosított sinusvonalnak mindig vannak inflexiós helyei, továbbá az általánosított sinusvonal közönséges nyujtott cyklois affin megfelelője.

62. §. A csavarvonal érintőjének és simulósíkjának szerkesztése az iránykúp felhasználásával. A csavarvonal minden érintője a csavarvonal tengelyével állandó η szöget alkot, ahol η a csavarvonal β emelkedési szögének pótszöge. De akkor a tér tetszőleges pontjára illeszkedő és a csavarvonal érintőivel parallel egyenesek által meghatározott iránykúp forgási kúp, melynek csúcspontja a tér tetszőlegesen felvett pontja, tengelye a csavarvonal tengelyével parallel egyenes és félnyílása az η szög. Legyen megint orthogonális parallel projekcióban két képsíkon a csavarvonal tengelye az első képsíkra merőleges, sugara és menetmagassága adott távolságok (97. ábra). Tegyük fel, hogy az iránykúp vezérköre a csavarvonal hengerének vezérköre az első képsíkban, akkor az iránykúp csúcspontja a csavarvonal tengelyén van. Az iránykúp M csúcspontjának második képét úgy kellene megszerkeszteni, hogy a vezérkör második képének A'' pontján át az $x_{1,2}$ tengellyel β szög alatt hajló egyenest rajzolunk, ez egyenesnek a tengely második képére illeszkedő pontja a kúp csúcspontjának második képe. De rövid úton igazolható, hogy ekkor az iránykúp magassága a csavarvonal parameterével egyenlő, t. i. ha az iránykúp magassága h, akkor



97. ábra.

$$h = r \operatorname{tg} \beta = r \frac{m}{2r\pi} = \frac{m}{2\pi} = p.$$

Itt megjegyezzük, hogy ezentúl a csavarvonal kifejthető felületének iránykúpján kizárólag azt a kúpot értjük, melynek vezérköre a csavarvonal hengerének vezérkörével azonos. Tehát az iránykúp csúcspontjának második képét úgy szerkesztjük meg, hogy a henger tengelynek második képére az $x_{1,2}$ tengelytől számítva felmérjük a csavarvonal paraméterét.

A csavarvonal minden érintője a megszerkesztett iránykúp egy-egy alkotójával parallel. Az iránykúp felhasználásával a csavarvonal minden pontjában igen előnyösen szerkesztjük meg az érintőt. Így ha a csavarvonal P (P', P'') pontjában az érintő első képe a vezérkör érintője a P' pontban, t', a vezérkörnek a t' érintővel parallel egyik körsugár az iránykúp ama alkotójának első képe, mely a szerkesztendő érintővel parallel. Ez alkotó második képével parallel a P ponthoz tartozó érintő második képe. Ezzel a csavarvonal érintőinek szerkesztésére igen kényelmes eljárást nyertünk, melyre nézve csak azt kell jól megjegyezni, hogy az iránykúp ama alkotójának első nyompontját, mely a szerkesztendő érintővel parallel, úgy kapjuk, hogy az érintő érintési pontjának első képét jobbra csavarodó csavarvonalnál a tengely körül az óramutató járásával egyező értelemben 90°-kal elforgatjuk.

Kimutattuk, hogy az iránykúp egy-egy érintősíkja a térgörbe egy-egy simulósíkjával parallel. Így a csavarvonal P pontbeli simulósíkja parallel az iránykúp ama érintősíkjával, melynek érintési alkotója a csavarvonal P pontbeli érintőjével parallel. E szerint a csavarvonal P pontbeli simulósíkjának egyik egyenese a t érintő, másik egyenese a simuló pontra illeszkedő első fővonal, mely mindig a csavarvonal tengelyére illeszkedő egyenes. Mivel e fővonal a simulósíkban a csavarvonal érintőjére merőleges, a fővonal a csavarvonal P pontbeli főnormálisa, n. A P ponton átmenő és simulósíkra merőleges egyenes a csavarvonal P pontjában a binormális, b. A b és n egyenesek összekötő síkja a csavarvonal P pontjában a normálsík. A b és t egyenesek összekötő síkja a csavarvonal P pontjában a rektifikálósík. A t, n, b egyenesek a csavarvonal kísérő triederének élei a P pontban.

A binormális szerkesztésénél vegyük tekintetbe azt, hogy az iránykúp minden érintősíkja a csavarvonal egy-egy simulósíkjával parallel. E szerint a csavarvonal binormálisaival parallel és az iránykúp csúcspontjára illeszkedő egyenesek szintén forgási kúp alkotói, melynek tengelye az iránykúp tengelyével azonos és melynek első képsíkban fekvő vezérkörének egy pontját a legegyszerűbben úgy nyerjük, hogy az M ponton átmenő és az iránykúp ama érintősíkjára merőleges egyenesnek első nyompontját szerkesztjük meg, amely az iránykúpot a második kontúralkotó mentén érinti. Az ilyen módon meghatározott kúp alkotói a csavarvonal binormálisaival parallelek s így a P pontbeli binormális szerkesztésénél előnyösen felhasználható.

A csavarvonal P pontbeli simulósíkjának szerkesztéséből következik, hogy minden simulósíknak első képsíkszöge a csavarvonal emelkedési szöge és egy-egy simulósík mindig merőleges a csavarvonal hengerének ama érintősíkjára, melynek érintési alkotója a simulópontra illeszkedő alkotó. A csavarvonal minden főnormálisa a csavarvonal tengelyét merőlegesen metszi. A csavarvonal összes rektifikálósíkjai kifejthető felületet burkolnak, e kifejthető felület a csavarvonal hengere.

A csavarvonal második képe a tengely második képét oly pontokban metszi, mely pontokhoz tartozó simulósíkok második vetítősíkok. Legyen egy ilyen pont I, (I', I''). Mivel az I pont simulósíkja második vetítősík, vagyis oly sík, mely a második képsíkhoz rendelt vetítési középpontra illeszkedik, az I pont a csavarvonal második képének inflexiós helye és az inflexiós érintő a vetítő simulósík második nyomvonala, vagyis oly egyenes, melynek a tengely második képével alkotott szöge $90°-\beta$.

63. §. A csavarvonal görbületi köre. A csavarvonal görbületi köre a csavarvonal három szomszédos pontján átmenő kör, melynek síkja a három szomszédos ponton átmenő sík, tehát a csavarvonal kérdéses pontjához tartozó simulósík (97. ábra). Mindenekelőtt megszerkesztjük a csavarvonal I pontjában a görbületi kört. E pontban a simulósík második vetítősík. A vetítősík a csavarvonal hengerét oly ellipszisben metszi, melynek félnagytengelye, a, az I pontbeli csavarvonal érintővel parallel és nagyságra nézve $a=\frac{r}{\cos\beta}$, félkistengelyének végpontja I és nagyságra nézve egyenlő a csavarvonal hengerének sugarával, r. A simulósík által kimetszett ellipszis I pontjában az ellipszis görbületi köre azonos a csavarvonal I pontjához tartozó görbületi körrel. Mert legyen I, K, L a csavarvonal három szomszédos pontja, akkor e pontok egyrészt a simulósíkra illeszkedő és a csavarvonal hengerére illeszkedő pontok, vagyis az I, K, L pontok a simulósík és henger közös pontjai, tehát annak az ellipszisnek is három szomszédos pontja, melyben a simulósík a hengert metszi. Ebből következik, hogy az ellipszis I pontjában a görbületi kör azonos a c avarvonal I pontbeli görbületi körével. Az I pont az ellipszis kistengelyének végpontja, s így figyelembe véve az ellipszis félnagytengelyének és félkistengelyének hosszát, a görbületi kör sugara

$$\varrho=\frac{r}{\cos^2\beta}.$$

Ha pedig az iránykúp második kontúralkotójának hossza o, mely távolság az ellipszis fél nagytengelyével egyenlő, úgy

$$\varrho=\frac{o^2}{r},$$

vagyis o mértani középarányos r és ϱ között. E szerint ag örbületi kör sugarát a következő módon szerkesztjük meg: Az iránykúp csúcspontjának második képén át az egyik második kontúralkotó második képére merőleges egyenest állítunk, e merőleges az $x_{1,2}$ tengelyt oly pontban metszi, melynek a második kontúralkotó második képének és az $x_{1,2}$ tengely metszéspontjától való távolsága a görbületi kör sugara.

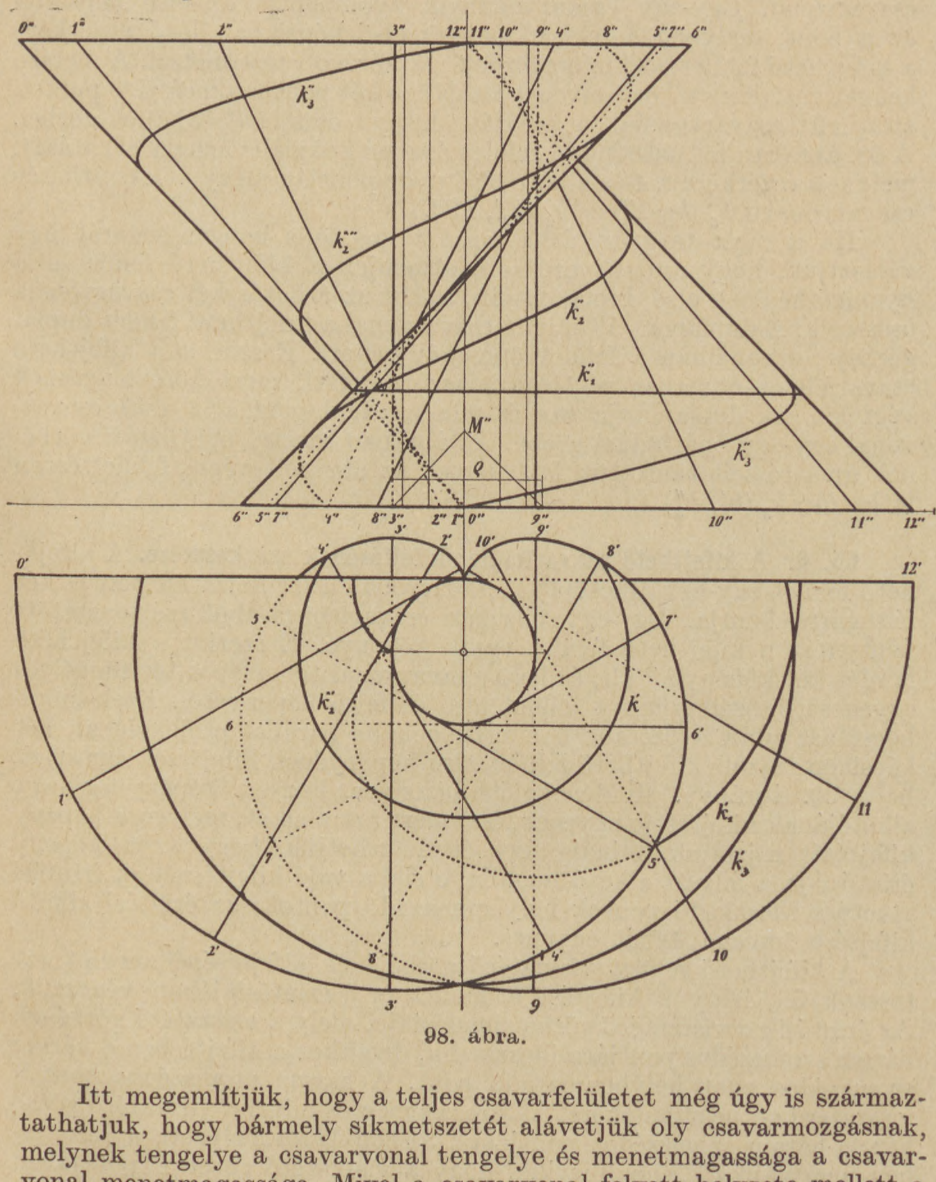
Külön kiemeljük, hogy a csavarvonalnak minden pontjában a görbületi kör sugara egyenlő, mert minden simulósík a csavarvonal hengerét oly ellipszisben metszi, melynek félnagytengelye o és félkistengelye r. Szóval a csavarvonal első görbületi mértéke állandó.

64. §. A kifejthető csavarfelület ábrázolása. A csavarfelület ábrázolásánál előzetesen meg kell állapodni abban, hogy a felület mily részének képét kívánjuk szerkeszteni. Így a 98. ábrában orthogonális parallel projekcióban két képsíkon megrajzoltuk a felület ama részét, melyet a csavarvonal egy menetéhez tartozó érintők leírnak, de ezt is még határoltuk a csavarvonal tengelyére merőleges két síkkal, ahol a síkok közül az egyik a csavarvonal menetének kezdőpontján, a másik a menet végpontján megy át. Utóbbi síkok a csavarvonal minden érintőjén véges segmentumot állapítanak meg és e véges segmentumok képeit szerkesztettük meg, ugyanakkor az ábra képiességének fokozására a rajzot kiegészítettük a felület ama nyomgörbéinek képeivel, melyekben a felület a határoló síkokat metszi. A csavarvonal hengere első vetítőhenger, a csavarvonal kezdőpontja ama hengeralkotónak első nyompontja, mely a második képsíktól a legkisebb távolságban van. E szerint az egyik határoló sík az első képsík, míg a másik sík az első képsíkkal parallel. Mint tudjuk, a kifejthető felület nyomgörbéje tengelyére merőleges síkon körevolvens, melynek kezdőpontja a csavarvonal nyompontja.

A felület ábrázolását a nyomgörbék rajzolásával indítjuk meg. Megszerkesztjük a vezérkör 12 egyenlő részre való beosztása mellett a henger vezérkörének evolvensét. A kezdőponttól balra hajló ág egy menete a felület nyomgörbéje az első képsíkon, míg az ellenkező oldalra hajló ág egy menete ama nyomgörbe első képe, melynek síkja az első képsíktól menetmagasságnyi távolságban van. Ha az első evolvens ág szerkesztett pontjait a 0, 1, 2,..., 12 számokkal jelöljük és tekintetbe vesszük, hogy a csavarvonal *o* pontján átmenő érintője a felső határoló síkot e síkra illeszkedő evolvens ág végpontjában metszi és ennek megfelelően a felső evolvens szerkesztett pontjait e ponttól kezdődőleg az ág kezdőpontja felé a 0, 1, 2,..., 12 számokkal jelöljük, akkor az egyenlő számokkal jelölt pontok első képeinek összekötő egyenesei a csavarvonal érintőinek, vagyis a kifejthető felület alkotóinak első képei és az egyenlő számokkal jelölt pontok második képeinek összekötő egyenesei a felület alkotóinak második képei. E szerint a felület kijelölt részét ábrázolhattuk a csavarvonal tényleges megszerkesztése nélkül.

Minden kifejthető felület kontúrgörbéje egyenesekből áll, mivel a felület egy-egy érintősíkja a felületet alkotó mentén érinti, tehát a kifejthető csavarfelület második képkörrajza egyenesekből áll, ezek az egyenesek a felület ama alkotóinak képei, mely alkotókhoz tartozó érintősík második vetítősík. A csavarfelület érintő vetítősíkja a csavarvonal simulósíkja, ahol a simuló ponthoz tartozó csavarvonal érintő a keresett alkotó. A csavarvonal vetítő simulósíkját úgy szerkesztjük meg, hogy megállapítjuk az iránykúp ama alkotóit, melyekben az érintősík második vetítősík. A csavarvonal felvett helyzete mellett ezek az alkotók az iránykúpnak második képsíkkal parallel alkotói és ez alkotókkal parallel felületi alkotók a csavarvonalon lévő érintési pontjainak első képeit úgy nyerjük, hogy az iránykúp kontúralkotójának első nyompontját az óramutató járásával ellenkező értelemben 90°-kal elforgatjuk, mivel a csavarvonal jobbra csavarodó csavarvonal. E szerint a csavarvonal ama pontjaihoz tartozó érintők a kifejthető felület második kontúralkotói, mely pontok második képei a csavarvonal tengelyének második képére illeszkedő pontok, vagyis ama pontok, melyeknek képéről már megállapítottuk, hogy ezek a csavarvonal második képének inflexiós helyei.

A kifejthető csavarfelület első képében a képkörrajzalkotók képzetesek, mert az iránykúpnak az első képsíkra merőleges érintősíkjai képzetesek. Ekkor a felület első képkörrajza a felület szinguláris pontjainak első képeiből áll, vagyis a jelen esetben a felület első képkörrajza a felület visszatérő görbéjének, az eredetileg felvett csavarvonalnak, első képe.



98. ábra.

Itt megemlítjük, hogy a teljes csavarfelületet még úgy is származtathatjuk, hogy bármely síkmetszetét alávetjük oly csavarmozgásnak, melynek tengelye a csavarvonal tengelye és menetmagassága a csavarvonal menetmagassága. Mivel a csavarvonal felvett helyzete mellett a kifejthető felület első nyomgörbéje körevolvens, a felület e körevolvens csavarmozgásából származtatható. E szerint a csavarvonal nyomgörbéje a csavarvonal 3-as pontjára illeszkedő és első képsíkkal parallel síkon az első képsíkon lévő körevolvenssel kongruens görbe, melynek első képe az első képsíkban lévő evolvenssel szemben a tengely első képe körül 2π-nek $\frac{3}{12}$-részével van elforgatva. E síkmetszet a k_1 (k_1', k_1'') körevolvens.

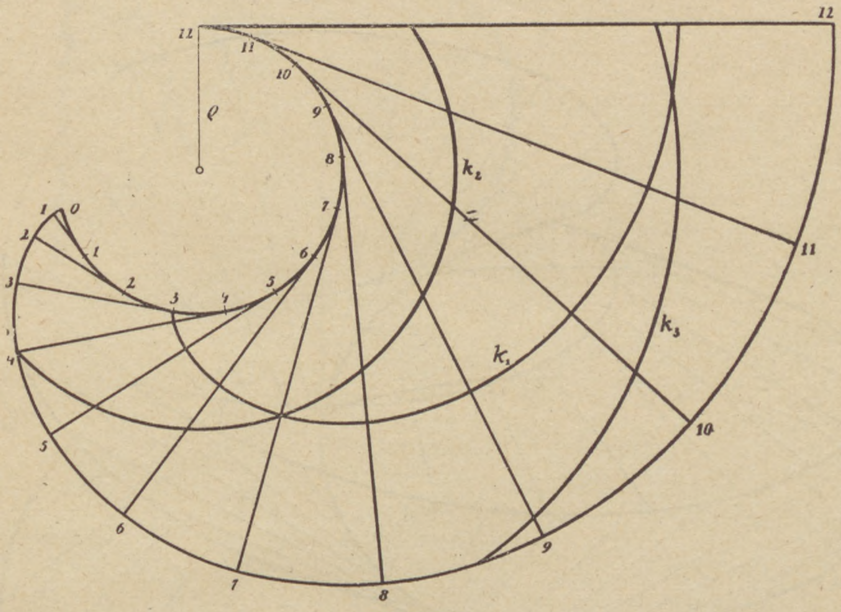
Mivel a csavarfelület az első nyomgörbe csavarmozgásából származtatható, ebből következik, hogy a felület áthatása a csavarvonal tengelyével koaxiális hengerrel csavarvonal, mégpedig általában két csavarvonal. Egy-egy csavarvonalnak nyompontja az első képsíkon az a pont, melyben a metsző henger első képsíkban lévő vezérköre a kifejthető felület első nyomgörbéjét, a körevolvenst metszi. A metsző henger vezérköre a körevolvenst általában két pontban metszi, e pontok által leírt csavarvonalak a koaxiális henger és felület áthatási görbéi. A 98. ábrában feltüntettük a felület és ama koaxiális henger áthatását, melynek vezérköre a 4-es alkotó első nyompontján megy át. Az áthatás csavarvonalai k_2 (k_2', k_2'') és $k_2^{\times}$ $(k_2^{\times\prime}, k_2^{\times\prime\prime})$.

Ha a most tárgyalt áthatásnál a koaxiális henger sugarát úgy választjuk, hogy annak vezérköre átmenjen a kifejthető felület első nyomgörbéjének első duplapontján, akkor az áthatás két csavarvonala összeesik. A duplapont által leírt csavarvonal a kifejthető felület duplagörbéje, e vonalban a felület önmagát metszi. E szerint a kifejthető csavarfelület önmagát végtelen sokszor metszi, mert körevolvensnek végtelen sok duplapontja van és minden duplapont által leírt csavarvonal egy-egy önáthatási görbe. Az ábrában az első önáthatási görbének ama részeit tüntettük fel, melyek az ábrázolt véges felületrészen láthatók, k_3 (k_3', k_3'').

65. §. A kifejthető csavarfelület kifejtésének szerkesztése. A kifejthető felület egy-egy alkotóját a csavarvonalon lévő érintési pontja két félsugárra bontja. Egy-egy félsugár csavarmozgásából származtatott felületrész a kifejthető felület egyik köpenye. E szerint a kifejthető felület két köpenyből áll, és ha a csavarvonal tengelye a tér függélyes egyenese, beszélhetünk a felület alsó és felső köpenyéről. Ezek előrebocsátása után a 98. ábrában orthogonális parallel projekcióban két képsíkon rajzolt kifejthető felület alsó köpenyének kifejtését mutatjuk be a 99. ábrában. Mindenekelőtt bizonyos, hogy a köpeny egy-egy alkotójának kifejtettje egyenes lesz, mert azt a síkot, melyen a köpeny kifejtését rajzoljuk, mindig úgy értelmezhetjük, hogy az a köpeny érintősíkja a felvett alkotó mentén, e síkba való kifejtésnél az érintési alkotóra illeszkedő pontok helybenmaradó pontok, az érintési alkotó kifejtése önmaga, tehát egyenes.

A kifejthető felület visszatérő görbéjének kifejtésénél megint azt tesszük fel, hogy a kifejtést a felület egy érintősíkjában végezzük. Az érintősík a visszatérő görbe simulósíkja, mely a visszatérő görbének három szomszédos pontjára illeszkedik, de akkor a kifejtésben a három szomszédos pont helybenmaradó pont. A három szomszédos pont a visszatérő görbe simulókörét határozza meg és mivel a visszatérő görbe három-három szomszédos pontjának viszonylagos helyzete a kifejtésben nem változik, mondhatjuk, hogy a visszatérő görbe P pontjában az első görbületi mérték mindig egyenlő a kifejtett P pontban a kifejtett visszatérő görbe görbületével. A csavarvonal minden pontjában az első görbületi mérték egyenlő, tehát a kifejtett visszatérő görbe minden pontjában a görbület ugyanaz, vagyis a visszatérő görbe a kifejtésben kör. E kör sugara a térgörbe símulókörének ϱ sugarával egyenlő. A megrajzolt ρ sugarú körre fel kell mérni a visszatérő görbe egy menetének hosszát, melynek valódi nagysága a felület *0* vagy *6*-os vagy *12*-es alkotójának második képhossza. A felmérést közelítőleg oly módon végezzük, hogy a csavarvonal menethosszát egyenlő részekre, mondjuk tizenkét egyenlő részre osztjuk és egy részt a ρ sugarú kör kerületére tizenkétszer egymásután felmérjük, amivel egyúttal a csavarvonal tizenkét egyenlő részre való osztásával az egyes pontok kifejtett pontjait is megszerkesztettük.

A kifejthető felületen felvett két érintkező görbe a kifejtésben ugyancsak érintésben lévő görbébe megy át, mert a felületen fekvő két görbe szöge a kifejtés által nem változik. Ebből következik, hogy



99. ábra.

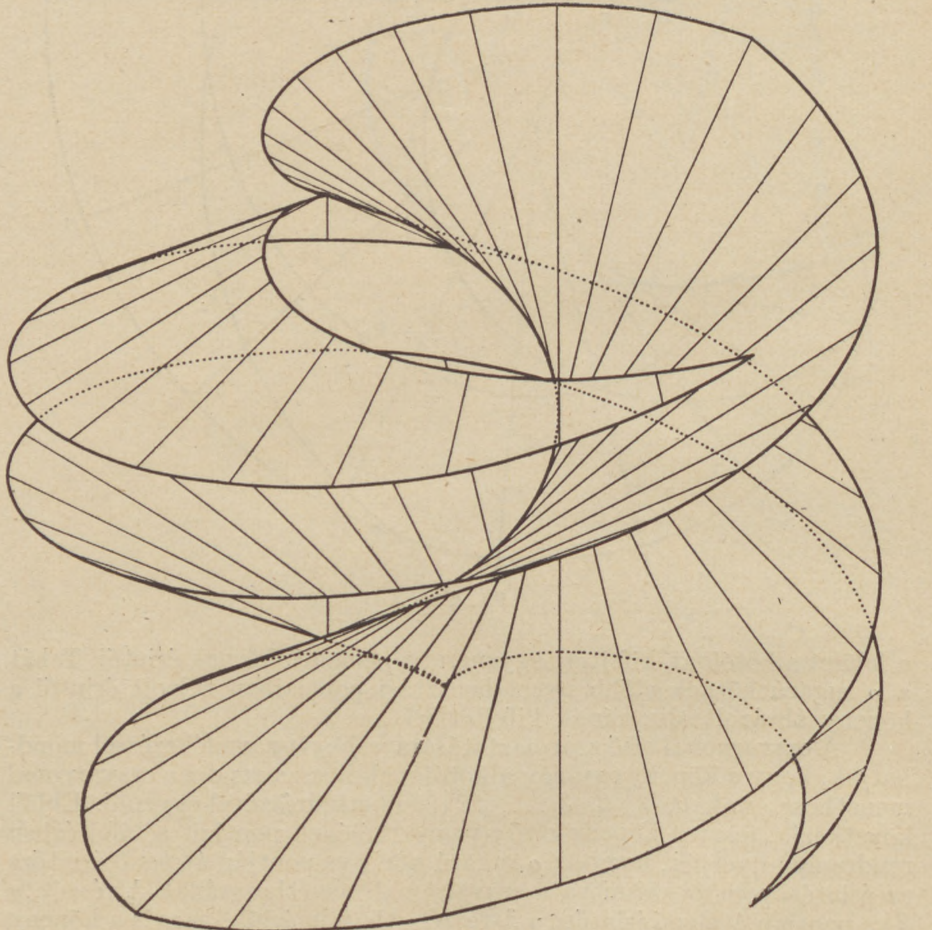
a felület alkotóinak kifejtett egyenesei a ρ sugarú körnek érintői. Tehát a ρ sugarú körnek előbb nyert beosztási pontjaiban rajzolt érintői a köpeny ábrázolt alkotóinak kifejtettjei.

A csavarvonal első származtatására való visszaemlékezéssel mondhatjuk, hogy a köpeny egy-egy alkotójának hossza rendre a csavarvonal menethosszának *0*, *1*, *2*, *3*,..., *12* tizenkettedrészével egyenlő. Ebből következik, hogy a köpeny első nyomgörbéjének pontjait a kifejtésben rendre úgy nyerjük, hogy az ρ sugarú kör *1*-es pontján átmenő érintőre az érintési ponttól számítva a csavarvonal menethosszának $\frac{1}{12}$ részét, a *2*-es pontján átmenő érintőre a $\frac{2}{12}$-részét stb. felmérjük, vagyis a köpeny körevolvens nyomgörbéjének kifejtett görbéje a ρ sugarú kör körevolvense. De akkor a köpenyen fekvő k_1 körevolvensnek kifejtettje szintén ρ sugarú kör evolvense, melynek kezdőpontja a csavarvonal *3*-as pontjának kifejtettje.

A csavarvonal tengelyével koaxiális henger a köpenyt a k_2 csavarvonalban metszi. A csavarvonal a köpenyalkotót oly pontban metszi, melynek távolsága az alkotó és eredeti csavarvonal érintési pontjától állandó, ebből következik, hogy k_2 csavarvonal a kifejtésben a ρ sugarú körrel koncentrikus körbe megy át. E kör egy pontja a kifejtésben a köpeny kifejtett első nyomgörbéjének és a kifejtett *4*-es alkotónak metszéspontja, mert e pont eredetije a k_2 csavarvonalnak pontja.

A kifejtésben még feltüntettük a kifejthető felület első önáthatási görbéjének az alsó köpenyre eső részét is, ez szintén a ρ sugarú körrel koncentrikus kör. E kör egy pontját úgy nyerjük, hogy a köpeny kifejtett nyomgörbéjén megállapítjuk a k_3 csavarvonal első nyompontjának kifejtését.

66. §. A kifejthető csavarfelület axonometrikus ábrázolása. A 100. ábrában megszerkesztettük a z tengellyel koaxiális tengelyű



100. ábra.

felület ama részének orthogonális axonometrikus képét, melyet részben az alaprajz síkja, részben egy és egynegyed menetmagasságban az alaprajz síkjával parallel sík és végül a csavarvonal tengelyével koaxiális R sugarú egyenes körhenger határol. A szerkesztést úgy rendeztük be, hogy a csavarvonal hengerének vezérkörét az axonometrikus képsíkba való forgatással *24* egyenlő részre osztottuk, és e beosztásnak megfelelően a leforgatásban megállapítottuk a felület körvolvens nyomgörbéjének azt a részét, amely az *R* sugarú kör belsejébe jut. Mivel a csavarvonal menetmagassága tetszőleges volt, a menetmagasság $\frac{1}{24}$-részének képhosszát szabadon vehetjük fel. Végül a leforgatásban még megszerkesztettük azt a körevolvenst is, melynek felállítottja alaprajza a felső határoló sík és felület metszetének. Miután a vezérkör és a két körevolvens pontjainak képeit meghatároztuk, a második evolvens pontjait $1\frac{1}{4}$ menetmagasságra emeltük és megrajzoltuk a csavarvonalnak nemcsak ama pontjait, melyek a határoló síkok közé esnek, hanem azokat is, melyekhez tartozó érintők egy része abba a véges térrészbe jut, melynek határoló felületeivel a kifejthető csavarfelületet határoltuk, továbbá megszerkesztettük ama két csavarvonal pontjainak axonometrikus képeit, melyekben a kifejthető felületet az *R* sugarú henger metszi, a felület minden alkotójának három pontját szerkesztettük meg, ami igen jó szolgálatot tesz a felület *58* alkotójának ábrázolásánál. A felület kész képében az alkotók látható és a felületet határoló görbék látható és nem látható részei vannak feltüntetve.

67. §. Feladatok. 1. Megszerkesztendők a két képsíkkal szemben általános helyzetű tengellyel adott csavarvonal vetületében az inflexiós helyek.

2. Adva van a csavarvonal hengerfelülete és azon két pont. Szerkesztessék a két ponton átmenő csavarvonal. (Hány megoldása van a feladatnak?)

3. Adva van a csavarvonal hengere és e hengerfelületre illeszkedő pont második képe. Megszerkesztendő e pontra illeszkedő ama csavarvonal, melynek második képében e pont duplapont.

4. Adva van a csavarvonal tengelye, parametere és egy pontja. Megszerkesztendő a csavarvonal.

5. Adva van a csavarvonal tengelye, parametere és egy símulósíkja. Megszerkesztendő a csavarvonal.

6. Megszerkesztendők adott csavarvonal és adott sík közös pontjai.

7. Adva van a csavarvonal hengere és képkörajzalkotóján egy pont. Megszerkesztendő e pontra illeszkedő ama csavarvonal, melynek képében e pont csúcspont.

8. Adott csavarvonal ama érintői szerkesztendők, melyek adott síkkal parallelek.

9. Szerkesztendők adott csavarvonal ama símulósíkjai, melyek adott pontra illeszkednek.

10. Lehet-e orthogonális parallel projekcióban két képsíkon oly csavarvonalat szerkeszteni, melynek úgy első, mint második vetületében csúcspontok vannak.

11. Megszerkesztendők adott kifejthető csavarfelület önárnyékhatáralkotói parallel világítás mellett.

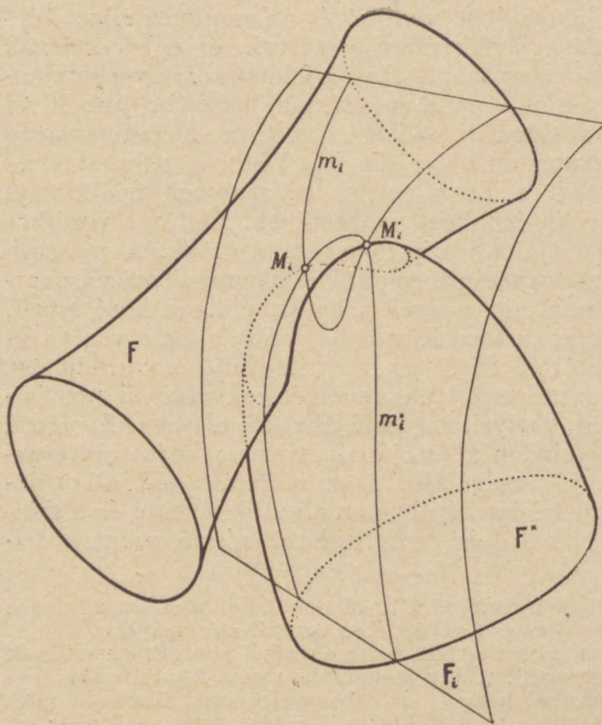
12. Megszerkesztendő adott kifejthető csavarfelület és adott metszősík síkmetszetének

a) egy pontja és abban az érintő,
b) a metszet csúcspontjai,
c) a metszet első duplapontjai,
d) a metszet végtelenben fekvő pontjai és a metszet asymptotái.

13. Szerkesztendő adott hengeren, adott pontán át oly csavarvonal, melynek első görbületi mértéke ismeretes.

Másodrendű kúp- és hengerfelületek áthatása.

68. §. Felületek áthatása. Két felület közös pontjainak összessége általában térgörbére sorozott pontok, a térgörbe a felüle-



101. ábra.

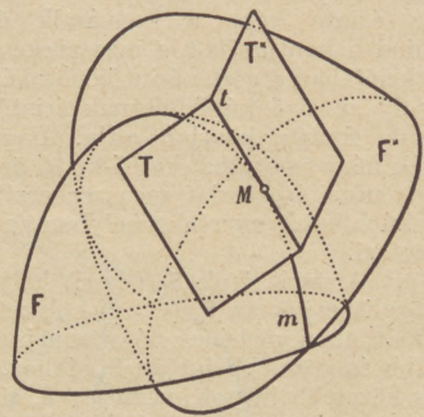
tek áthatási görbéje. Az áthatási görbét pontonként szerkesztjük meg és pedig oly módon, ha az adott felületek **F** és $\mathbf{F}^\times$, hogy az általunk szabadon választott segédfelületek sorából kiválasztunk egy $\mathbf{F}_i$ felületet és e segédfelületnek mindkét adott felülettel való metszésgörbéjét állapítjuk meg; legyen **F** és $\mathbf{F}_i$ metszésgörbéje m_i és $\mathbf{F}^\times$ és $\mathbf{F}_i$ metszésgörbéje $m_i^\times$, ahol m_i és $m_i^\times$ ugyanazon segédfelületen fekvő két térgörbe s így ezek általában véges számú pontban metszik egymást; ha e metszéspontok az $\mathbf{F}_i$ felületen $M_i, M_i', M_i'', \ldots$ akkor e pontok az eredetileg adott felületek áthatási görbéjének pontjai (101. ábra). Az áthatási görbe pontjainak szerkesztési menetét a következő táblázat tünteti fel:

Az adott felületek **F**, $\mathbf{F}^\times$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{FF}_1 & & \mathbf{F}_1\mathbf{F}^\times \\ \vee & & \vee \\ m_1 & & m_1^\times \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & M_1, M_1', M_1'', \ldots & \\ \mathbf{FF}_2 & & \mathbf{F}_2\mathbf{F}^\times \\ \vee & & \vee \\ m_2 & & m_2^\times \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & M_2, M_2', M_2'', \ldots & \\ - & - & - \\ FF_i & & F_1F^\times \\ \vee & & \vee \\ m_i & & m_i^\times \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & M_i, M_i', M_i'', \ldots & \end{array}$$

Az áthatási görbe egyes pontjainak szerkesztését mindig kiegészítjük az egyes pontokban az érintőkkel. Az áthatási görbe egy pontjában az érintő a görbe két szomszédos pontjának összekötő egyenese, de a görbe minden pontja mindkét felületen fekvő pont, tehát a két szomszédos pont összekötő egyenese mindkét felületet egy és ugyanazon pontban érinti, ebből következik, hogy *az áthatás egy pontjában az érintő a ponthoz tartozó két felületi érintősík közös egyenese* (102. ábra).

Mint láttuk, az áthatás szerkesztésének feladatát áthatás újabb meghatározására vezettük vissza, vagyis a feladatot önmagával oldjuk meg. Amikor azonban az adott felület egyikének segédfelülettel való metszésgörbéjét kell meghatározni, a segédfelületet szabadon választhatjuk. A segédfelületet mindig úgy fogjuk választani, hogy az adott felületekkel való metszésgörbék lehetőleg könnyen és pontosan megrajzolható görbék legyenek. Így kúp- és hengerfelületek áthatásának szerkesztésénél segédfelületként oly síkot fogunk választani, amely mindkét felületet alkotókban metszi. Két kúp esetében a csúcspontok összekötő egyenesére illeszkedő minden sík a kúpokat alkotókban metszi s így természetes, hogy segédfelületeknek e síkokat választjuk. Kúp- és hengerfelület áthatásának szerkesztésénél a segédsíkok a kúp csúcspontján átmenő és a hengerfelület alkotóival parallel egyenesre illeszkedő síkok, míg két hengerfelületnél a segédsíkok a hengerek alkotóival parallel síkok.



102. ábra.

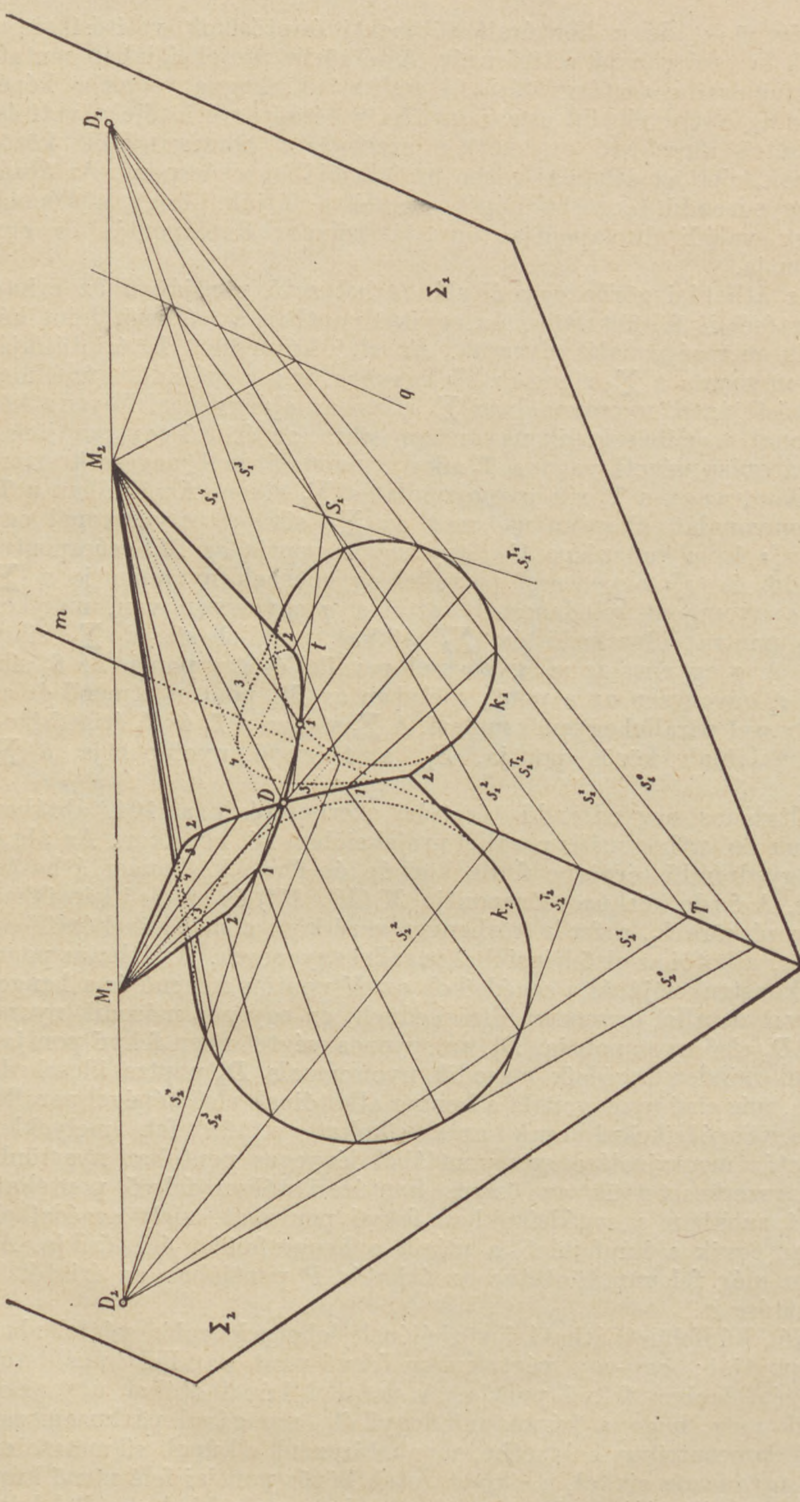
69. §. Két másodrendű kúpfelület áthatása. Két másodrendű kúpfelület áthatási görbéje negyedrendű térgörbe, mert a tér tetszőleges síkja négy pontban metszi, t. i. a tetszőleges sík a kúpfelületek mindegyikét egy-egy kúpszeletben metszi és egy síkra illeszkedő két kúpszeletnek négy közös pontja van, melyek párosával képzetesek is lehetnek, e közös pontok az áthatási görbének a felvett tetszőleges síkra illeszkedő pontjai.

Két másodrendű kúpfelület áthatását egy parallel projekcióban a 103. ábrában oly feltétellel szerkesztettük meg, hogy az első kúp csúcspontja M_1, másodrendű vezérgörbéjének síkja $\sum_1$, a síkra illeszkedő vezérgörbe képe egyszerűség kedvéért a k_1 kör; hasonlóan a második kúp csúcspontja M_2, vezérgörbéjének síkja $\sum_2$ és e síkra illeszkedő vezérgörbéjének képe a k_2 kör. Messe a kúpok csúcspontjait összekötő egyenes a $\sum_1$ síkot a D_1 és a $\sum_2$ síkot a D_2 pontban, továbbá legyen a $\sum_1$, $\sum_2$ síkok közös egyenese m. Ha a kúpok csúcspontjaira illeszkedő tetszőleges sík az m egyenest T pontban metszi, akkor e segédsíknek a $\sum_1$ síkon lévő nyomvonala, $s_1^1 \equiv TD_1$, míg a $\sum_2$ síkon lévő nyomvonala, $s_2^1 \equiv TD_2$. A segédsík mindkét kúpot két-két alkotóban metszi, ez alkotók M_1 és M_2 pontoktól különböző metszéspontjai az áthatási görbének pontjai. Az áthatás pontjainak szerkesztésénél a segédsíkokat nem vesszük fel tetszőlegesen, hanem úgy, hogy a szerkesztett pont a görbe képében lényeges pont legyen, így a második és harmadik segédsík egy-egy kontúralkotóra illeszkedő sík. Az áthatás kontúralkotóra illeszkedő pontjának lényeges szerep jut akkor, ha az áthatási görbét láthatóság szerint kívánjuk megrajzolni, egy ilyen pont képe mindig elválasztó pontja a görbe látható és nem látható részének, de csak akkor, ha a kontúralkotó a pont környezetében a másik kúp palástjával nincs eltakarva. Kontúralkotón fekvő pontban az áthatási görbe érintője mindenesetre a kontúralkotómenti érintősíkban van, de ez az érintősík vetítősík, s így e pontban az érintő képe a kontúralkotó képével azonos egyenes. Tehát minden kontúralkotón megszerkesztett ponttal az áthatási görbe projekciójában a görbe érintőjének képét is ismerjük. A negyedik segédsík, mely az első kúpfelületnek érintősíkja, az áthatási görbének ugyancsak fontos pontjait adja. Ilyen segédsíkban az áthatási görbének négy pontjából kettő-kettő összeesik. Ha ilyen pontban az általános utasítás szerint megszerkesztjük az érintőt, akkor érintőnek azt a kúpalkotót nyerjük, melyben az érintő segédsík a másik kúpfelületet metszi.

A segédsíkok $\mathbf{S}_1$ (s_1^1, s_2^1) helyzetéből kiindulva fokozatosan megközelíthetjük az $\mathbf{S}_0$ (s_1^0, s_2^0) helyzetet; a közbeeső síkok mindegyikére az áthatási görbének négy pontja illeszkedik és amint a segédsík közelebb és közelebb jut az $\mathbf{S}_0$ síkhoz, a pontnégyesek pontjai is közelebb és közelebb jutnak, végül az $\mathbf{S}_0$ síkban a négy pontból egy pont lesz. mert az $\mathbf{S}_0$ sík a két kúpfelület közös érintősíkja; e síkban az áthatás pontja a két érintési alkotó közös pontja: D. Az áthatási görbe D pontjában az érintő a D pontra illeszkedő ama egyenes, melyben a ponthoz tartozó két felületi érintősík metszi egymást, de a jelen esetben a két felületi érintősík azonos, tehát a közös érintősíkban a D pontra illeszkedő minden egyenes az áthatási görbe érintője, ez csak úgy lehetséges, ha a D pont az áthatásnak duplapontja, e ponton a görbe kétszer megy keresztül. Általában tételként mondhatjuk, hogy *két másodrendű kúpfelület áthatásának akkor van duplapontja, ha a két felületnek közös pontjában közös az érintősík.*

Kúpfelületek áthatási görbéjén a duplapontnak minden fajtája mutatkozhatik. Így ha két kúpfelületnek közönséges értelemben vett érintősíkja közös és az egyik kúpfelületnek csúcspontja a másik kúpfelület közönséges pontja, akkor annak a kúpfelületnek csúcspontja, mely a másik felületen rajta van, az áthatási görbének csúcspontja. Továbbá, ha a két kúpfelületnek közönséges értelemben vett közös érintősíkja nincs és az egyik kúpfelület csúcspontja rajta van a másik kúpfelületen, akkor az egyik csócspont a két felület közös pontja és e pont az áthatásnak izolált pontja, ha e pontban a második kúp érintősíkja az első kúpot képzetes alkotókban metszi. Utóbbi esetben a két felületnek szintén van közös érintősíkja, de ez az érintősík az egyik kúpot közönséges értelemben érinti, még pedig azon alkotó mentén, mely alkotó a két csúcspont összekötő egyenese, ugyanaz a sík a másik kúpot csak a kúp csúcspontjában érinti. Tudniillik az érintősík definiciójából következik, hogy a kúp egyetlen szinguláris pontjára illeszkedő, minden sík a kúpfelület érintősíkja, és e sík egyetlen érintési pontja a szinguláris pont, a kúp csúcspontja.

A 103. ábrában a két kúpfelületet úgy vettük fel, hogy az $\mathbf{S}_2$ segédsík mindkét kúpfelületet egy-egy kontúralkotóban metszi; ha a két kontúralkotó közös pontjában kívánjuk meghatározni az érintőt, akkor a kontúralkotókmenti érintősíkok metszésvonalát kell meg-



103. ábra.

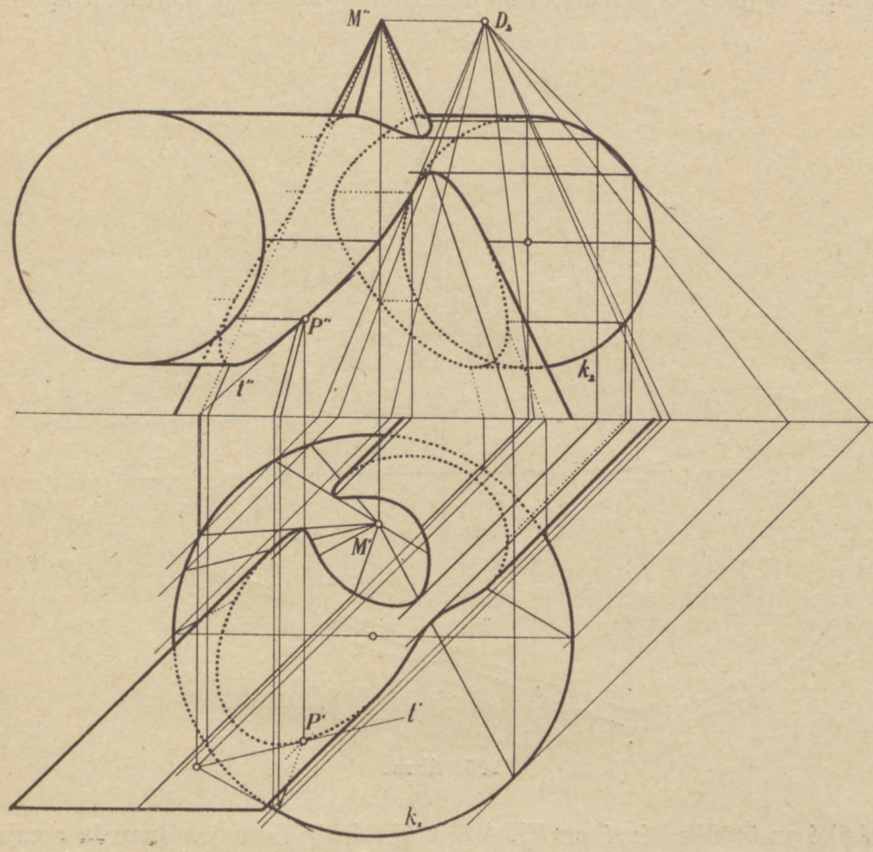
szerkesztenünk, de a kontúralkotókmenti érintősíkok vetítősíkok, s így ezek metszésvonala vetítősugár. A térgörbe projekciójában mutatkozó szingularitások tárgyalásánál említettük, hogya térgörbe képében mindig akkor lép fel csúcspont, ha a térgörbe érintője a vetítési középpontra illeszkedő egyenes, e szerint a kontúralkotók közös pontjának képe az áthatási görbe projekciójában csúcspont. Az ábrázolt negyedrendű térgörbe képét szemlélve látjuk, hogy a képnek van egy valódi duplapontja, egy látszólagos duplapontja és egy csúcspontja.

Az áthatási görbe egy általános helyzetű pontjában az érintő szerkesztését is feltüntettük. Az egyik 1 pontban a t érintőt mint két érintősík metszésvonalát nyertük. Az első kúpfelület $\mathbf{T}_1$ érintősíkjának nyomvonala a $\sum_1$ síkon az $s_1^{T_1}$ egyenes, míg a második kúpfelület $\mathbf{T}_2$ érintősíkjának nyomvonala a $\sum_2$ síkon az $s_2^{T_2}$ egyenes. Mivel a két nyomvonal nem illeszkedik ugyanazon síkra, az érintő egy pontjának meghatározása végett vagy a $\mathbf{T}_1$ sík nyomvonalát kell megszerkeszteni a $\sum_2$ síkon, vagy a $\mathbf{T}_2$ sík nyomvonalát a $\sum_1$ síkon. Az ábrában a $\mathbf{T}_2$ sík nyomvonalát állapítottuk meg az $\sum_1$ síkon, e nyomvonal egy pontja $s_2^{T_2}$ és m metszéspontja, egy másik pontja az M_2 csúcspontra illeszkedő és $s_2^{T_2}$ egyenessel parrallel egyenesnek nyompontja a $\sum_1$ síkon, e nyompont mindenesetre azon a q egyenesen van, melyben az M_2 pontra illeszkedő és $\sum_2$ síkkal parallel sík a $\sum_1$ síkot metszi. A q egyenes az m egyenessel parallel és egy pontja az $\mathbf{S}_0$ síkban az s_1^0 egyenesen az a pont, melyben az M_2 ponton átmenő és az s_2^0 egyenessel parallel egyenes metszi. A $\sum_1$ síkban a $\mathbf{T}_1$ és $\mathbf{T}_2$ érintősíkok nyomvonalainak közös pontja, S_1, a t érintő nyompontja a $\sum_1$ síkban.

Általános negyedrendű térgörbe szerkesztését a 104. ábrában mutatjuk be orthogonális parallel projekcióban két képsíkon. Az ábrázolt negyedrendű térgörbe ferde körkúp és ferde körhenger áthatási görbéje. A ferde körkúp csúcspontja M (M', M'') és az első képsíkban fekvő vezérköre k_1, a ferde körhenger vezérköre a második képsíkban a k_2 kör, alkotói az első képsíkkal parallel egyenesek. Az áthatás pontjainak konstrukciójánál a segédsíkok az M ponton átmenő és a henger alkotóival parallel egyenesre illeszkednek, ez egyenes második nyompontja D_2 első nyompontja, D_1, az egyenes végtelenben fekvő pontja ; e szerint minden segédsík második nyomvonala D_2 pontra illeszkedő egyenes, míg első nyomvonala a henger alkotóinak első képével parallel egyenes. Segédsíkokul csak ama síkokat vettük fel, melyekkel az áthatás megrajzolása szempontjából lényeges pontokat nyertünk. Így megszerkesztettük az összes kontúralkotókon fekvő pontokat, továbbá azokban a segédsíkokban fekvő pontokat, mely segédsíkok közül az egyik a kúpfelület, a másik a hengerfelület érintősíkja. Az ábrában még fel van tüntetve az áthatás P pontjában az érintőnek szerkesztése is.

Két kúpfelület áthatási görbéjének lehetnek valós végtelenben fekvő pontjai ; egy-egy végtelenben fekvő pont parallel kúpalkotók közös végtelenben fekvő pontja. A parallel kúpalkotókat úgy szerkesztjük meg, hogy a kúpok mindegyikét önmagával párhuzamosan eltoljuk koncentrikus helyzetbe, meghatározzuk e kúpok síkmetszeteit egy és ugyanazon síkkal, a síkmetszetek közös pontjai felé menő kúpalkotók szolgáltatják azokat az egyeneseket, melyekkel parallel kúpalkotók vannak az eredeti kúpfelületeken. Ha α_1 és a_2 az eredeti kúpok parallel alkotói, akkor ezek közös végtelenben fekvő pontja az áthatás egy végtelenben fekvő pontja, e pontban az érintő, az áthatás asymptotája, a parallel kúpalkotókmenti érintősíkok közös egyenese, míg az asymptota képe az áthatás képének asymptotája.

Két másodrendű kúpfelület áthatásánál megkülönböztetünk teljes áthatást és kimetszést. Az áthatás teljes, ha a két kúpfelület közül az egyik minden alkotója résztvesz az áthatásban, vagyis az egyik kúpfelület minden alkotója metszi a másik kúpfelületet, ekkor az áthatás

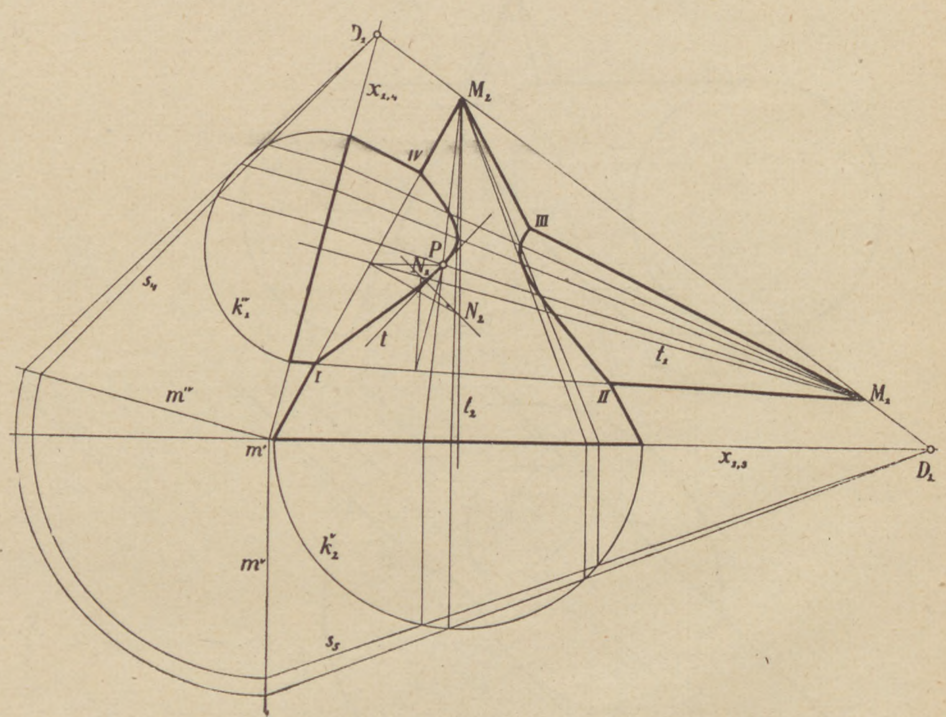


104. ábra.

két különálló részből áll, feltéve, hogy az áthatási görbének duplapontja nincs. Ha a két kúpfelület mindegyikén vannak oly alkotók, melyek a másik kúpfelületet nem metszik. akkor az áthatás kimetszés, az áthatási görbe egy összefüggő részből áll.

70. §. A negyedrendű térgörbe duplaprojekciója. A gyakorlatban sokszor oly két kúpfelület (hengerfelület) áthatását kell megszerkeszteni, melyeknek közös szimmetria síkjuk van. Ekkor a felületek áthatási görbéje szimmetrikus a közös szimmetria síkra nézve, s így ha képsíkul a közös szimmetria síkot választjuk és az áthatási görbét e síkra merőlegesen projiciáljuk, az áthatási görbe egy-egy pontjának képe mindig a görbe két pontjának képe, az áthatási görbére illeszkedő vetítősugarak mind a térgörbének duplaszelői, az áthatási görbe képe a térgörbének duplaprojekciója. Negyedrendű térgörbe képe ekkor egy és ugyanazon másodrendű görbe ívrészeiből tevődik össze.

Legyen a rajz síkja két forgáskúp közös szimmetria síkja, e síkban M_1 és M_2 pontok a kúpok csúcspontjai és t_1, t_2 a kúpok tengelyei (105. ábra). A kúpok vezérköreit egy-egy a kúpok tengelyeire merőleges új képsikon vettük fel, az egyik képsík jellemezve van az $x_{1,4}$, a másik az $x_{1,5}$ egyenessel, az első kúp vezérköre a negyedik képsíkon k_1^{IV}, a



105. ábra.

másiké az ötödik képsíkon k_2^{V}. A két új képsík m metszésvonala a rajz síkjára, mondhatjuk első képsíkra merőleges, első képe az új képsíkok tengelyeinek közös pontja, az m egyenes negyedik képe m^{IV} és ötödik képe az m^{V} egyenes. Az áthatás egyes pontjainak szerkesztésénél alkalmazandó segédsíkok a kúpok csúcspontjait összekötő egyenesre illeszkedő síkok ; ez az egyenes metszi a negyedik képsíkot a D_1, az ötödik képsíkot a D_2 pontban. Valamely tetszőleges segédsík az m egyenest egy pontban metszi, e pontnak negyedik rendezője egyenlő ugyanezen pont ötödik rendezőjével ; e körülmény figyelembevételével vettük fel egy-egy segédsík negyedik és ötödik nyomvonalát, majd meghatároztuk a segédsíkra illeszkedő kúpalkotók első képeit, végül megállapítottuk ezek metszéspontjait. Egy-egy metszéspont az áthatás két pontjának képe.

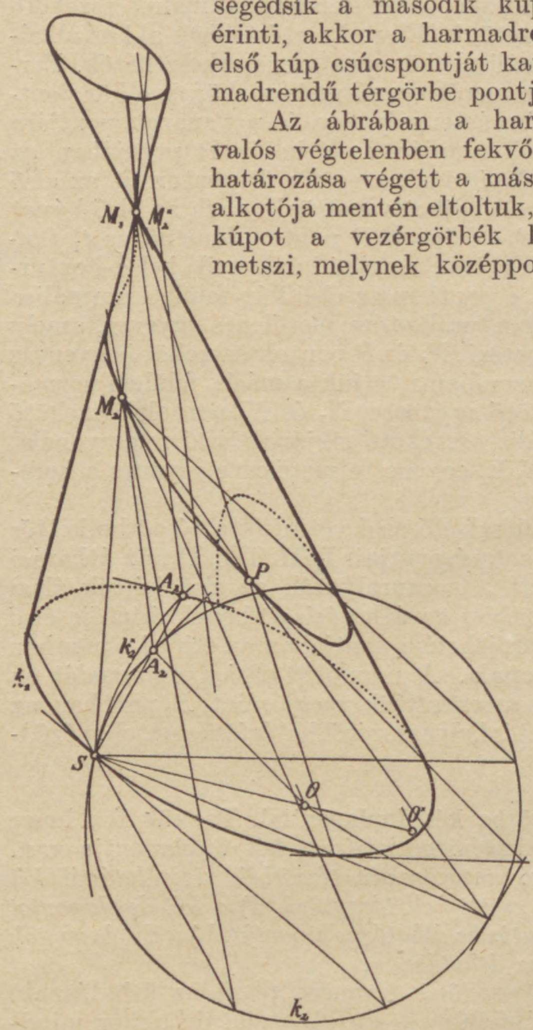
Eddig az áthatás egy pontjában az érintőt úgy szerkesztettük meg, hogy meghatároztuk a kérdéses pontban a két felületi érintősík metszésvonalát. De ha tekintetbe vesszük, hogy e metszésvonal a kérdéses ponthoz tartozó két felületi normális összekötő síkjára merőleges, az érintő szerkesztésére új utasítást nyerünk. E szerint az áthatás egy pontjában az érintőt úgy nyerjük, hogy a felvett ponton keresztül a pontra illeszkedő két felületi normális összekötő síkjára merőleges egyenest vezetünk. E szerkesztést főleg akkor alkalmazhatjuk, ha a felületi normálisok könnyen megszerkeszthetők. Forgási kúpnál a forgási tengelyre merőleges síkmetszet kör és e kör pontjaihoz tartozó normálisok a forgástengely egy és ugyanazon pontjára illeszkedő egyenesek. Mindezek alapján az áthatás P pontjában az érintőt a következő módon állapítottuk meg: a P ponton át az első kúp vezérkörének síkjával parallel síkot vezettünk, e sík az első kúpot oly körben metszi, melynek első képe a P ponton átmenő és t_1 tengelyre merőleges egyenes, ez egyenes az első kúp egyik belső konturalkotóját egy pontban metszi, e pontban az első kúp felületi normálisa az első képsíkban fekvő és a konturalkotóra merőleges egyenes, amely a t_1 egyenest az N_1 pontban metszi, N_1 és P pontok összekötő egyenese az egyik felületi normális; hasonlóan nyerjük a másik felületi normálist, ez N_2 és P pontok összekötő egyenese, N_1 és N_2 pontok összekötő egyenese a két felületi normális összekötő síkjának első nyomvonala, s így a P ponton átmenő és N_1N_2 egyenesre merőleges egyenes a keresett érintő első képe.

A szerkesztett érintőre illeszkedő első vetítősík a térgörbe kettős érintősíkja. A konturalkotók metszéspontjai, I, II, III, IV, az áthatási görbének szintén pontjai, mert a konturalkotók az első képsík által kimetszett alkotók. Ilyen pontban az áthatási görbének érintője első vetítősugár, de akkor a duplaprojekció e pontjában az érintő e ponthoz tartozó símulósík első nyomvonala. A símulósík első nyomvonalát az I, stb. pontokban ugyanúgy szerkesztjük meg, mint P pontban az érintőnek első képét, e szerkesztés helyességéről határátmenettel győződhetünk meg.

71. §. Negyedrendű térgörbe két duplaponttal. Tegyük fel, hogy két másodrendű kúpfelület áthatási görbéjének két duplapontja van. D_1, D_2. *Két duplaponttal bíró negyedrendű térgörbék vizsgálatánál két egymástól lényegesen különböző esetet kell tárgyalni,* a) *a két duplapontot összekötő egyenesnek minden pontja az áthatásnak pontja,* b) *a duplapontok összekötő egyenese nem része az áthatásnak.*

a) Ha a duplapontok összekötő egyenese része az áthatásnak, akkor ez az egyenes a két kúpfelület közös alkotója, de akkor mindegyik kúpfelület csúcspontja rajta van a másik kúpfelületen. Amennyiben a csúcspontok összeesők, az áthatás csupa egyenesre esik, az áthatás négy egyenesből áll, melyek párosával képzetesek is lehetnek. De ha a csúcspontok nem azonos pontok, akkor az áthatás egyik része a közös alkotó, másik része harmadrendű térgörbe.

A 106. ábrában felvettünk egy közös alkotóval két másodrendű kúpfelületet egy síkban fekvő vezérgörbékkel. Jelen esetben a közös alkotó egyúttal annak a síksornak tengelye, mely síksor síkjaival szerkesztjük meg az áthatás egyes pontjait. Minden ilyen sík a kúpfelületeket a közös alkotón kívül még egy-egy alkotóban metszi, utóbbiak közös pontja a harmadrendű térgörbe pontja. Így szerkesztettük meg a harmadrendű térgörbe P pontját és e pontban szokott módon az érintőt. Ha a segédsíkot úgy vesszük fel, hogy az az első kúpot a közös alkotó mentén érintse, akkor a harmadrendű térgörbe pontjaként a második kúp csúcspontját nyerjük, míg ha a segédsík a második kúpot a közös alkotó mentén érinti, akkor a harmadrendű térgörbe pontjaként az első kúp csúcspontját kapjuk, tehát M_1 és M_2 a harmadrendű térgörbe pontjai.

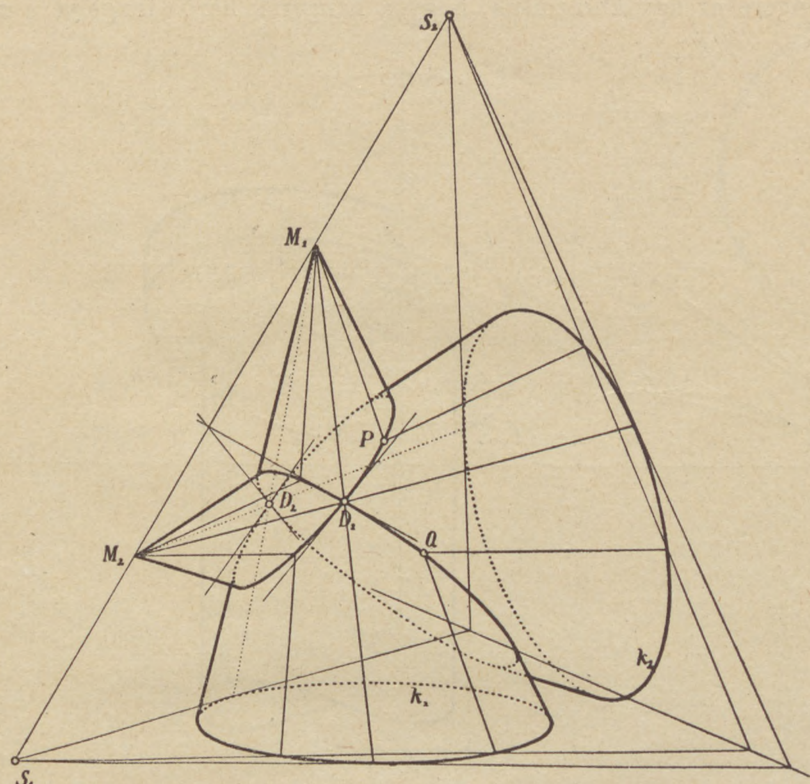


106. ábra.

Az ábrában a harmadrendű térgörbének egy valós végtelenben fekvő pontja van; e pont meghatározása végett a második kúpot a két kúp közös alkotója mentén eltoltuk, míg $M_2^\times \equiv M_1$ lett. Az eltolt kúpot a vezérgörbék közös síkja megint körben metszi, melynek középpontját az SOM_2 és $SO^\times M_2^\times$ hasonló háromszögek alapján nyerjük, ahol O jelenti a második kúp vezérkörének középpontját, a kör sugara $O^\times S$. E $k_2^\times$ kör a k_1 kúpszeletet az S ponton kívül még csak az A_1 pontban metszi, s így az ábra szerinti felvétel mellett a harmadrendű térgörbének csak egy végtelenben fekvő pontja van, e pont az M_1A_1 alkotó végtelenben fekvő pontja. Az M_1A_1 alkotóra illeszkedő segédsík kimetszi a második kúpból a vele parallel M_2A_2 alkotót. A parallel kúpalkotókmenti érintősíkok metszésvonala a térgörbe asymptotája.

A harmadrendű térgörbék osztályozásának alapja a görbe és az egyetlen végtelenben fekvő sík viszonylagos helyzete. Ha a végtelenben fekvő sík a kubikus görbét három különböző valós pontban metszi, akkor a harmadrendű térgörbe a kubikus hyperbola, ha csak egy valós pontban metszi, akkor a térgörbe a kubikus ellipszis. Ha pedig a görbe három valós végtelenben fekvő pontjai közül kettő összeesik, vagyis a végtelenben fekvő sík térgörbénk érintősíkja, akkor a térgörbe a kubikus hyperbolikus parabola; végül, ha a három valós végtelenben fekvő pont összeesik, vagyis a végtelenben fekvő sík görbénk símulósíkja, akkor a térgörbe a kubikus parabola.

b) Legyen két másodrendű kúpfelület áthatási görbéjének két duplapontja, D_1 és D_2, de a duplapontok által meghatározott egyenes ne legyen része az áthatásnak (107 .ábra). D_1 és D_2 csak úgy lehet az áthatásnak duplapontja, ha e pontokban a kúpfelületi érintősíkok közösek. Ha a két felület áthatásának a D_1 és D_2 pontoktól különböző pontja P, akkor D_1, D_2, P pontok összekötő síkja mindkét felületet egy-egy kúpszeletben metszi, e kúpszeletek közös pontjai D_1, D_2, P, továbbá mindkét kúpszeletnek a D_1 és D_2 pontban az érintője is közös, mert a D_1 és D_2 áthatási pontokban a felületi érintősíkok azonosak. Hivatkozással a kúpszeletek ama tételére, mely szerint a kúpszelet

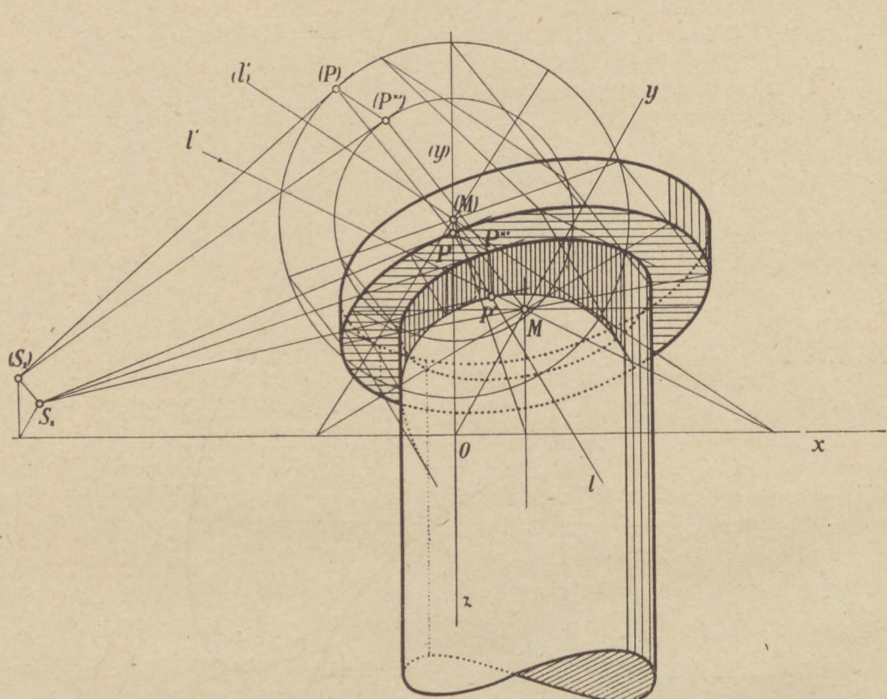


107. ábra.

öt pontjával, vagy ami evvel egyenlő értékű, három pontjával és e három pont közül kettőben az érintők által egyértelműen van meghatározva, mondhatjuk, hogy a D_1, D_2, P pontok összekötő síkja mindkét kúpfelületet egy és ugyanazon kúpszeletben metszi, de akkor ez a kúpszelet a két felület áthatási görbéjének egy másodrendű része. Mivel az egész áthatás negyedrendű, ebből következik, hogy a kiegészítő rész is másodrendű. Evvel bebizonyítottuk, hogy a *két másodrendű kúpfelület áthatási görbéje két kúpszeletre széteső negyedrendű térgörbe, ha a két felületnek két közös pontjában közös az érintősík.* A két kúpszelet, melyre a negyedrendű térgörbe szétesik, két pontban metszi egymást, e pontok a D_1 és D_2 duplapontok, mert ha a második kúpszeletnek egy pontja Q, akkor a D_1, D_2, Q pontok összekötő síkja a két kúpfelületet szintén két azonos kúpszeletben metszi.

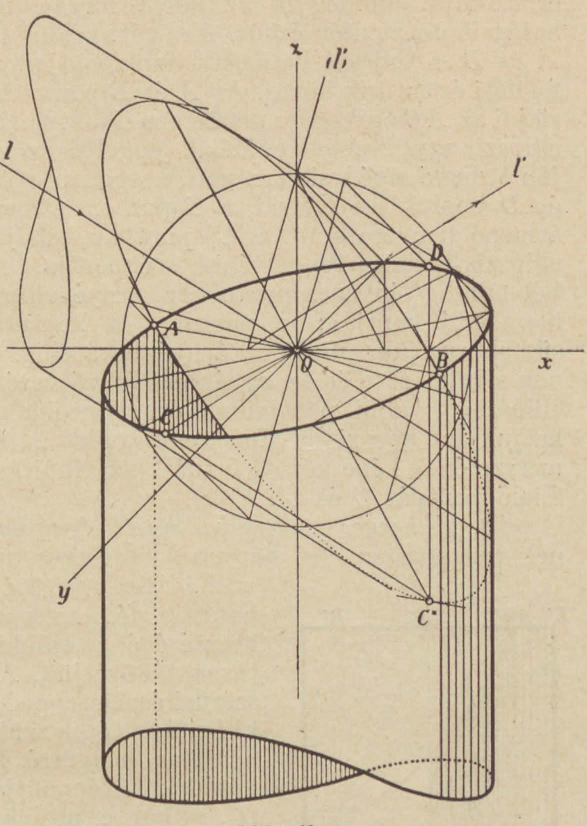
Nem okoz különösebb nehézséget annak bizonyítása, hogy ha két másodrendű kúpfelület áthatása két kúpszeletre eső görbe, akkor a két felületnek két közös pontjában az érintősík közös.

72. §. A gyakorlatból vett példák. 1. *Hengernek hengerrre vetett árnyéka.* Szerkesztessenek meg kavalierperspektívában alulnézetben adott parallel világítás mellett egymásra helyezett koaxiális forgási hengerek összes árnyékai. Miután adott tengelykereszt mellett a hengereket úgy ábrázoltuk, hogy a hengerek közös tengelye a z és



108. ábra.

$q_y = \frac{2}{3}$, megállapítottuk a hengerek önárnyékhatáralkotóit (108. ábra). A felülről jövő parallel világításnál a felső henger alapköre önárnyékban van, e körvonalra illeszkedő fénysugarak ferde körhengert alkotnak, e fényhenger metszi az alsó hengert negyedrendű térgörbében, a térgörbének az alsó henger megvilágított részén lévő darabja az alsó hengerre vetett árnyék árnyékhatára. Az árnyékhatárt pontonként szekesztjük meg, jelen esetben a negyedrendű térgörbe egyes pontjainak szerkesztésénél felhasznált segédsíkok a fénysugárral parallel első vetítősíkok. A P pontra illeszkedő segédsík első nyomvonala a P pontra illeszkedő és l' egyenessel parallel egyenes, az első nyomvonal metszi az alsó henger fedőlapkörét két pontban, e pontok közül csak $P^{\times\prime}$ érdekel, mert a másik önárnyékban lévő alkotó első nyompontja ; az alsó hengernek $P^{\times\prime}$ pontra illeszkedő alkotójának metszéspontja a P pontra illeszkedő fénysugárral, $P^{\times}$, a P pont rávetett árnyéka. A $P^{\times}$ pontban megszerkesztettük a negyedrendű térgörbe érintőjét is. Az érintő két érintősík metszésvonala, az egyik érintősík a fényhengert, a másik az alsó hengert a $P^{\times}$ pontban érinti. Mindkét érintősíknak első nyomvonalait rajzoltuk meg; a fényhenger érintősíkjának első nyomvonala illeszkedik a P pontra és érinti a fényhenger vezérkörét, az alsó henger érintősíkjának első nyomvonala érinti az alsó henger fedőlapkörét a $P^{\times\prime}$ pontban, a két érintő közös pontja, S_1, a negyedrendű térgörbe keresett érintőjének első nyompontja. A $P^{\times}$ pont és e pontban az érintőnek szerkesztése utasítást nyujt arra nézve is, hogy miként kell meghatározni a felső henger alapkörén azt a pontot, melynek az alsó hengerre vetett árnyéka a konturalkotóra esik, ill. melynek vetett árnyéka az önárnyékhatáralkotóra esik, az előbbi pontokban a negyedrendű térgörbe képének érintője az alsó henger konturalkotója, míg az utóbbi pontokban az érintők a fénysugárral parallel egyenesek. A rávetett árnyék legmagasabb pontja az alsó henger és fényhenger közös szimmetria síkjában van, e sík első nyomvonala a koordinátarendszer kezdő pontján átmenő és a fénysugár első képével parallel egyenes.

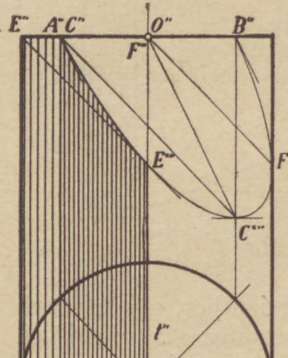


109. ábra.

2. *Forgási hengernek önmagába vetett árnyéka.* Legyen adva kavalierperspektivában felülnézetben oly üresnek gondolt forgási henger. melynek forgási tengelye azonos a z tengellyel. A tengelykeresztet úgy választottuk, hogy az y tengely képe az x tengellyel 45°-os szöget alkosson és $q_y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. A hengert felülről az átlátszónak vett xy koordinátasík határolja, ekkor a felülről jövő parallelvilágítás mellett a hengerfelület önmagába vet árnyékot; megállapítandó az önmagába vetett árnyék árnyékhatára (109. ábra). Az xy síkban fekvő körvonal pontjaira illeszkedő fénysugarak fényhengert alkotnak, az adott henger és fényhenger áthatási görbéjének az xy sík alatti része a bevetett árnyék árnyékhatára. Az xy síkban fekvő kör az adott henger és fényhenger közös vezérgörbéje, s így a két felület teljes áthatási görbéjének egy másodrendű része, ebből következik, hogy a keresett árnyékhatár másodrendű görbe ívrésze,

még pedig ellipszisnek egy része, mert forgási hengerfelületen fekvő el nem fajuló másodrendű görbe mindig ellipszis. Mivel az adott hengerfelület és fényhenger áthatási görbéje két kúpszelet, kívánatos, hogy a két kúpszelet két közös pontját állapítsuk meg, melyek a teljes áthatásának duplapontjai. A segédsíkok, melyekkel az áthatásnak egyes pontjait nyerhetjük, a jelen esetben a fénysugárral parallel első vetítősíkok, s így egy-egy segédsíknak első nyomvonala a fénysugár első képével parallel. A segédsíkok közül kettő a két felületnek közös érintősíkja, mindegyik az adott forgási hengert egy-egy önárnyékhatáralkotó mentén érinti. Az önárnyékhatáralkotók első nyompontjai, A és B, a teljes áthatásnak duplapontjai, mert e pontokban mindkét felületi értintősík közös. Az A és B pontokban a forgási henger érintősíkjai az AB egyenesre merőleges síkok, tehát az AB egyenes a keresett ellipszis egyik tengelye. Másik tengelye az AB átmérő O felezési pontján átmenő segéd síkban van, e segédsík a forgáshenger vezérkörét a C és D pontokban metszi, a C ponton átmenő fénysugár a D ponton átmenő hengeralkotót a $C^{\times}$ pontban találja, e pont az árnyékhatárellipszis másik tengelyének végpontja. Az ábrázolás szempontjából mindig lényeges pontok az árnyékellipszisnek a konturalkotókra illeszkedő pontjai; e pontokat a konturalkotóra illeszkedő segédsíkkal nyerjük. Mivel az árnyékhatárellipszis a forgási hengerfelületnek síkmetszete és az xy síkban fekvő vezérkör is az, az árnyékhatárellipszis további pontjainak és éritntőinek szerkesztésére felhasználhatjuk azt az axiális affin vonatkozást is, mely hengerfelület két síkmetszetének képe között fennáll, az affinitás tengelye AB és egy megfelelő pontpár C és $C^{\times}$.

3. *Félhenger önmagába vetett árnyéka.* Forgási henger, melynek tengelye az első képsíkra merőleges, innenső félhengerének eltávolításával nyert és felülről fél vezérkörével határolt félhenger bevetett árnyékának szerkesztésénél az előbbi feladatban nyujtott utasításokat követjük. A szerkesztés lényeges egyszerűsítéseket enged meg, ha a 45°-os parallel világítást tételezzük fel (110. ábra). Legyen a teljes hengerré kiegészített henger vezérkörének középpontja a második projekcióban O'', akkor e projekcióban az önárnyékhatáralkotók végpontjai, A'' és B'' az O'' ponttól oly távolságban vannak, mint a vezérkörbe írt négyzet egy oldala a középponttól. A térben a körnek az A ponttal födésben lévő C pontjának bevetett árnyéka, lesz a bevetett árnyékhatár legmélyebb pontja, mely 45°-os parallel világítás mellett a B pontra illeszkedő önárnyékhatáralkotóval födésben lévő hengeralkotóra esik. E szerint a C pont bevetett árnyékának második képe $C^{\times''}$ a B'' pontra illeszkedő és tengely második képével parallel egyenesen van, ahol $\overline{B''C^{\times''}}$ távolság a vezérkörbe írt négyzet egy oldalával egyenlő. Ha E'' a bal konturalkotó végpontjának második képe, úgy e pont térbeli megfelelőjére illeszkedő fénysugár a tengellyel födésben lévő alkotót

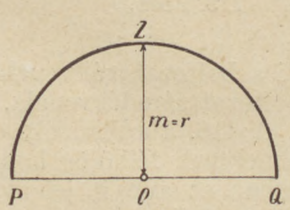


110. ábra.

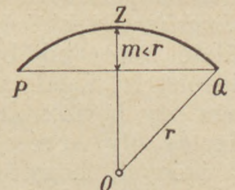
metszi, tehát E pont bevetett árnyéknak második képe, $E^{\times\prime\prime}$, a t'' egyenesen van, melynek távolsága O'' ponttól r, ha r a henger vezérkörének sugara. Ugyanúgy nyerjük a vezérkör F pontjának bevetett árnyékát, ahol F a kör középpontjával födésben lévő hátsó pont. E pont bevetett árnyékának második képe, $F^{\times\prime\prime}$, a jobboldali képkörrajzalkotón a végpontjától r távolságban van. A bevetett árnyékellipszis második képében az A'' és B'' pontbeli érintői az $O''C^{\times\prime\prime}$ egyenessel parallel egyenesek, az $E^{\times\prime\prime}$ pontban az érintő a fénysugár második képével parallel egyenes és $F^{\times\prime\prime}$ pontban az érintő a jobboldali képkörrajz alkotó. Ezek után az ellipszis, melyből félhenger esetében csak az A''—$E^{\times\prime\prime}$-ig terjedő ívdarab érvényesül, megrajzolható.

4. *Dongaboltozatok.* A hengerfelületeket a gyakorlatban boltozati alakzatokként alkalmazzák. Itt és a továbbiakban a boltozatnak alulról látható felülete, a boltozat intradosza érdekel, a boltozat vastagságát nem vesszük figyelembe.

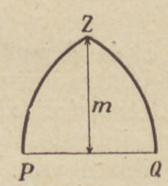
Dongaboltozatnál az intradosz mindig hengerfelület, melynek alkotói vízszintes vagy ferde egyenesek, utóbbi esetben a dongabol-



111. ábra.



112. ábra.



113. ábra.

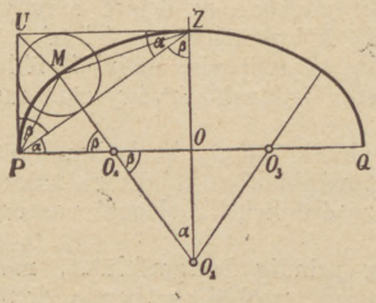
tozat emelkedő dongaboltozat. A dongaboltozat hengerfelületének vezérgörbéjét oly függélyes síkban vesszük fel, melyre a hengerfelület alkotói merőlegesek, ha alkotói vízszintes egyenesek ; míg emelkedő dongaboltozatnál a vezérgörbe szintén függélyes síkját rendesen úgy vesszük fel, hogy az alkotók orthogonális projekciói e síkon függélyes egyenesek legyenek. A vezérgörbe síkjait a dongaboltozat végein homloksíkoknak, míg e síkokban fekvő vezérgörbéket a boltozat homlokíveinek mondjuk.

A boltozat homlokíve lehet *a)* fél körív (111. ábra) ; *b)* fél körívnél kisebb körív (112. ábra), ekkor a boltozat nyomottívű ; *c)* két körív (113. ábra), ekkor a boltozat emeltívű ; *d)* három körívből összetett kosárgörbe,* melyek ívei egymásba érintőleg mennek át (114. ábra) ;

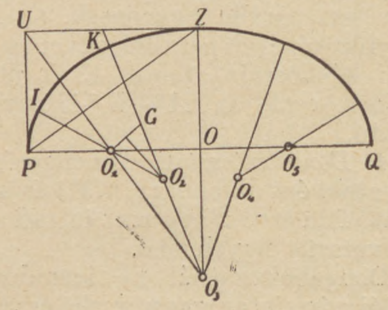
* A 114. ábrában a háromívű kosárgörbét adott P, O, Z pontok mellett úgy szerkesztettük meg, hogy az $OZUP$ oblongum PZ átlójával nyert egyik derékszögű háromszögbe írt kör M középpontján át a PZ átlóra merőleges egyenest rajzoltunk, ez az egyenes metszi a PO egyenest az O_1 pontban és az OZ egyenest az O_2 pontban ; legyen továbbá az O_1 pont szimmetrikus az OZ egyenesre nézve O_3. Az O_1, O_2, O_3 pontok a körívek középpontjai, ahol az első és harmadik körív sugara $\overline{O_1P} = \overline{O_1M}$ és a második körív sugara $\overline{O_2M} = \overline{O_2Z}$. A három körív csak akkor alkot kosárgörbét, ha tényleg $\overline{O_1P} = \overline{O_1M}$ és $\overline{O_2M} = \overline{O_2Z}$. Ennek igazolására a következő jelöléseket vehetjük be: $ZPO \measuredangle = \alpha$, $PZO \measuredangle = \beta$,

e) öt körívből összetett kosárgörbe,* melynek ívei szintén egymásba érintőileg mennek át (115. ábra) stb.

A dongaboltozat homlokívének P és Q kezdőpontjai a vállpontok, az általuk meghatározott távolság a boltozat fesztávolsága. A homlokív legmagasabb pontja, Z, a záradékpont. A záradékpontnak PQ egyenestől való távolsága a homlokív vagy a boltozat magassága, m. A henger-



114. ábra.



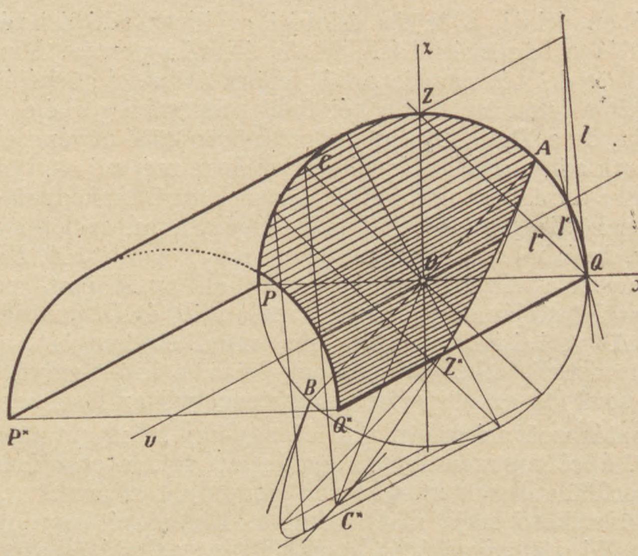
115. ábra.

felület P és Q pontjaira illeszkedő alkotói a boltozat vállvonalai és a záradékpontra illeszkedő hengeralkotó a boltozat záradékvonala.

5. *Dongaboltozat kavalierperspektívája.* A 116. ábrában oly dongaboltozat intradoszfelületét mutatjuk be, melynek félkörös homlokíve az xz síkban van. Geometriai fogalmazásban ez annyit jelent, hogy ábrázoljuk alulnézetben egy horizontális tengelyű egyenes körhenger felső felét. Az ábrázolás oly kevés és annyira egyszerű ábrázoló geometriai ismeretet igényel, hogy a szerkesztés részletezése itt mellőzhető. Az ábra egyúttal feltünteti 45°-os parallel világítás

ahol $\alpha + \beta = 90°$; ugyanakkor a szerkesztés alapján az MPO_1 háromszög O_1 csúcsánál fekvő szög β és az MZO_2 háromszög O_2 csúcsánál fekvő szög α. Az MPO_1 háromszögben $MPO_1\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2}$ és $PMO_1\sphericalangle = 180° - \beta - \left(90° - \frac{\beta}{2}\right) = 90° - \frac{\beta}{2}$, vagyis a háromszög egyenlőszárú háromszög. Az MZO_2 háromszögben az $MZO_2\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2}$ és $ZMO_2\sphericalangle = 180°\alpha - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 90° - \frac{\alpha}{2}$, tehát MZO_2 háromszög szintén egyenlőszárú háromszög. Evvel kimutattuk, hogy a PM és MZ körívek egymásba érintőileg mennek át.

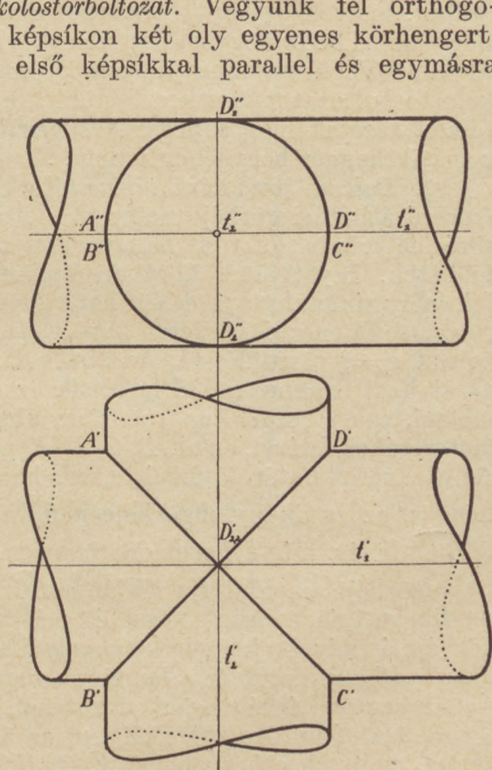
* A 115. ábrában az ötívű kosárgörbét adott P, O, Z pontok mellett úgy szerkesztettük meg, hogy az OP fél nagytengelyű és OZ fél kistengelyű ellipszis csúcspontjaihoz tartozó görbületi körök O_1 és O_3 középpontjait állapítottuk meg, mely pontok a kosárgörbe első és harmadik körívének középpontjai. Ekkor O_1 pont körül O_1P sugárral megrajzoltuk az első körívet és O_3 körül O_3Z sugárral a harmadik körívet. A harmadik körív K kezdőpontját úgy vettük fel, hogy KO_3 egyenes az OO_1 szegmentumot egy belső pontban messe, különben tetszőleges. Mivel a második körív a harmadikat a felvett K pontban érinti, a második körív középpontja a KO_3 egyenesre illeszkedő pont. Ezt az O_2 pontot úgy kell meghatározni, hogy e körül rajzolt körív az első körívet is érintse. E végett a KO_3 egyenesre a K ponttól O_3 felé felmérjük az első körív PO_1 sugarát, az így nyert G és a már ismeretes O_1 pontok által határolt távolság felező merőlegese metszi a KO_3 egyenest a második körív O_2 középpontjában és az O_2O_1 egyenes kijelöli az első körív I végpontját. O_1, illetve O_2 szimmetrikusa OZ egyenesre nézve O_5, illetve O_4 a további körívek középpontjai.



116. ábra.

mellett a dongaboltozat önárnyékhatáralkotóját és önmagára vetett árnyékát.

6. *Római keresztboltozat, kolostorboltozat.* Vegyünk fel orthogonális parallel projekcióban két képsíkon két oly egyenes körhengert, melyeknek t_1, t_2 tengelyei az első képsíkkal parallel és egymásra merőleges egyenesek és legyen mindkét henger vezérkörének sugara r (117. ábra). Ha még feltesszük, hogy az egyik tengely az $x_{1,2}$ tengellyel parallel, akkor az egyik henger második vetítőhenger, s így a két henger áthatási görbéjének második képe kör. Mivel a hengerek első kontúralkotói a tengelyek összekötő síkjára illeszkedő egyenesek, a kontúralkotók A, B, C, D metszéspontjai az áthatásnak pontjai, e pontok a térben négyzet csúcspontjai, e négyzet képe az első képkörrajzalkotók által meghatározott négyzet $A'B'C'D'$. A két hengerfelületnek van két közös érintősíkja, e síkok a tengelyek összekötő síkjától r távolságban fekvő síkok. A két felület egy-egy közös érintősíkja mindkét felületet egy-



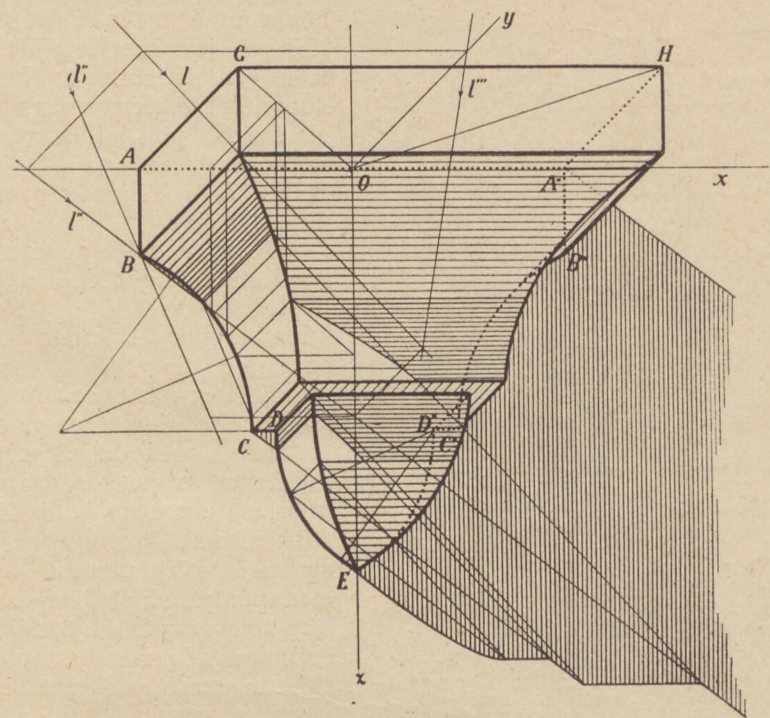
117. ábra.

egy alkotóban érinti, a közös érintősíkra illeszkedő érintési alkotók metszéspontja a közös érintősík közös érintési pontja. Minden közös érintősík közös érintési pontja a két felület áthatási görbéjének duplapontja, tehát a jelen esetben a két felület áthatási görbéjének van két duplapontja, de a D_1 és D_2 duplapontok összekötő egyenese nem része az áthatásnak s így az áthatás két kúpszeletre széteső negyedrendű térgörbe. Mivel a duplapontok mindkét kúpszeletre illeszkednek és a duplapontok összekötő egyenese első vetítősugár, a kúpszeletek síkjai első vetítősíkok. Az áthatásnak már megszerkesztett pontjai A, B, C, D, s így az egyik kúpszelet síkjának első nyomvonala az A' és C' pontok és a másik kúpszelet síkjának első nyomvonala a B' és D' pontok összekötő egyenese. A vetítősíkok mindegyike mindkét hengert ugyanolyan ellipszisben metszi, a két ellipszisnek közös a kistengelye, a fél kistengely r, továbbá az ellipszisek nagytengelyei az első kontúralkotók által meghatározott négyzetnek átlói, egy-egy fél nagytengely $r\sqrt{2}$.

A 117. ábrában igen fontos gyakorlati feladatot oldottunk meg, ha a hengerfelületeknek ama részeit gondoljuk eltávolítva, melyek a tengelyek összekötő síkja alatt vannak. Ekkor két egyenlő homlokívű és egyenlő vállmagasságú dongaboltozat áthatását szerkesztettük meg. Az áthatás az AD_1C és BD_1D fél ellipszisekből áll, ezek a boltozatok keresztívei. Mondhatjuk azt is, ha a dongaboltozatok csak ama részeit tartjuk meg, melyek az $ABCD$ négyzetalapú egyenes hasáb belsejében vannak, de ezekből még ama részeket is eltávolítva gondoljuk, melyek egy-egy hengerből a másik henger belsejében vannak, hogy az $ABCD$ négyzetalap fölött római keresztboltozatot szerkesztettünk. Végül mondhatjuk azt is, hogy az $ABCD$ négyzetalap fölött kolostorboltozatot szerkesztettünk, ha a hengerfelületek csak ama részeit tartjuk meg a négyzetes hasáb belsejében, melyek mindenkor a másik henger belsejében vannak.

7. *Balkon kosárszerű támasztéka.* Két hengerfelület kúpszeletekre széteső áthatási görbéje nemcsak boltozatoknál, hanem párkányzatok törés helyein is előfordul, ha a párkányzatok egyes határfelületei hengerfelületek. Így a 118. ábrában balkon oly támasztékrészletét vettük fel, mely síkfelületeken kívül hat egyenes körhengerfelülettel van határolva. A támasztékrészletet kavalierperspektívában alulnézetben ábrázoltuk $q_y = \frac{2}{3}$ rövidüléssel. Az ábrából látható, hogy az oldalrajz síkja az alakzat szimmetria síkja, e sík az alakzatot az alakzat profiljában metszi, mely profil kongruens az alakzatnak a felrajz síkjával való metszetének felével, az A, B, C, D, E pontokkal jellemzett törtvonallal. Az alakzatot határoló felső három henger közül kettő második vetítőhenger, az egyik nyomgörbéje a felrajz síkján a $\widehat{BC}$ körív, a másiké a $\widehat{B^{\times}C^{\times}}$ körív, míg a harmadik henger harmadik vetítőhenger, melynek nyomgörbéje az oldalrajz síkján a $\widehat{BC}$ körívvel kongruens körív. A harmadik vetítőhengernek mindkét második vetítőhengerrel van áthatási görbéje és mivel e hengerek tengelyei az alaprajz síkjával parallel síkra illeszkedő egyenesek és a hengerek sugarai egyenlők, két-két hengernek az alakzaton érvényesülő áthatása egy-egy ellipszisnek ívdarabja. Az alakzat felülről határolva van az alaprajz síkjában fekvő fél négyzettel, melynek csúcspontjai A, G, H, $A^{\times}$. A teljes négyzet GO, illetve HO félátlóján van két-két henger ellipszis áthatásának alaprajza, ezt tudva az ellipszis ív egyes pontjainak képeit úgy szerkesztjük meg.

hogy felvesszük a második vetítőhenger, melynek nyomgörbéje a felrajz síkján a $\widehat{BC}$ körív, egy alkotóját, megállapítjuk ennek alaprajzát, az alaprajz és GO egyenes közös pontja egy áthatási pont alaprajza, amiből az ellipszis egy pontjának axonometrikus képe már megszerkeszthető. Hasonló okoskodással szerkesztettük meg az alakzat alsó három határoló hengerfelületének áthatási görbéjét. Végül adott

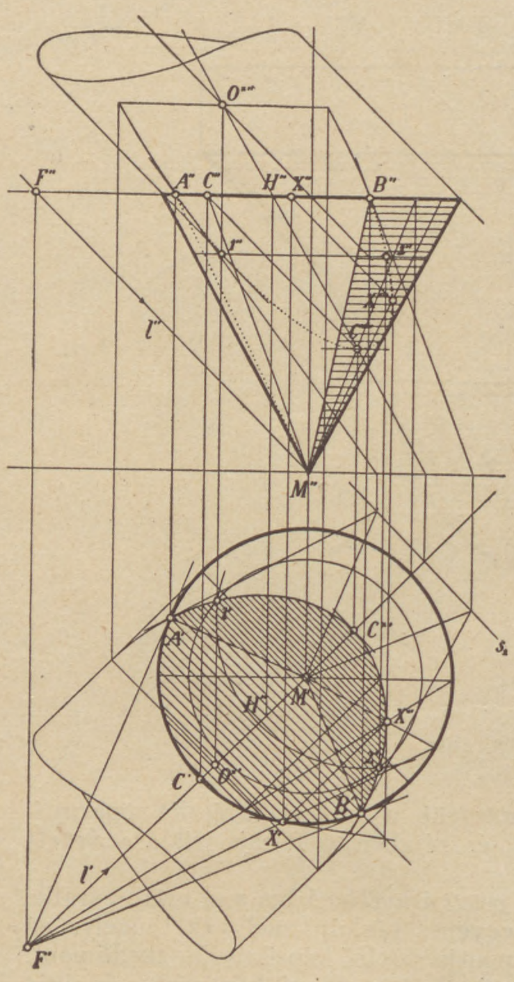


118. ábra.

parallel világítás mellett feltüntettük a támasztékrészlet önárnyékát, önmagára vetett árnyékát és részben a felrajz síkjára vetett árnyékát.

8. *Egyenes körkúp önmagába vetett árnyéka.* Adva van orth. parallel projekcióban két képsíkon oly egyenes körkúp, melynek tengelye az első képsíkre merőleges, M csúcspontja az első képsíkra illeszkedő pont, vezérköre az első térrészben fekvő adott r sugarú kör, melynek síkja az első képsíkkal parallel adott sík (119. ábra). Ha a kúpfelületnek a csúcspont és vezérkör közötti részét ábrázoljuk, akkor a vezérkör a kúpfelület belsejébe vet árnyékot, ez lesz a kúp belső felületére vetett árnyék árnyékhatára. Az árnyékhatár megállapítása végett a vezérkör pontjaira fénysugarakat illesztünk ; a fénysugarak által meghatározott fényhenger másodrendű henger, mert ferde körhenger, a fényhenger és adott kúpfelület áthatási görbéje a keresett árnyékhatár. Mivel mindkét felület másodrendű, a két felület áthatási görbéje negyedrendű térgörbe. A negyedrendű térgörbe egyik része a kúp vezérköre, mert a vezérkör nemcsak a kúpnak, hanem a fényhengernek is vezérköre.

E szerint az áthatás keresett része másodrendű. A teljes áthatás két kúpszeletre esik szét, de akkor az áthatásnak két duplapontja van, mely duplapontok mindkét kúpszeletre illeszkedő pontok. A duplapontok különben a kúp vezérkörének ama pontjai, melyekben a kúp önárnyékhatáralkotói metszik. E pontokat, mint ismeretes, úgy nyerjük, hogy a kúp csúcspontjára illeszkedő fénysugárnak a vezérkör síkjával való F metszéspontjából a vezérkörhöz vont érintők A és B érintési pontjait szerkesztjük meg. Könnyen igazolható, hogy a kúpfelület és fényhenger közös A és B pontjaihoz tartozó érintősíkok is közösek, tehát A és B a teljes áthatásnak duplapontjai.



119. ábra.

Két kúpszeletre széteső negyedrendű térgörbénél a duplapontok összekötő egyenese a kúpszeletek síkjainak közös egyenese és mivel továbbá mindkét kúpszelet az adott kúpfelület két síkmetszete, e síkmetszetek első képei centrális kollineár vonatkozásban lévő kúpszeletek, mely kollineár vonatkozásnak tengelye az $A'B'$ egyenes és centruma a kúp csúcspontjának első képe. A két kúpszelet egyúttal a fényhengernek is két síkmetszete, ebből először arra következtethetünk, hogy a vezérkörnek a kúpfelületbe vetett árnyéka ellipszis, mert ferde körhenger minden síkmetszete ellipszis; de következtethetünk arra is, hogy a kúpszeletek első képei axiális affin vonatkozásban lévő görbék, ahol az affinitás tengelye ugyancsak az $A'B'$ egyenes és az affinitás iránya a fénysugár első képe.

Az ábrában elsősorban a vezérkör tetszőleges X pontjának a kúpfelületre vetett árnyékát szerkesztettük meg, vagyis megállapítottuk az X pontra illeszkedő fénysugár és kúpfelület metszéspontját. Egyenes és kúpfelület metszéspontjának meghatározásánál az egyenesre oly síkot illesztünk, mely egyúttal a kúp csúcspontjára is illeszkedik, a jelen esetben e síkot meghatározza az X pontra illeszkedő fénysugár és a kúp csúcspontjára illeszkedő fénysugár s így e segédsík nyomvonala a vezérkör síkján az X és F pontok összekötő egyenese. Ez az egyenes a vezérkört az X ponton kívül még egy pontban metszi, utóbbi pontra illeszkedő kúpalkotóra esik az X pont bevetett árnyéka, $X^\times$. A keresett kúpszelet $X^\times$ pontjában az érintőt úgy nyerjük, hogy a vezérkör X pontbeli érintőjének centrális kollineár megfelelőjét szerkesztjük meg és pedig oly módon, hogy ahol az X pontbeli érintő az AB egyenest metszi, e pontot összekötjük az $X^\times$ ponttal.

A bevetett árnyék pontjának és érintőjének fenti szerkesztése utasítást ad arra vonatkozólag, hogy egy előre felvett kúpalkotón a bevetett árnyékgörbe pontját miképpen nyerjük és egyúttal felvilágosít arról, hogy a vezérkör C pontjának bevetett árnyéka, $C^\times$, a vetett árnyék legmélyebb pontja a kúpfelület felvett helyzete mellett, ha a vezérkör ama pontja C, melyben a kör érintője az AB egyenessel parallel.

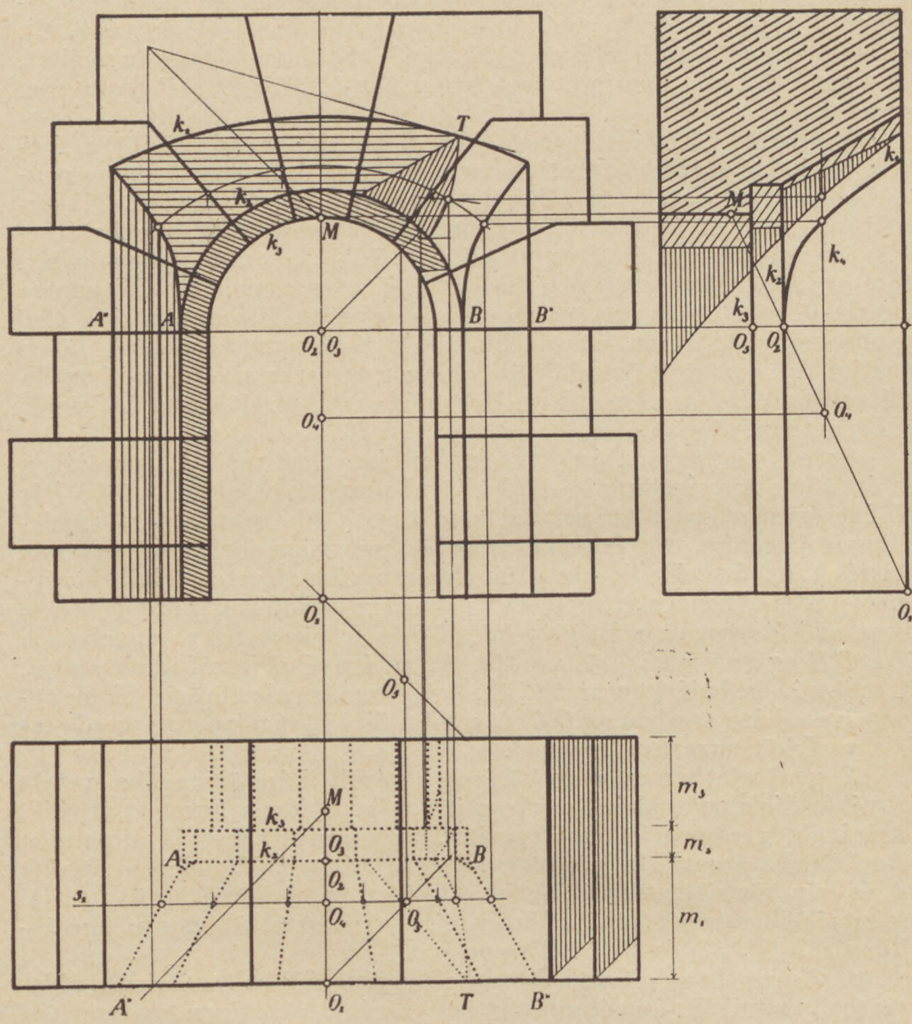
A bevetett árnyékellipszis A és B pontjában az érintőt a fentiek szerint nem szerkeszthetjük meg. Hogy az érintőket e fontos pontokban is nyerhessük, megállapítottuk az A, B, $C^\times$ pontok felhasználásával az árnyékellipszis síkjának első nyomvonalát, meghatároztuk a kúpfelület A és B pontbeli érintősíkjának első nyomvonalát, ahol az A ponthoz tartozó érintősík első nyomvonala az M' pontra illeszkedő és $O'A'$ egyenesre merőleges egyenes. Ha az érintősík első nyomvonalának és az árnyékellipszissík első nyomvonalának közös pontját az A ponttal összekötjük, akkor megszerkesztettük az árnyékellipszis érintőjét az A pontban. Hasonlóan szerkesztjük meg az érintőt a B pontban.

Az eddigi szerkesztések szerint az árnyékellipszis $C^\times$ pontjában az érintő az árnyékellipszis AB húrjával parallel, de akkor az AB húr H felezési pontjának $C^\times$ ponttal való összekötő egyenese az árnyékellipszis átmérője, vagyis az ellipszis középpontjára illeszkedő egyenes. Másrészt az árnyékellipszis a fényhenger síkmetszete, tehát középpontja a fényhenger tengelyére, a kúp vezérkörének középpontjára illeszkedő fénysugáron fekvő pont. Tehát a fényhenger tengelyének és a $C^\times H$ egyenesnek közös pontja, $O^\times$, az árnyékellipszis középpontja. A teljesség kedvéért megemlítjük, hogy az árnyékellipszis fél nagytengelye a jelen esetben az $O^\times C^\times$ távolság, fél kistengelye erre merőleges és a vezérkör sugarával egyenlő.

A gyakorlatban a vezérkörével határolt kúp önmagába vetett árnyékát főleg pontonként szerkesztjük meg. Ekkor a bevetett árnyékl határának egyes pontjait úgy nyerjük, hogy a vezérkör síkjával paralle síkon meghatározzuk a vezérkör árnyékát és megállapítjuk a felvett sík és kúp kör síkmetszetét. A felvett síkon nyert körök közös pontjai az árnyékellipszis pontjai. Az ábrában így szerkesztettük meg az árnyékellipszis 1 ($1'$, $1''$) és 2 ($2'$, $2''$) pontjait.

9. *Kúpos kapuboltozat.* Dongaboltozatok fiókboltozatainál, ablakok boltozatainál, falmélyedések boltozásánál stb. igen gyakran az intradosz felülete kúpfelület. Így a 120. ábrában orthogonális parallel projekcióban egy kapubejárót ábrázoltunk, mely részben kúpfelülettel van boltozva. A bejáró két képéhez csatoltuk ama síkkal való metszetét, mely sík a bejárónak szimmetria síkja. A kúpos boltozat homlokíve a k_1 kör, középpontja O_1 és végződik a fal síkjától m_1 távolságban fekvő síkon a k_2 körrel, melynek középpontja O_2. E két körrel meg van határozva a kúp csúcspontja is, ez az M pont illeszkedik az O_1O_2 egyenesre és az előbbi ívek legmagasabb pontjainak összekötő egyenesére. A kapubejáró további részében boltozva van két dongaboltozattal, az egyik

homlokíve a k_2 kör felső fele és hossza m_2. a másik homlokíve a k_3 kör felső fele és hossza m_3. A kapubejáró határoló felületeihez tartoznak még a kisebb dongaboltozat vállvonalaira illeszkedő profilsíkok. a nagyobb dongaboltozat vállvonalaira illeszkedő profilsíkok, a fal síkjától m_1+m_2 távolságban lévő sík egy része, végül az $AA^{\times}$ és $BB^{\times}$ horizontális egyenesekre illeszkedő első vetítősíkok, ahol A és B pontok a k_2



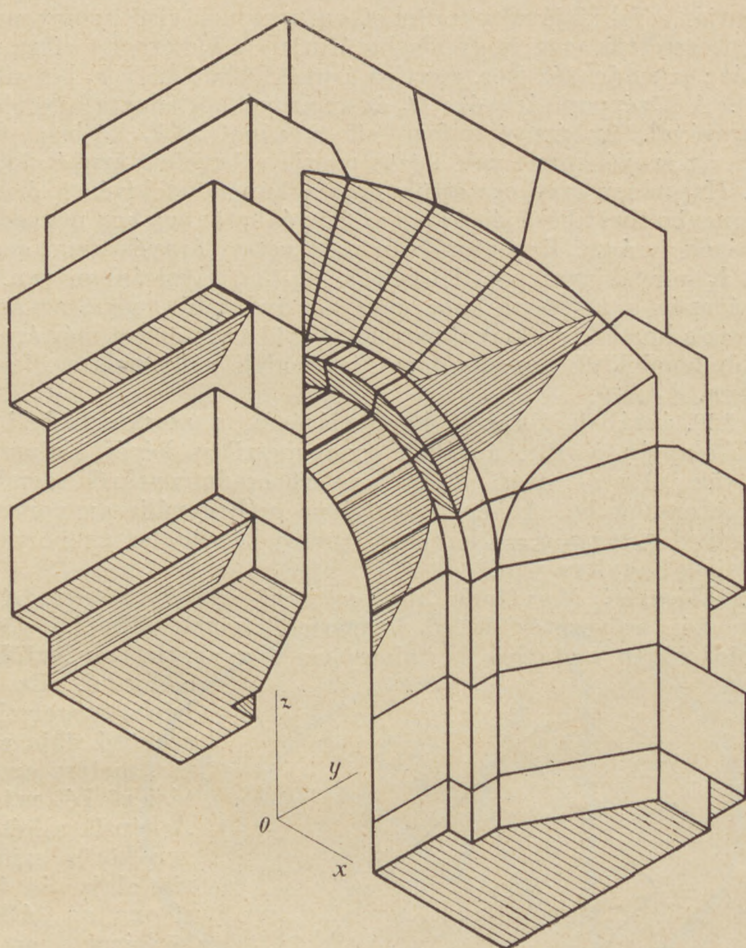
120. ábra.

homlokív vállpontjai és $A^{\times}$, $B^{\times}$ pontok a fal síkján a bejáró szimmetria síkjától egyenlő távolságban fekvő pontok.

Az $AA^{\times}$ és $BB^{\times}$ egyenesekre illeszkedő első vetítősíkok a kúpfelületet hyperbolákban metszik, melyeknek csak egy-egy ívdarabja érvényesül. Így az $AA^{\times}$ egyenesre illeszkedő első vetítősík által kimetszett hyperbola érvényesülő ívdarabja az A ponttal kezdődik és végződik az $A^{\times}$ ponton átmenő első vetítősugár és k_1 homlokív közös pontjával.

A hyperbolaív egy közbeeső pontját úgy szerkesztjük meg, hogy felveszünk a falsíkjával parallel síkot, melynek első nyomvonala pl. s_1. E sík az első vetítősíkot első vetítősugárban és a kúpfelületet a k_4 körben metszi, melynek középpontja O_4, a vetítősugár és k_4 kör közös pontja a hyperbolaív egy pontja.

A boltozat hézagfelületei második vetítősík, melyek a boltozó kúpfelületet a hézagvonalakban metszik, e hézagvonalak szintén hyper-



121. ábra.

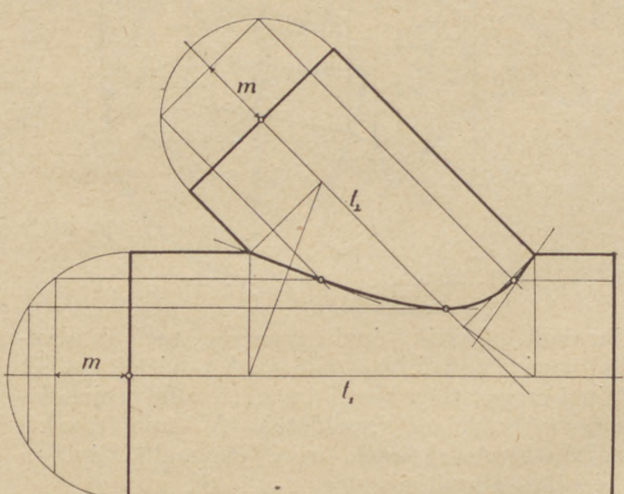
bolák ívdarabjai. Az ívdarabok második képei egyenesek, melyek alapján a fal síkjával parallel segédsíkok felhasználásával a hézagvonalak első képei és harmadik képei megszerkeszthetők, a harmadik projekcióban az összes hézagvonalak ábrázolását mellőztük. A kúpboltozatra nem eső összes hézagvonalak egyenesek, ezek első és harmadik képeit a hézagvonalak második képeiből állapítjuk meg.

A boltozó kúpfelületnek van önárnyékhatáralkotója, ennek nyompontját a k_1 kör síkján úgy szerkesztjük meg, hogy a kúp M csúcspontjára illeszkedő fénysugárnak és a k_1 kör síkjának közös pontjából a boltozat homlokívéhez érintőt rajzolunk, az érintő érintési pontja, T, az önárnyékhatáralkotó végpontja és MT maga az önárnyékhatáralkotó. A dongaboltozatok önárnyékhatáralkotóit úgy nyerjük, hogy azok homlokíveihez a második projekcióban megszerkesztjük a fénysugár második képével parallel érintők érintési pontjait, e pontokra illeszkedő dongaalkotók az önárnyékhatár alkotók.

A kúpboltozat homlokíve a kúp belsejébe vet árnyékot, melynek kiindulási pontja T. E bevetett árnyék ellipszisnek ívdarabja, az ívnek egy pontját a fal síkjával parallel síkon, melynek első nyomvonala s_1, úgy szerkesztettük meg, hogy meghatároztuk a k_1 körnek e síkra vetett árnyékát ; ez az árnyék kör, mert az árnyékfelfogó sík a k_1 kör síkjával parallel. A középpont árnyéka O_5 és az árnyékkör sugara egyenlő a k_1 kör sugarával. Az árnyékfelfogó sík a kúpot a k_4 körben metszi, melynek az árnyékkörrel való közös pontja a bevetett árnyék keresett pontja. Hasonlóan szerkesztettük meg a kúp homlokívének árnyékát a két dongaboltozat belsejébe, ahol az árnyékhatár egy-egy negyedrendű térgörbének ívrésze. Ezenkívül van még vetett árnyék azon a síkon, mely a k_1 kör síkjával parallel és tőle m_1+m_2 távolságban van. Ez a vetett árnyék a k_1 körrel kongruens kör ívdarabja, mert az árnyékfelfogó sík a homlokív síkjával parallel. Végül a k_1 kör vet még árnyékot a kisebb homlokívű dongaboltozat jobboldali vállvonalára illeszkedő profilsíkra.

A 120. ábrában ábrázolt kapubejárónak a szerkesztésbeli eredmények alapján a 121. ábrában axonometrikus képét alulnézetben készítettük el csak azért, hogy a nyert eredményekről szemléletes képet mutassunk be. A kép izometrikus orthogonális axonometrikus kép és mivel $q_x=q_y=q_z=1$ léptékek mellett készült, az axonometrikus kép némileg nagyítva van.

10. *Elágazási idomdarab talajban fekvő vezeték részére.* A 122. ábrában két csővezeték külső hengerfelületeinek áthatási görbéjét oly projekcióban mutatjuk be, ahogy az a gyakorlatban legtöbbször előfordul. Ez esetben a tengelyek összekötő síkja a képsík, melyre az áthatási görbét vetítjük. A képsík a két henger közös szimmetria síkja és így e síkon az áthatási görbének orthogonális vetülete duplaprojekció, vagyis kúpszelet, esetünkben hyperbola ívdarabja. Az áthatás képének kezdő- és végpontja a képkörrajzalkotók metszéspontjai. Az áthatás általános pontjának



122. ábra.

szerkesztésénél a henger felületek normálmetszeteit a képsíkba forgatjuk, akkor a képsíktól m távolságban fekvő segédsík által kimetszett hengeralkotók képei a leforgatott normálmetszetek alapján közvetlenül megrajzolhatók. Az alkotók képeinek metszéspontjai a duplaprojekció pontjai. Az áthatás egy-egy pontjában az érintőt ugyanúgy szerkesztjük meg, mint a 105. ábrában.

Forgási felületek.

73. §. A forgási felület származtatása és nevezetesebb felületi görbék. Forgási felület akkor származik, ha adott c térgörbét megadott t egyenes körül forgatunk, ahol t a forgási felület tengelye. *A forgatásnál az adott c térgörbe minden pontja kört, parallelkört, ír le.* Valamely pont által leírt parallelkör síkja a ponton átmenő és tengelyre merőleges sík, középpontja e sík és rengely metszéspontja, sugara a pont és tengely távolsága. A parallelkörökre illeszkedő összes pontok adják a forgási felület pontjait. Ha a forgási felület összes pontjait a t tengely körüli forgatjuk, akkor egy-egy pont pályagörbéje egy-egy parallelkör és mivel a tengely körüli forgatásnál a parallelkör önmagában eltolódik, mondhatjuk, hogy maga a forgási felület a tengelykörüli forgatásnál önmagában tolódik el, de ebből az is következik, hogy a forgási felület nemcsak az eredetileg megadott c térgörbe forgatásából származtatható, hanem minden oly felületi görbe forgatásából is, mely a felület összes parallel köreit metszi. Minden körülmények között a felület összes parallelköreit metszi ama felületi síkgörbe, melynek síkja a felület tengelyére illeszkedő sík. *A forgási felület tengelyén átmenő sík a felület meridiánsíkja, felület és meridiánsík síkmetszete a felület meridiángörbéje.* Az összes meridiángörbék egybevágók, mert a t tengelykörüli forgással bármelyik bármelyikkel födésbe hozható. Mivel a meridiángörbe oly felületi görbe, mely az összes parallel köröket valós pontokban metszi, a forgási felületet legtöbbször meridiángörbéjével és a meridiángörbe síkjában a felület tengelyével adjuk meg. Míg forgási felületnél az összes meridiángörbék kongruens síkgörbék, addig a felület parallelkörei általában különböznek egymástól. *Oly parallelkör, melynek sugara a környezetében lévő parallelkörök sugarai között a legkisebb, a felület torokköre és oly parallelkör, amely a környezetében lévő parallelkörök között a legnagyobb, a felület aequatorköre.* Ábrázolandó forgási felület nevezetesebb meridiángörbéjéről csak akkor beszélhetünk, ha a forgási felület tengelye képsíkkal parallel; ekkor és csakis ekkor illeszthető a tengelyre a képsíkkal parallel sík, ilyen síkban fekvő meridiángörbe a felület *főmeridiángörbéje.* Így orth. parallel projekcióban két képsíkon beszélhetünk első főmeridiángörbéről, ill. második főmeridiángörbéről. ha a felület tengelye az első, ill. a második képsíkkal parallel. De ha a felület tengelye mindkét képsíkkal szemben általános helyzetben van, akkor a felületnek nincs sem első, sem második főmeridiánja, ám lehet negyedik főmeridiánja, ha az új negyedik képsíkot a felület tengelyével parallel helyzetben vesszük fel. Főmeridiángörbe és tengely parallel képe azon a képsíkon, mellyel a tengely parallel, az eredeti főmeridián valódi alakját, továbbá a főmeridián és tengely valódi viszonylagos helyzetét mutatja.

Forgási felület parallel körei és meridiánjai a felületi görbék két rendszerét adják és itt hangsúlyozzuk, hogy a felület minden pontján átmegy a két rendszer egy-egy görbéje, egy parallelkör és egy meridiángörbe.

74. **§. Forgási felület érintősíkja.** Forgási felület tetszőleges P pontjában az érintősík a ponton átmenő két felületi görbe P pontjához tartozó érintőinek összekötő síkja. Mivel minden ponton átmegy egy parallelkör és egy meridiángörbe, az érintősík szerkesztéséhez szükséges érintők közül az egyik a parallelkör, a másik a meridiángörbe érintője. A parallelkör érintője az érintési ponton átmenő meridiánsíkra merőleges, mert a meridiánsík két egyenesével derékszöget alkot, az egyik egyenes a felület tengelye, a másik egyenes a parallelkör érintési pontjához tartozó körsugár. E szerint a forgási felület minden érintősíkja az érintési ponton átmenő meridiánsíkra merőleges és nyomvonala a meridiánsíkon a meridiángörbe érintője az érintési pontban. Ebből következik, hogy *egy kiválasztott meridiángörbe összes pontjaihoz tartozó érintősíkok egyenes hengerfelület érintősíkjai, melynek vezérgörbéje a felvett meridiángörbe. A nyert hengerről azt mondjuk, hogy a forgási felületet meridiángörbe mentén érinti, röviden meridián-érintő-henger.*

Ha forgási felület valamely pontját a tengely körül tetszőleges szöggel elforgatjuk, akkor a ponthoz tartozó parallelkörérintő az elforgatott pont parallelkörérintőjébe és a ponthoz tartozó meridiángörbeérintő az elforgatott pont meridiángörbeérintőjébe megy át, de akkor az elforgatott pontban a felületi érintősík az eredeti érintősík elforgatottja. E szerint valamely *parallelkör pontjaihoz tartozó felületi érintősíkok forgási kúpfelület érintősíkjai, melynek tengelye a forgási felület tengelye, vezérköre a parallelkör, csúcspontja a tengely és meridiángörbeérintő metszéspontja. E kúp a forgási felületet parallelkör mentén érinti, ez a forgási felület parallelkör-érintő-kúpja.* A torokkörre, az aequatorkörre illeszkedő pontban a meridiángörbe érintője a forgási felület tengelyével parallel egyenes, tehát ilyen pontban a felület érintősíkja a tengellyel parallel sík. A parallelkörérintő-kúp a torokkör és az aequatorkör mentén forgási henger, parallelkör-érintő-henger, melynek tengelye a felület tengelye, vezérköre a torokkör, ill. az aequatorkör.

A forgási felület tengelyének és a meridiángörbének vannak valós vagy képzetes metszéspontjai. Ha tengely és meridiángörbe valós metszéspontjában a meridiángörbe érintője közönséges érintő és e pontban az érintő *a)* a tengelyre merőleges, akkor e pontban a felület érintősíkja a tengelyre merőleges, *b)* a tengelyre nem merőleges, akkor az érintő forgásából nyert kúpfelület minden érintősíkja a forgási felületnek is érintősíkja, tengely és meridiángörbe közös pontja a forgási felület szinguláris pontja, kónikus pontja.

Vegyünk fel a forgási felület adott meridiángörbéjén oly pontot, melyben a meridiángörbe a tengellyel szemben konvex. E ponthoz tartozó érintősíkot megszerkesztve azt látjuk, hogy a meridiángörbén az érintési pont környezetéhez tartozó pontok és a parallelkörön az érintési pont környezetéhez tartozó pontok az érintősík két különböző oldalán vannak. Tehát a forgási felület és érintősík síkmetszetében az érintési pont oly duplapont, melyben a síkmetszetnek valós érintői vannak, a pont a felületnek hyperbolikus pontja. Ha pedig az érintősík érintési pontját a meridiángörbe oly helyén vesszük fel, ahol a forgási felület tengelyével szemben konkáv, akkor az érintősík az érintési pont környezetében nem metszi a felületet, az érintési pont érintősík és felület síkmetszetében remetepont, az érintési pont a felületnek elliptikus pontja. Ha pedig a meridiángörbének egy pontjában az érintő inflexiós érintő, vagy ha van oly a tengelyre nem illeszkedő pontja, melyben az érintő a tengelyre merőleges, akkor e pontok a felület parabolikus pontjai és e parabolikus pontok által leírt parallelkörökre illeszkedő pontok kimerítik a felület parabolikus pontjait ; még megjegyezzük, hogy a felület parabolikus pontjai elválasztják a felület hyperbolikus pontjait a felület elliptikus pontjaitól. Torokkör minden pontja a felület hyperbolikus, aequatorkör minden pontja a felület elliptikus pontja.

A forgási felület meridiángörbéjének vannak valós vagy képzetes asymptotái. Ha a meridiángörbe valós asymptotáját a forgási felület tengelye körül forgatjuk, akkor nyerjük a felület egy asymptotikus kúpját. Az asymptotikus kúp érintősíkja a forgási felületet a végtelenben érinti, az érintési pont az érintési kúpalkotó végtelenben fekvő pontja.

Parallelkör P pontjában a felületi normális a parallelkör érintőkúpnak is normálisa, de forgási kúp vezérkörének pontjaira illeszkedő normálisok a kúp tengelyét egy és ugyanazon pontban metszik, amiből következik, hogy forgási felület összes normálisai a felület tengelyére illeszkedő egyenesek, továbbá egy parallelkör pontjaihoz tartozó felületi normálisok forgási kúpnak alkotói, melynek tengelye a forgási felület tengelye, vezérköre a felvett parallelkör, csúcspontja egy megszerkesztett normális és tengely metszéspontja.

75. §. Forgási felület rendszáma. Algebrai görbe forgásából származtatott felület algebrai, míg transzcendens görbe forgásából nyert felület transzcendens forgási felület. Legyen a forgási felület előállítva n-edrendő algebrai térgörbe forgásából, ekkor a felület rendszámának meghatározása végett felvesszük valamely meridiánsíkban tetszőlegesen a g egyenest és megállapítjuk az egyenes és felület közös pontjainak számát. Felület és egyenes egy közös pontja által leírt parallelkör a forgási felületnek és ama forgási kúpnak is parallelköre, melyet azáltal nyerünk, hogy az egyenest a forgási felület tengelye körül forgatunk. Tehát egyenes és forgási felület közös pontjainak száma egyenlő a forgási felület és kúp közös parallelköreinek számával. A két felület egy-egy közös parallelköre az adott n-edrendű térgörbe egy-egy pontja által leírt parallelkör, melyben a térgörbe a g egyenes forgásából keletkezett forgási kúpot metszi. De n-edrendű térgörbe a másodrendű forgási kúpot $2n$ pontban metszi, tehát az algebrai forgási felület rendszáma $N=2n$. Így egyenes forgásából származtatott forgási felület másodrendű felület akkor is, ha az egyenes a tengellyel szemben kitérő helyzetű. Kúpszelet forgásából nyert felület negyedrendű stb. A $2n$-edrendű forgási felület meridiángörbéje $2n$-edrendű síkgörbe, mely mindig két orthogonális szimmetriában lévő részből áll, a szimmetria tengelye a forgási felület tengelye. (Hiba volna azt gondolni, hogy a szimmetrikus részekből álló $2n$-edrendő síkgörbe egyik része n-edrendű, ez csak lehetséges, de nem mindig következik be.) E szerint, ha szimmetria tengellyel rendelkező $2n$-odrendő síkgörbét a szimmetria tengely körül forgatunk, $2n$-edrendű forgási felületet nyerünk. Vagyis k-adrendű síkgörbének akár a síkjának, akár a térnek tetszőleges egyenes körüli forgatásától nyert forgási felület rendszáma $2k$; ha síkjának tetszőleges egyenese körül forgatjuk, akkor a teljes meridiángörbe két k-ad-rendű síkgörbére széteső görbe. De ha a k-adrendű síkgörbét szimmetria tengelye körül vagy oly sík tetszőleges egyenese körül forgatjuk, mely sík a síkgörbének szimmetria síkja, akkor a forgási felület rendszáma is k, mert ekkor a felület minden pontját a görbének 360°-kal való elforgatásával kétszer kapjuk. Így, ha ellipszist nagytengelye körül, vagy a tengelyen átmenő és a kistengelyre merőleges síkra illeszkedő tetszőleges egyenes körül forgatunk, mindenkor másodrendű forgási felületet nyerünk.

A gömb.

76. **§. A gömb származtatása, a gömb síkmetszetei, a gömb érintősíkjai.** Gömbfelületet legegyszerűbben oly módon származtatunk, hogy kört egyik átmérője körül forgatunk. Mivel ekkor másodrendű algebrai görbét szimmetria tengelye körül forgatunk, a nyert felület másodrendű felület. A kör sugarai egyenlők és egyenlők maradnak akkor is, ha a felületet tengelye körül forgatjuk, tehát a gömbfelületi pontok a forgatott kör középpontjától, vagyis a gömb középpontjától egyenlő távolságban vannak. Gömbfelületi ponttal és a gömb középpontjával határolt véges távolság a gömb sugara, r.

Mivel a gömbfelületi pontok a középponttól egyenlő távolságban vannak, a gömb térbeli meghatározása teljes, ha ismerjük középpontját és sugarát, ez egyúttal azt is mondja, hogy a gömb középpontjára illeszkedő minden egyenes lehet a gömb forgási tengelye, tehát a gömb oly forgási felület, melynek kétszeresen végtelen sok tengelye van.

A gömb középpontjára illeszkedő minden sík a gömbfelületet a gömb sugarával egyenlő sugarú körben metszi, ilyen kör a gömb egy legnagyobb gömbi köre.

Gömbfelület P pontjában az érintősík szerkesztésénél az érintési ponton átmenő két felületi görbét úgy választjuk, hogy a felületi görbék legnagyobb gömbi körök legyenek, akkor a gömbnek P pontjához tartozó sugara a két legnagyobb gömbi kör egyik közös sugara, de akkor a legnagyobb gömbi körök P ponthoz tartozó érintői oly síkot határoznak meg, mely a P ponthoz tartozó gömbi sugárra merőleges. E szerint a gömb minden érintősíkja az érintési pontra illeszkedő gömbi sugárra merőleges.

Gömbnek tetszőleges síkkal való síkmetszete gömbi kiskör; a kiskör középpontja a metszősík és a gömb középpontján átmenő, metszősíkra merőleges egyenes metszéspontja, sugara oly derékszögű háromszög egyik befogója, melynek másik befogója a gömb középpontjának a metszősíktól való távolsága, átfogója a gömb sugara. Ebből következik, hogy minél közelebb vesszük a metszősíkot a gömb középpontjához, annál nagyobb a kimetszett gömbi kiskör sugara.

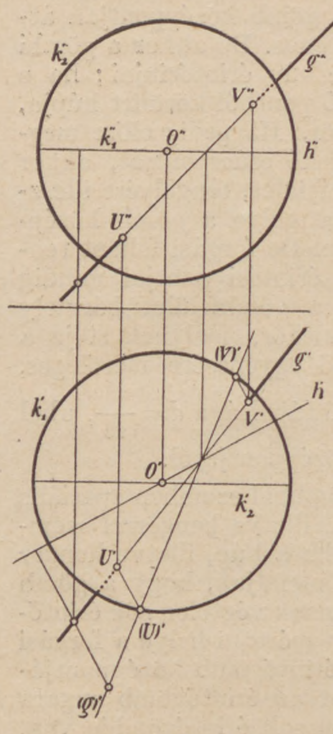
A gömb tetszőleges legnagyobb köre aequatorkörnek tekinthető, csak a forgási felület tengelyét úgy kell megválasztanunk, hogy a gömb középpontjára illeszkedően a felvett legnagyobb gömbi kör síkjára merőleges legyen. Aequatorkör összes pontjaihoz tartozó érintősíkok forgási hengerfelület érintősíkjai, melynek tengelye a felület tengelye és vezérköre az aequatorkör. E szerint minden legnagyobb gömbi kör a gömbfelület egy-egy körülírt hengerének érintési görbéja. Ha pedig keressük a gömbfelület l egyenessel parallel körülírt hengerének érintési görbéjét, akkor az előzők alapján mondhatjuk, hogy az érintési görbe a gömb ama legnagyobb köre, melynek síkja az adott l egyenesre merőleges.

Gömb minden kisköre parallelkörnek tekinthető, ekkor a gömbfelületnek, mint forgási felületnek tengelye a gömb középpontján átmenő és a gömbi kiskör síkjára merőleges egyenes. De akkor a gömbi kiskör pontjaihoz tartozó érintősíkok forgási kúp érintősíkjai; ha e kúp csúcspontja L, akkor a kúp a gömbnek L pontból körülírt kúpja, melynek érintési görbéje a felvett gömbi kiskör. Ha pedig előre megadjuk tetszőlegesen a gömb körülírt kúpjának L csúcspontját, akkor e pont mindenkor a gömbfelület, mint forgási felület, tengelyére illeszkedő pontnak tekinthető, a forgási felület tengelye a gömb középpontjának és az L pontnak összekötő egyenese. De forgási felület tengelyének egy pontjára illeszkedő érintősíkok érintési pontjai mindig megszerkeszthető parallelkör pontjai, s így a gömbfelület bármely körülírt kúpjának érintési görbéje gömbi kiskör, melynek síkja a csúcspont és gömb középpontjának összekötő egyenesére merőleges, továbbá síkjának a gömb középpontjától való távolsága $d=\frac{r^2}{m}$, ahol m a kúp csúcspontjának távolsága a gömb középpontjától.

Gömb körülírt kúpja, illetve hengere a gömbbel szemben speciális vonatkozásban van, de megfordítva a kúppal, illetve hengerrel szemben a gömb is speciális vonatkozásban van; ha a kúp, illetve henger a gömb köré írt forgási felületek, ekkor azt mondjuk, hogy a gömb a kúp, illetve henger érintőgömbje. Forgási kúpnak végtelen sok érintőgömbje van, az érintőgömbök középpontjainak mértani helye a forgási kúp tengelye és ha a kúp félnyílása φ és az érintőgömb középpontjának távolsága a kúp csúcspontjától m, akkor az érintőgömb sugara $r=m\sin\varphi$. Forgási hengernek szintén végtelen sok érintőgömbje van, e gömbök középpontjainak mérteni helye a forgási hengerfelület tengelye és sugara mindenkor a henger vezérkörének sugarával egyenlő.

77. §. A gömbfelület konstruktív kezelése orth. parallel projekcióban két képsíkon. a) *A gömb körrajzai és képkörrajzai.* Gömb első körrajza a gömbfelület ama pontjainak összessége, mely pontokhoz tartozó érintősíkok első vetítősíkok. Minden első vetítősík első vetítősugárral parallel sík, s így a gömb első kontúrjának minden pontjában az érintősík első vetítősugárral parallel sík. De gömbnek adott egyenessel parallel érintősíkjai a gömböt legnagyobb gömbi kör pontjaiban érintik, melynek síkja az adott egyenesre merőleges. Ebből következik, hogy gömb első kontúrgörbéje az első képsíkkal parallel helyzetű legnagyobb gömbi kör. Mivel az első képkörrajz az első körrajzgörbének első képe, a gömb első képkörrajza, ha r a gömb sugara, oly r sugarú k_1 kör, melynek középpontja a gömb középpontjának első képe. Ugyanúgy a gömb második konturgörbéje ama legnagyobb k_2 gömbi kör, melynek síkja a második képsíkkal parallel, és második képkörrajza a gömb középpontjának második képe körül rajzolt r sugarú kör. Az első és másodkí kontúrgörbe térbeli helyzetéből következik, hogy az első kontúr második képe a gömb középpontjának második képére, és a második kontúr első képe a gömb középpontjának első képére illeszkedő $x_{1,2}$ tengellyel parallel egyenes (123. ábra).

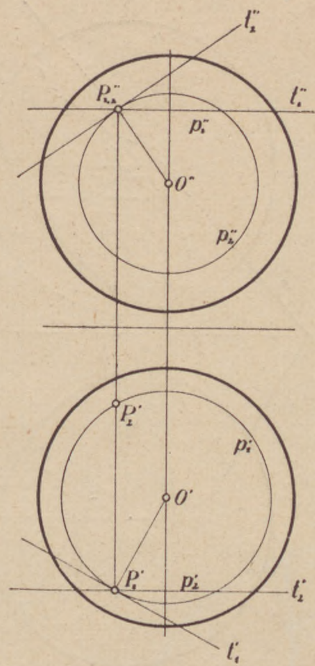
b) *Gömbfelület és egyenes közös pontjai.* Egyenes és gömbfelület közös pontjait úgy szerkesztjük meg, hogy megállapítjuk az egyenesre illeszkedő tetszőleges síknak és gömbfelületnek síkmetszetét, az egyenes és síkmetszet közös pontjai a keresett pontok. Amennyiben az egyenes a két képsíkkal szemben általános helyzetű, az egyenesre illeszkedő tetszőleges síkot a gömb középpontján átmenően vesszük fel. E sík a gömböt legnagyobb gömbi körben metszi, melynek az egyenessel való metszéspontjait úgy állapítjuk meg, hogy a síkot a benne lévő legnagyobb gömbi körrel és egyenessel együtt a gömb középpontjára illeszkedő első fővonala körül az első képsíkkal parallel helyzetű síkba, az első körrajz síkjába forgatjuk, de akkor a leforgatott kör képe azonos a gömb első képkörrajzával. Tehát, ahol a leforgatott egyenes képe metszi a gömb első képkörrajzát, ott nyerjük a leforgatott metszéspontok első képeit, a nyert pontok visszaállításával megszerkesztettük a metszéspontokat (123. ábra).



123. ábra.

A g egyenes és gömbfelület ábrázolásánál láthatósági viszonyokat is tüntettünk fel; ekkor az egyenesnek a gömb belsejében lévő részét egyáltalában nem rajzoljuk, míg az egyenesnek a gömbfelület által eltakart egyéb részeit pontozva rajzoljuk.

c) *Gömbfelületi pont és érintősík szerkesztése.* Felületen fekvő pontot felületen fekvő görbe segítségével veszünk fel. Legyen képkörrajzaival ábrázolt gömbfelület egy pontjának második képe P'' (124. ábra). Második képével adott ponttal tulajdonképpen második vetítősugarat adtunk meg, melynek a gömbfelülettel való metszéspontját kell megszerkeszteni. A metszéspontok meghatározásánál a gömböt forgási felületnek tekintjük, melynek tengelye az első képsíkra merőleges, s így minden tengelyre merőleges síkmetszete parallelkör, melynek síkja az első képsíkkal parallel. A gömbfelület és egyenes közös pontjainak megállapítására az egyenesre illeszkedő tetszőleges síkot veszünk fel; de ha, mint a jelen esetben, az egyenes második vetítősugár és a felület az első képsíkra merőleges tengelyű forgási felület, akkor az egyenesre illeszkedő első képsíkkal parallel segédsíkot veszünk fel. A segédsík a gömböt parallelkörben metszi, melynek második képe és a megrajzolt második képe alapján első képe közvetlenül megrajzolható. A vetítősugár első képének és a parallelkör első képének metszéspontjai a második képével adott gömbfelületi pontnak első képei. Tehát a második képével adott felületi pont nem egy pontnak, hanem két födésben lévő pontnak második képe.



124. ábra.

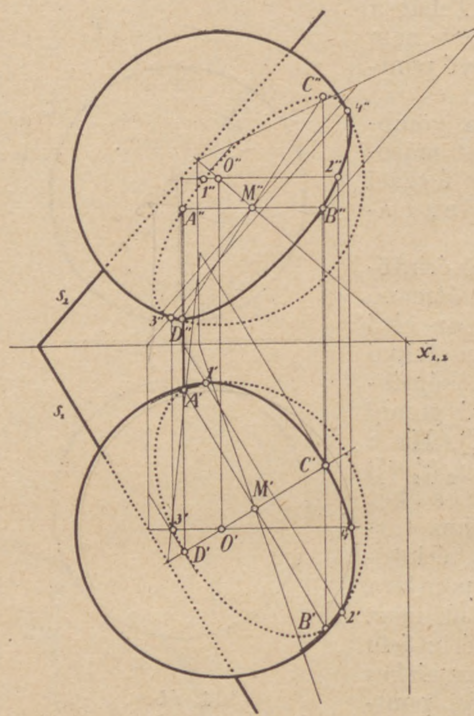
Hasonlóan szerkesztjük meg a gömbfelületi pontnak első képéből a pont második képét, de ekkor a gömböt oly forgási felületnek tekintjük, melynek tengelye a második képsíkra merőleges.

Gömbfelület P_1 ponthoz tartozó érintősíkjának szerkesztésénél a ponton átmenő két felületi görbe közül az egyik az első képsíkkal parallel helyzetű síkban fekvő gömbi kiskör, a másik a második képsíkkal parallel helyzetű síkban fekvő gömbi kiskör p_1 (p_1', p_1''), illetve p_2 (p_2', p_2''). Ha e körökhöz a P_1 pontbeli t (t_1', t_1''), ill. t_2 (t_2', t_2'') érintőket meghatározzuk, akkor a két érintő összekötő síkja a P_1 ponthoz tartozó érintősík. Jelen esetben az érintősíkot az érintősíknak az érintési pontjára illeszkedő két fővonalával állapítottuk meg. Még megjegyezzük, hogy az érintősík nyujtott szerkesztése újból meggyőzhet arról, hogy az érintősík az érintési ponthoz tartozó gömbi sugárra merőleges.

d) *Gömbfelület síkmetszetének szerkesztése.* Legyen a gömb középpontja O (O', O'') és sugara az adott r távolság, a metsző sík **S** pedig nyomvonalaival adott sík (125. ábra). A sík által kimetszett gömbi kiskör középpontja a gömb középpontjából a síkra bocsátott merőleges talppontja M (M', M''). A síkmetszet első képe ellipszis, melynek nagytengelye az M pontra illeszkedő első fővonal első képén van. A nagytengely végpontjai, A' és B' pontok az M' ponttól a gömbi kiskör sugarával egyenlő távolságban fekvő pontok. E pontok szerkesztését tehát úgy végezhetjük, hogy megszerkesztjük azt a derékszögű háromszöget, melynek egyik befogója az $\overline{OM}$ távolság valódi nagysága és átfogója az r távolság, e háromszög másik befogója a kiskör sugara. De egyszerűbben nyerhetjük a pontokat úgy, hogy megszerkesztjük az M pontra illeszkedő első fővonalnak a gömbfelülettel való metszéspontjait; ezeket a fővonal és ama kiskör közös pontjaként kapjuk, mely kiskörben a fővonalon átmenő és első képsíkkal parallel sík a gömbfelületet metszi. Ekkor $\overline{M'A'}$ egyúttal a keresett metszet sugara.

Mivel az ábrázolandó kiskör sugarát ismerjük, az első projekcióban a kistengely végpontjait úgy szerkesztjük meg, hogy az M ponton átmenő esésvonalra az M ponttól számítva felmérjük a kiskör sugarát. Ezt a részletet rajzunkban úgy intéztük el, hogy az esésvonalat első képe körül az első képsíkba forgattuk, a kistengely végpontjai C' és D'.

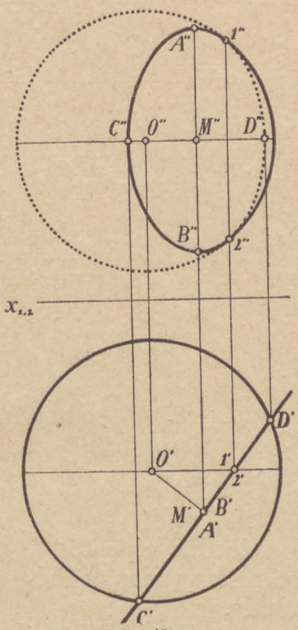
A kiskör első képének szerkesztésénél még lényeges pontok az ellipszisnek a gömb első képkörrajzára eső pontjai. E pontok ama pontok első képei, melyekben a kiskör és a gömb első konturgörbéje metszik egymást. A meghatározandó két metszéspont mindenesetre azon az egyenesen van, melyben a kiskör síkja az első kontúrgörbe síkját metszi. A két sík közös egyenese, mivel az első kontúrgörbe síkja az O pontra illeszkedő első képsíkkal parallel sík, a kiskör síkját abban az első fővonalban metszi, melynek második képe O'' pontra illeszkedő egyenes. A nyert fővonal első képének és a gömb első képkörrajzának közös pontjai $1'$ és $2'$ a keresett pontok első képei. A szerkesztett pontban a kiskör első képe és az első képkörrajz mindig érinti egymást. T. i. e pontban a kiskör érintője és az első kontúr érintője egymástól különböző felületi érintők, melyeknek összekötő síkja a megállapított pontban a gömbfelület érintősíkja. Mivel az érintősík érintési pontja a gömbfelület első kontúrjára eső pont, e pontban az érintősík első vetítősík, de akkor a két érintőnek első képe az érintő vetítősík első nyomvonala. Tehát kiskör és első kontúrkör közös pontjához tartozó érintők első képei azonos egyenesek.



125. ábra.

Gömbfelület első kontúrgörbéje a gömb látható és nem látható pontjainak elválasztó görbéje az első képsíkra nézve. Ha tehát síkmetszet ábrázolásában láthatósági viszonyokat is kívánunk feltüntetni, akkor a síkmetszetnek a kontúrgörbére eső pontjai az első képben a síkmetszet első képében a látható és nem látható rész elválasztó pontjai. Hogy e részek közül melyik látható, melyik nem látható, azt a síkmetszet második képe alapján döntjük el. Miután megállapítottuk az A, B, C, D pontok második képeit, látjuk, hogy a C pont a gömb felső féltekéjének pontja, s így a kiskör első képében az ellipszis ama része látható, melyre a C pont első képe illeszkedik. A második kép láthatósági viszonyainak feltüntetéséhez megszerkesztettük még a kisökr és második kontúrkör közös pontjait, ezek második képei $3''$ és $4''$.

e) *Gömbfelület síkmetszete első vetítősíkkal.* Adott gömb és első vetítősík síkmetszetének első képe a sík nyomvonalának ama véges része, melyet rajta a gömb első képkörrajza meghatároz (126. ábra). Ha a gömbi kiskör a gömb első kontúrgörbéjét C és D pontokban metszi, akkor az előbbi véges rész határpontjai e pontok első képei, C' és D', ugyanakkor a $\overline{C'D'}$ távolság a gömbi kiskör egy átmérője valódi nagyságban. A C és D pontok második képei az első kontúrkör második képére illeszkedő pontok, a meghatározott C'' és D'' pontok a kiskör második képeként mutatkozó ellipszis csúcspontjai, mert a síkmetszet e pontjaihoz tartozó érintők parallel egyenesek és az érintési pontok összekötő egyenese az érintőkre merőleges. T. i. C és D pontokban a kiskör érintői első vetítősugarak, mert az érintők mindegyike illeszkedik a metsző első vetítősíkra és a C, illetve D ponthoz tartozó felületi érintősíkra, melyek szintén első vetítősíkok, hiszen C és D pontok az első kontúrra illeszkedő pontok. A kiskör második képében a nagytengely, a nagytengely végpontjainak és a második képkörrajzra illeszkedő pontoknak a szerkesztése az ábrából közvetlenül leolvasható.

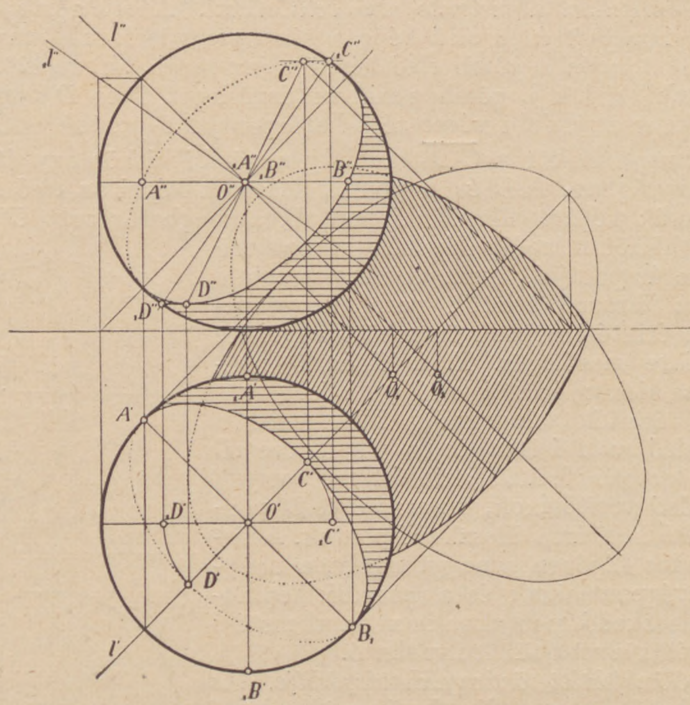


126. ábra.

f) *Gömbfelület önárnyékhatárgörbéje.* Az önárnyékhatárgörbe a fényforrásra illeszkedő érintősíkok érintési pontjainak összessége. E szerint gömbfelületnél az önárnyékhatárgörbe végesben fekvő fényforrás mellett meghatározott gömbi kiskör, végtelenben fekvő fényforrás mellett legnagyobb gömbi kör, melynek síkja az adott fénysugárra merőleges.

Adott gömbnek önárnyékhatárgörbéjét adott parallel világítás mellett úgy szerkesztjük meg, hogy a gömböt forgási felületnek tekintjük, melynek tengelye az első képsíkra merőleges (127. ábra). A gömfelületet és a fénysugarat a gömb középpontjára illeszkedő első tengely körül addig forgatjuk, míg a fénysugár a második képsíkkal parallel helyzetbe jut. A fénysugárnak e helyzete mellett a gömb önárnyékhatárgörbéjének síkja második vetítősík, melynek második nyomvonala a gömb középpontjának második képén átmenő és az elforgatott fénysugár második képére merőleges egyenes. E sík és gömbfelület metszete az önárnykhatárgörbe elforgatottja, ha ezt visszaforgatjuk avval a szöggel, mellyel eredetileg a fénysugarat elforgattuk, akkor megszerkesztettük az önárnyékhatárgörbét. Az ábrát kiegészítettük még a gömbfelületnek az első és második képsíkra vetett árnyékával. Az első képsíkra vetett árnyék határa a gömb köré írt érintő fényhenger nyomgörbéje az első képsíkon. Ha az önárnyékhatárgörbe első képében megszerkesztettük a nagytengelyt és kistengelyt, akkor e pontok térbeli megfelelőin vezetett fénysugarak első nyompontjai a fényhenger nyomgörbéjének tengelyvégpontjai.

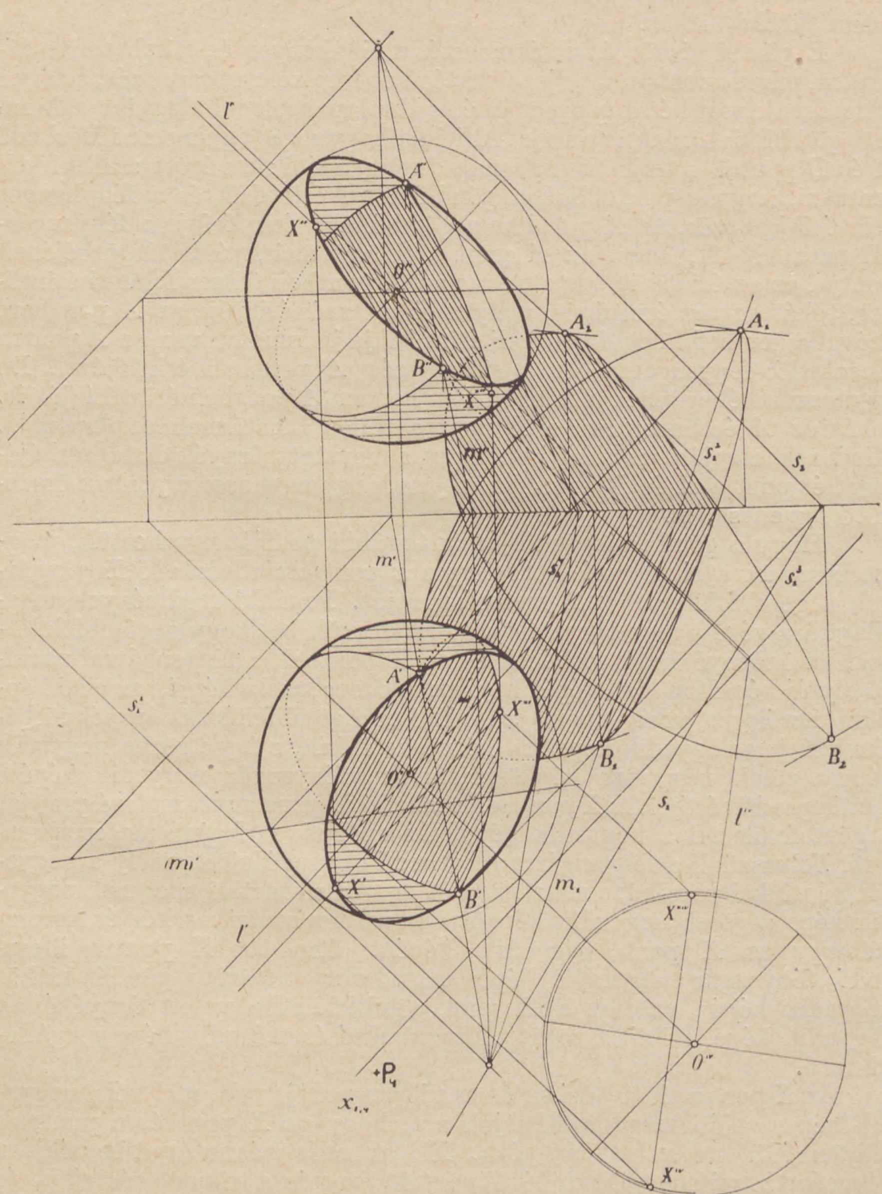
Még megjegyezzük, hogy gömb önárnyékhatárgörbéjének első



127. ábra.

és második képe 45°-os parallel világítás mellett kongruensek és ugyancsak kongruens görbék az első és második képsíkra vetett árnyékhatárok is.

g) *Gömbfelület síkmetszésének önmagába vetett árnyéka.* Adva van egy gömb középpontja $O\,(O', O'')$, sugara r és az $\mathbf{S}$ (s_1, s_1) metszősík. Ábrázoltassék a gömbfelület és a sík metszésének két képe, továbbá a gömbnek saját-, a képsíkokra és önmagába ejtett árnyéka 45°-os parallel világítás mellett, ha a metszősíkot és a sík által elmetszett kisebb gömbsüveget eltávolítva gondoljuk (128. ábra). Mivel az előző feladatokban gömbfelület síkmetszetének és saját árnyékának szerkesztését elintéztük, itt csak a gömb önmagába vetett árnyékát kell tárgyalnunk. Ha a gömb önárnyékhatárának síkja $\mathbf{S}_1$ (s_1^1, s_2^1), akkor e sík és síkmetszés síkjának közös m (m', m'') egyenesén vannak az önárnyékhatárgörbe és a síkmetszésnek közös pontjai $A\,(A', A'')$ és $B\,(B', B'')$. E pontokat úgy szerkesztettük meg, hogy az m egyenest az önárnyékhatárgörbe síkjának O pontra illeszkedő első fővonala körül az első képsíkkal parallel helyzetű síkba forgattuk ; mivel ekkor az önárnyékhatárgörbe leforgatottja a gömb első kontúrgörbéjével azonos, a leforgatásban az egyenes és első kontúr közös pontjai a leforgatott A és B pontok képei. Az A és B pontok a gömb síkmetszetét két részre bontják, az egyik rész a gömbfelület megvilágított részén, a másik rész a gömb külső felületének önárnyékos részén van. Az első részre illeszkedő pontokon átmenő fénysugarak a megmaradt gömbfelületet még egyszer metszik és a fénysugarak metszéspontjainak mértani helye a tulajdonképpeni bevetett árnyék árnyékhatára. A síkmetszet másik részére illeszkedő pontokon átmenő fénysugarak az eltávolított gömbsüveget metszenék másodszor, s így feladatunkban e pontok lényeges szerepet nem játszanak.



128. ábra.

A bevetett árnyék határgörbéje a gömbfelületnek és fényhengernek áthatási görbéje. A fényhenger vezérgörbéje a síkmetszés, alkotói a fénysugárral parallel egyenesek, e szerint a fényhenger ferde körhenger. A gömb és a fényhenger másodrendű felületek, tehát az áthatási görbe negyedrendű térgörbe. De az áthatásnak egyik része maga a síkmetszés, ez másodrendű, s így a bevetett árnyék határgörbéje is másodrendű, még pedig kör, mert gömbfelületen fekvő másodrendű görbe vonal csak kör lehet. Tehát a bevetett árnyék határgörbéje általában gömbi kiskör.

E gömbi kiskör és a síkmetszés a fényhenger és gömb teljes áthatása, mivel azonban a teljes áthatás két kúpszeletre esik szét, a teljes áthatásnak van két duplapontja és e duplapontok mindegyike a keresett gömbi kiskörnek is pontja. Állítjuk, hogy az m egyenesre illeszkedő A és B pontok a teljes áthatásnak duplapontjai ; e végett csak ki kell mutatni, hogy e pontokban a gömbfelületi érintősík és a fényhenger érintősíkja közös. Az A pontban a gömbfelület érintősíkja a fénysugárral parallel sík, mert az A pont a felület önárnyékhatárgörbéjének pontja, ez az érintősík tartalmazza az A pontbeli összes felületi érintőket, tehát azt az érintőt is, mely a síkmetszés érintője az A pontban. Szóval a gömbefelület A pontbeli érintősíkja jellemezve van az A pontra illeszkedő fénysugárral és a síkmetszés A pontbeli érintőjével. De ugyanezen két egyenes jellemzi a fényhenger A pontbeli érintősíkját is, tehát az A és hasonlóan a B pont a teljes áthatásnak duplapontja. Mindezek alapján mondhatjuk, hogy a bevetett árnyék határgörbéjének két pontja A és B, továbbá síkjának egy egyenese e pontok összekötő egyenese, m.

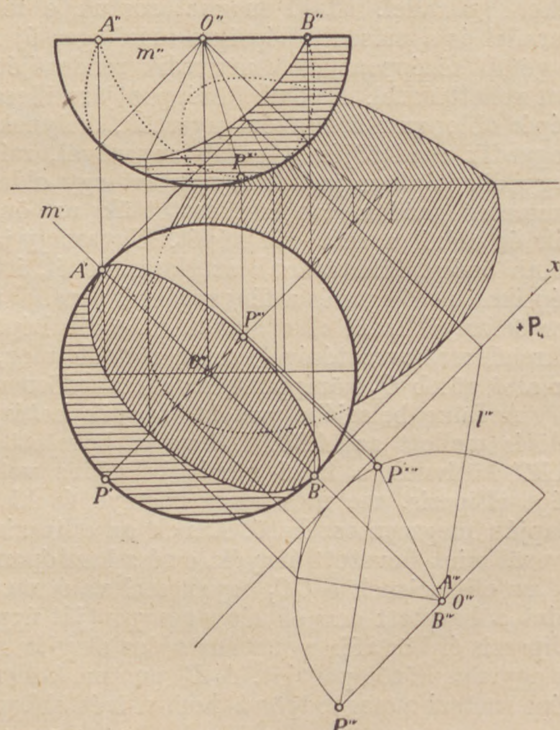
Hogy a gömbi kiskör síkjának további pontját nyerhessük, megszerkesztjük a síkmetszés tetszőleges x pontjára illeszkedő fénysugárnak a gömbfelülettel való metszéspontját. További eredmények megállapítása végett a szerkesztést úgy rendezzük be, hogy a gömbfelületnek, az önárnyékhatárgörbének és az X pontnak a fénysugárral parallel oly új képsíkon lévő képét határozzuk meg, mely képsík az első képsíkra merőleges, az új tengely $x_{1,4}$. Ekkor a gömbfelület önárnyékgörbéjének síkja a negyedik képsíkra nézve vetítősík, s így a görbe negyedik képe a gömb negyedik képkörrajzának a fénysugár negyedik képére merőleges átmérője. Az X pontra illeszkedő fénysugárnak metszéspontját a gömbfelülettel a negyedik kép felhasználásával fogjuk megszerkeszteni. Felveszünk a fénysugárra illeszkedő oly segédsíkot, mely a negyedik képsíkkal parallel, e sík a gömböt kiskörben metszi, melynek negyedik képe a gömb negyedik képkörrajzával koncentrikus kör és keresztülmegy az X pont negyedik képén. Ahol az X pontra illeszkedő fénysugár negyedik képe másodszor metszi a gömbi kiskör negyedik képét, az lesz a X pont gömbfelületbe vetett árnyékának negyedik képe, miből a nyert $X^{\times}$ pont első és második képe megállapítható.

Az X pont a síkmetszésnek tetszőleges pontja volt, melyről a negyedik kép alapján megállapíthatjuk azt, hogy az X pont és e pontnak a gömbfelületre vetett árnyéka, $X^{\times}$, az önárnyékhatárgörbe síkjára nézve orth. szimmetriában lévő pontok, vagyis a síkmetszés síkja és a síkmetszés gömbbe vetett árnyékának síkja a gömb önárnyékhatárgörbéjének síkjára nézve szimmertikus elhelyezkedésű. E szerint a síkmetszés egyes pontjainak bevetett árnyékát úgy is szerkeszthetjük meg, hogy megállapítjuk a ponton átmenő fénysugárnak metszéspontját az önárnyékhatárgörbe síkjával és a felvett pontnak e metszésponttól való távolságát a metszésponttól számítva a fénysugárra még egyszer felmérjük.

A síkmetszésnek a gömbfelület belsejébe vetett árnyékgörbe tényleges szerkesztésénél meghatározzuk e görbe síkját, e sík jellemezve van az m egyenessel és az $X^{\times}$ ponttal és megszerkesztjük e síknak a gömbfelülettel való metszését úgy, ahogyan gömbfelület és sík síkmetszetét az előző feladatokban elintéztük. A gömbfelület belsejébe vetett árnyékgörbe síkja a megszerkesztett $X^{\times}$ ponttól függetlenül is megállapítható. Egyszerűség kedvéért vezessük be a következő jelöléseket: legyen a gömb önárnyékhatárgörbéjének síkja S_1, az m egyenes fénysíkja S_2, a síkmetszés síkja S_3, és a bevetett árnyékgörbe síkja S_4. Mivel S_1 síkra nézve az m egyenesre illeszkedően S_3 és S_4 szimmetrikus, az utóbbi két sík szimmetrikusa az m egyenes fénysíkjára is, mert a fénysík az önárnyékhatár görbe síkjára merőleges. E szerint az m egyenesre illeszkedő négy sík harmonikus csoportot alkot, s így e síkok nyomvonalai bármely síkon harmonikus sugárcsoportot alkotnak. Ha tehát megszerkesztjük az S_1, S_2, S_3 síkok első nyomvonalait és megállapítjuk az első kettőhöz a harmadiknak negyedik harmonikus társát, akkor ez az egyenes a bevetett árnyékgörbe síkjának első nyomvonala. Az m egyenes és a most megállapított első nyomvonal által meghatározott sík síkmetszete a gömbfelülettel szolgáltatja a kívánt árnyékgörbét.

A rajzban fel van tüntetve a megmaradt gömbsüvegnek mindkét képsíkra vetett árnyéka is. Egy-egy képsíkra vetett árnyék árnyékhatára két ellipszis ívből áll. Az egyik ellipszisív az önárnyékhatárkörnek az ábrázolt gömbsüvegen lévő részének, a másik ellipszisív a gömbi síkmetszet ama részének képsíkra vetett árnyéka, amely a gömb külső önárnyékban lévő részén van. A két ellipszisív egymásba érintőileg megy át az A és B pont vetett árnyékában, mert e pontokban az önárnyékhatárkörnek az érintője és a síkmetszésnek az érintője egy és ugyanazon fénysíkra illeszkedő egyenesek.

h) *Horizontális átmérősíkkal elmetszett gömb alsó felének ábrázolása és összes árnyékai* (129. ábra). E feladat az előbbi feladatnak csak speciális esete. Jelen esetben az önárnyékhatárgörbe síkjának és a horizontális metszősíknak közös m egyenese a gömb középpontján átmenő, a fénysugárra merőleges horizontális egyenes, melynek metszéspontjai a

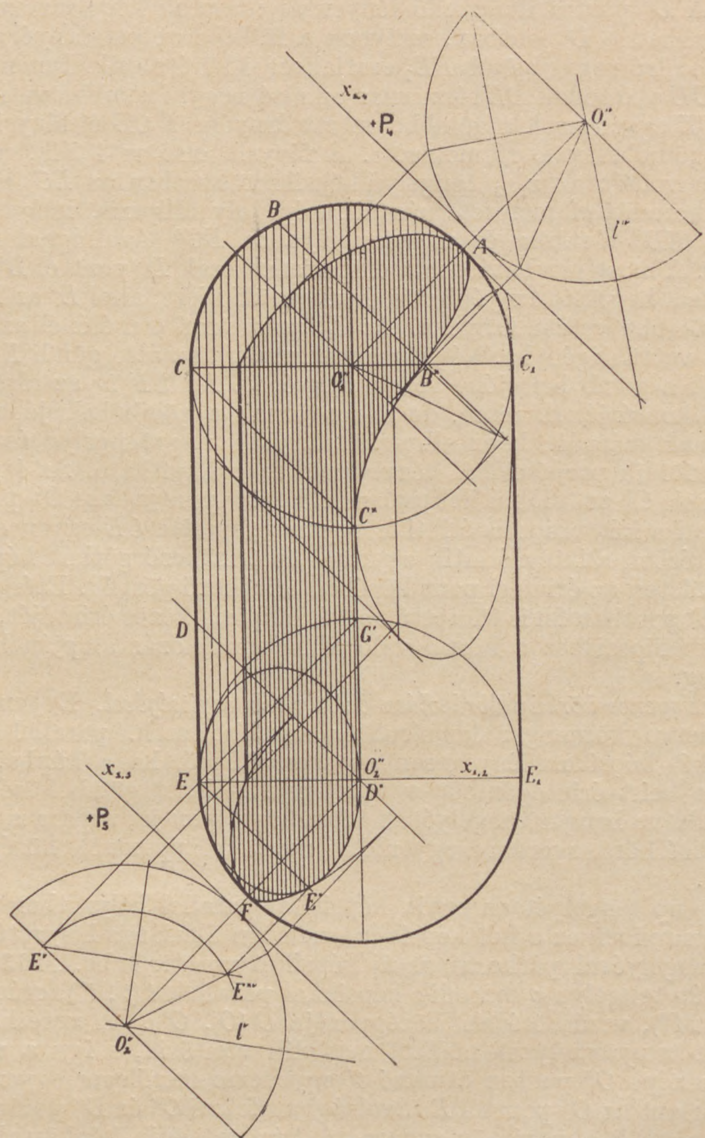


129. ábra.

gömbfelüettel az m egyenes és első kontúrgörbe közös pontjai, A és B. Mivel az m egyenes a fénysugárral parallel új képsíkra nézve, mely az első képsíkra merőleges, negyedik vetítősugár, a gömb belsejébe vetett árnyékgörbe síkja negyedik vetítősík. E negyedik vetítősík negyedik nyomvonalának egy pontja a gömb középpontjának negyedik képe, mert e pont az m egyenes negyedik képével azonos pont. Egy további pontját a legegyszerűbben úgy állapítjuk meg, hogy a horizontális metszősík és negyedik kontúrgörbe közös P pontjának a gömb belsejébe vetett árnyékát szerkesztjük meg. E $P^{\times}$ pont negyedik képe a gömb negyedik képkörrajzának és a P pontra illeszkedő fénysugár negyedik képének közös pontja. Miután meghatároztuk a bevetett árnyékgörbe síkjának negyedik nyomvonalát, az árnyékgörbét mint a gömbfelület és a meghatározott sík metszésgörbéjét szerkesztjük meg. Ekkor a síkmetszet első képe ellipszis, melynek nagytengelye $A'B'$ és félkistengelye $O'P^{\times\prime}$. Egyéb szerkesztési részletek az ábrából leolvashatók.

i) *Alulról és felülről negyedgömbbel boltozott félhengeres fülke összes árnyékai.* A félhenger legyen egy első vetítőhenger, melynek innenső felét eltávolítva gondoljuk. A boltozó negyedgömböknek, a félhengernek és 45°-os parallel világítás mellett az összes árnyékoknak csak a második képeit szerkesztjük meg (130. ábra). A fülke második képkörrajza felülről és alulról egy-egy félkör és a félkörök végpontjait összekötő hengeralkotók. A fülke önárnyékhatárgörbéje a felső és alsó negyedgömb, továbbá a henger önárnyékhatárgörbéjéből áll. A felső negyedgömb önárnyékhatárának megállapításánál a negyedgömböt félgömbbé egészítettük ki, melynek határoló átmérősíkja a második képsíkkal parallel. Majd meghatároztuk e félgömbnek a fénysugárral parallel és a második képsíkra merőleges új képsíkon lévő képét, ahol a gömb középpontjának negyedik rendezőjét még egészen tetszőlegesen vehettük fel. A gömb középpontjára illeszkedő fénysugár negyedik képét oblongum átlójaként nyertük, melynek egyik oldala az O_1 pont negyedik rendezőjén a gömb sugarával, míg másik oldala a gömb negyedik képkörrajzába írt négyzet egy oldalával egyenlő. Ezek után ismeretes módon megszerkesztettük az önárnyékhatárgörbe negyedik és ebből a második képét. Ugyanúgy jártunk el az alsó negyedgömb önárnyékhatárának szerkesztésénél, itt bevezettünk a második képsíkra merőleges és a fénysugárral parallel új ötödik képsíkot. A henger önárnyékhatár alkotójának második képét két képsíkból álló képsíkrendszer bevezetésével szerkesztettük meg, melynél az $x_{1,2}$ tengelyt az alsó gömb O_2 középpontjára illeszkedően vettük fel.

A fülke belsejébe vetett árnyék határgörbéjét az ábra szerinti jelölés mellett az $ABCDEF$ vonal bevetett árnyéka szolgáltatja. Az ABC körívnek a felső gömb belsejébe vetett árnyékának második képe ellipszis, melynek nagytengelye és kistengélye a negyedik kép alapján megszerkeszthető. Ennek az ellipszisnek csak egy része érvényesül mint bevetett árnyék, e rész kezdőpontja A, végpontja $B^{\times}$, ahol $B^{\times}$ az ellipszisnek a CC_1 egyenessel való metszéspontja. A $B^{\times}$ pontot, mint a bevetett árnyék lényeges pontját úgy szerkesztjük meg, hogy ellipszsis és kör affin vonatkoztatása alapján meghatározzuk az ellipszis és egyenes közös pontját. A $B^{\times}$ ponton átmenő fénysugárnak második képe metszi a negyedgömb homlokívét abban a B pontban, melynek a fülke belsejébe vetett árnyéka a $B^{\times}$. A felső negyedgömb $\widehat{BC}$ homlokíve már a hengerre vet árnyékot. Ha a C pont a henger belsejébe vetett árnyéka $C^{\times}$, akkor a bevetett árnyékhatárgörbéjének $B^{\times}$ és $C^{\times}$ pontok közti szakasza negyedrendű görbe ívdarabja. T. i. az ABC körvonalra illeszkedő fénysugarak másodrendű fényhengert alkotnak,



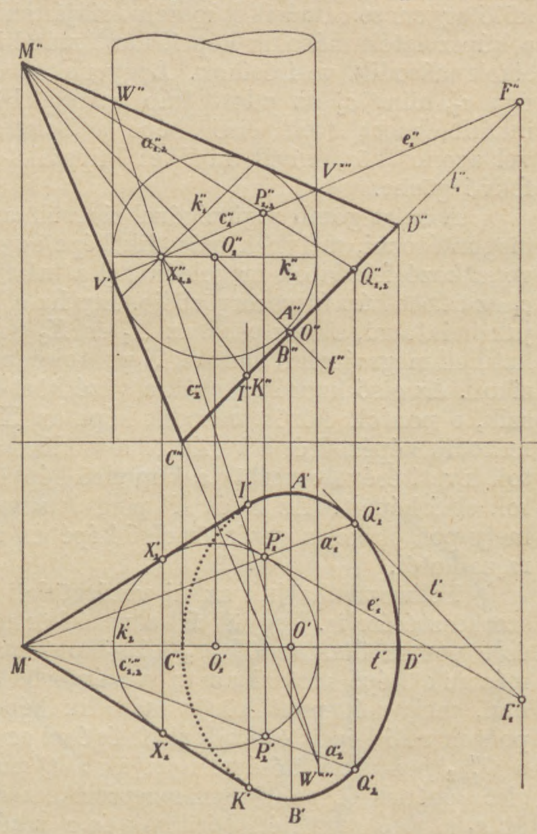
130. ábra.

melynek áthatása a szintén másodrendű fülkehengerrel negyedrendű tér-görbe. Az egész negyedrendű térgörbe két részből áll, de a rajzban csak az egyik rész pontjait szerkesztettük meg. Az egyes pontok szerkesztésénél két képsíkból álló képsíkrendszert vezettünk be, melynek tengelye a már előbb említett $x_{1,2}$ tengely. A bevetett árnyékhatár további része egyenes, mert hengeralkotónak ugyanazon hengerre vetett árnyéka mindig egyenes. A jelen esetben CE alkotónak a hengerre vetett árnyékának második képe a henger tengelyének második képével azonos egyenes és tart az alsó gömb középpontjának második képéig, az $O_2'' \equiv D^{\times}$ pontig. A $D^{\times}$ pontra illeszkedő fénysugár második képe metszi a CE alkotót abban a D pontban, melynek a fülkébe vetett árnyéka a félhenger és alsó negyedgömb EE_1 csatlakozási körére esik. Innen kezdődőleg a CE alkotónak DE része már az alsó negyedgömbbe veti árnyékát. A CE egyenesnek a gömbbe vetett árnyéka a CE él fénysíkjának az alsó gömbbel való síkmetszete. A fénysík első vetítősík, melynek első nyomvonala az $x_{1,2}$ tengelyű képsíkrendszerben az EG' egyenes, s így a keresett síkmetszet második képe oly ellipszis, melynek kistengelye $ED^{\times}$ távolság és nagytengelye az EG' távolsággal egyenlő távolság. A most meghatározott ellipszisnek csak $D^{\times}$ ponttól $E^{\times}$ pontig lévő része a bevetett árnyékhatár érvényesülő része, ahol $E^{\times}$ az E pontnak a gömbbe vetett árnyéka. Az $E^{\times}$ pont szerkesztésénél az ötödik képsíkot vettük igénybe. Végül meghatároztuk az alsó gömb EF homlokívének a gömb belsejébe vetett árnyékát. Az EF ív az alsó gömb második kontúrjának része, de a kontúrnak a gömb belsejébe vetett árnyékának második képe ellipszis, melynek nagytengelye és kistengelye az ötödik projekcióból közvetlenül megállapítható. Az így nyert ellipszisnek és az előbbi ellipszisnek közös pontja az $E^{\times}$ pont, de e pontban a két ellipszis érinti is egymást, mert a CE egyenes és EF körív a térben szintén érintik egymást és érintkező görbék képei bármely felületen az érintési pont képében érintkező görbék. Ezért a rajzban az $E^{\times}$ pontban fel is tüntettük a két ellipszis közös érintőjét, melyet az egyik ellipszishez a körrel való affin vonatkozás alapján határoztunk meg.

j) *Egyenes körkúp ábrázolása beírt gömb segítségével.* Egyenes körkúp, illetve körhenger konstruktív kezelése orth. parallel projekcióban két képsíkon lényegesen egyszerűsíthető, ha a kúpba, illetve hengerbe beírt érintőgömböt veszünk fel. A beírt gömb középpontja a kúp, illetve henger tengelyének tetszőleges pontja, sugara a hengernél a vezérkör sugarával egyenlő, kúpnál központról középpontra változik.

A kúp tengelyét az egyik képsíkkal parallel helyzetben vesszük fel; amennyiben ez a két képsíkkal szemben általános helyzetű volna, a kúp tengelyével párhuzamos új képsíkot vezetünk be. A 131. ábrában a kúp tengelye a második képsíkkal parallel, t (t', t''), csúcspontja M (M', M''), vezérkörének középpontja O (O', O''). A vezérkör síkja a felvett tengelyhelyzet mellett második vetítősík, s így a vezérkör második képe O'' ponton átmenő t'' egyenesre merőleges egyenes ama része, melyet az O'' ponttól R távolságban fekvő C'' és D'' pontok határolnak, ahol R a vezérkör sugara. A kúp második képkörrajzalkotói az $M''C''$ és $M''D''$ egyenesek. A kúp vezérkörének első képe ellipszis, melynek A', B', C' D' csúcspontjait ismeretes módon szerkesztettük meg.

A másodrendű kúpfelületre vonatkozó minden feladatban a vezérkör pontjainak, illetve érintőinek szerkesztésére volt szükségünk. Ha e pontok, illetve érintők képeit pontosan akarjuk meghatározni, akkor a vezérkört előbb valamelyik képsíkba kell forgatnunk, a leforgatásban a vezérkör érdekelt pontjait, illetve érintőit meghatározni, majd a nyert elemeket felállítani. A szerkesztéseknek ama részei, melyek a vezérkörrel vannak összefüggésben, lényegesen egyszerűsíthetők, ha a kúp vezérkörét egy a kúpfelületen lévő oly vezérgörbével helyettesítjük, melynek második képe megint egyenes, de első képe a legpontosabban megrajzolható kúpszelet, kör. Ezt az új vezérgörbét egy a kúpba írt érintő gömb közvetítésével szerkesztjük meg. A kúpba írt tetszőleges gömb második képe közvetlenül ábrázolható, középpontjának második képe a t'' egyenesre illeszkedő O_1'' pont, míg második képkörrajza a kúp második képkörrajzalkotóit érinti. A gömb első képkörrajz körének középpontja a t' egyenesre illeszkedő O_1' pont és sugara a második képkörrajz r sugarával egyenlő. A beírt gömb a kúpot k_1 körben érinti, melynek síkja második vetítősík. Az érintőkör második képe k_1'', a gömb és kúp második körrajzainak közös pontjait köti össze. A gömb első körrajzának első projiciáló hengere a gömböt az első kontúrkör mentén érinti, legyen e kontúrkör k_2 (k_2', k_2''). A k_1 és k_2 körök ugyanazon gömbön fekvő körök, tehát általában két pontban metszik egymást, legyenek e pontok X_1 (X_1' X_1''), X_2 (X_2', X_2''). Amennyiben e pontok nem valós pontok, akkor is e pontok összekötő egyenese valós, az egyenes a k_1 és k_2 körsíkok közös egyenese.



131. ábra.

Mivel a k_1 gömbi kiskör minden pontjában a gömb érintősíkja azonos a kúp érintősíkjával, a gömbnek X_1 és X_2 pontjaihoz tartozó érintősíkjai a kúpnak is érintősíkjai az X_1 és X_2 pontokban. Ugyanezen érintősíkok egyúttal a gömb első projiciáló hengerének is érintősíkjai, mert az érintési pontok a gömb első kontúrkörére illeszkedő pontok. Szóval az eredetileg megadott kúpnak és a kúpba írt gömb első projiciáló hengerének két közös pontjában közös az érintősík, de akkor a kúp és henger negyedrendű áthatási görbéje két kúpszeletre széteső görbe, ahol a teljes áthatásnak duplapontjai X_1 és X_2. Mint tudjuk, e szétesésnél a kúpszeletsíkok közös egyenese a duplapontok összekötő egyenese. Felvételünk értelmében a duplapontok összekötő egyenese második vetítősugár, tehát a kúpszeletsíkok második vetítősíkok. Ha a kúpszeletekre széteső negyedrendű térgörbének további pontjait ismerjük, akkor a kúpszeletsíkok meghatározhatók. Mivel az adott kúp és projiciáló henger második kontúralkotói a kúp tengelyére illeszkedő és második képsíkkal parallel síkban vannak, a második kontúralkotók második képeinek metszéspontjai V'', $V^{\times''}$ és W'', $W^{\times''}$ az áthatási görbe második képének pontjai. E szerint V'' és $V^{\times''}$ pontok összekötő egyenese az egyik kúpszelet, W'' és $W^{\times''}$ pontok összekötő egyenese a másik kúpszelet síkjának második nyomvonala, illetve a kúpszeletek második képei, mert már kimutattuk, hogy a kúpszeletsíkok második vetítősíkok. Legyenek e kúpszeletek c_1 és c_2, akkor úgy c_1, mint c_2 az adott kúp vezérgörbéjének választható, annál is inkább, mert ezek első képe a beírt gömb első képkörrajzkörével azonos kör, mivel mindkét kúpszelet a gömb első vetítőhengerén fekvő görbe.

A beírt gömb segítségével sikerült az adott kúp oly síkmetszetét meghatározni, melynek második képe egyenes, első képe kör. A kúpra vonatkozó feladatok megoldásánál a talált két síkmetszet közül legyen c_1 az adott kúp új vezérgörbéje. Így ha a kúp első kontúralkotóit akarjuk beiktatni, akkor csak az X_1 és X_2 pontokra illeszkedő kúpalkotókat kell megrajzolni, mert az X pontokban a kúp érintősíkjai első vetítősíkok. Az első kontúralkotók a vezérkört az I, illetve K pontban metszik, e pontok közös második képe az X pontra illeszkedő kúpalkotó második képének és a vezérkör második képének metszéspontja, e pontok levetítésével nyerjük a kúp első képkörrajzalkotóin az I és K pontok első képeit. Az $I^{\times}$ és $K^{\times}$ pontok a vezérkör első képének pontjai, mely pontokban a vezérkör első képében az érintők a kúp első képkörrajzalkotói.

Felhasználhatjuk az új vezérgörbét az eredeti vezérkör képének szerkesztésére is. Vegyük fel a vezérkör második képén a $Q''_{1,2}$ pontot és e pontra illeszkedő $a_{1,2}$ kúpalkotó második képét. Az $a_{1,2}$ alkotó második képe metszi az új vezérgörbe második képét a $P''_{1,2}$ pontban, mely két pont közös második képe. Miután megrajzoltuk a P pontok első képeit és ezek segítségével az a alkotók első képeit, ezeken a $Q''_{1,2}$ pont levetítésével nyerjük a Q pontok első képeit. A vezérkör első képének Q'_1 pontjában megszerlkesztettük a t' érintőt is. Az érintő az a_1 alkotó menti érintősíknak és a vezérkör síkjának metszésvonala. A metszésvonal egyik pontja Q_1, egy másik pontját pedig úgy állapítottuk meg, hogy az a_1 alkotó menti érintősíkra illeszkedő felületi érintőnek a vezérkör síkjával való metszéspontját szerkesztettük meg. E kúpfelületi érintők közül közvetlenül nyerhető az új vezérgörbe P_1 pontjához tartozó e_1 érintő, ennek második képe a c''_1-vel azonos egyenes, első képe a c'_1 kör P'_1 pontjához tartozó érintő. Az e_1 felületi érintő metszi a vezérkör síkját az F_1 pontban, F_1 és Q_1 pontok összekötő egyenese a keresett t_1 érintő.

Az új vezérgörbe előnyös alkalmazására felsorolt példák útmutatást adnak egyenes és kúpfelület metszéspontjainak, adott centrális világítás mellett a kúp önárnyékhatáralkotóinak, végül kúpfelület és adott sík síkmetszetének szerkesztésére.

78. §. **Gömbfelület axonometrikus ábrázolása.** Gömbfelület orth.

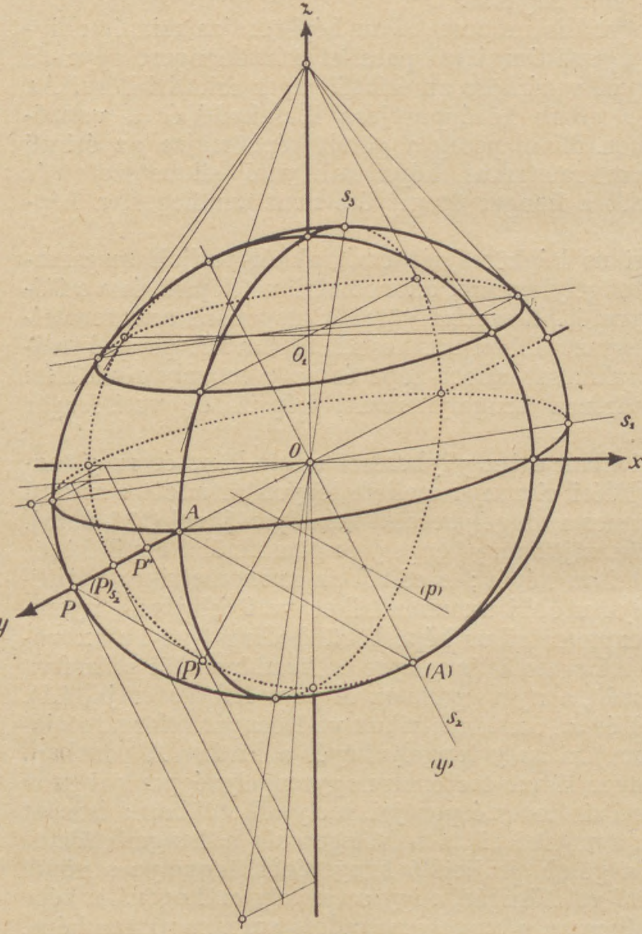
axonometrikus képkörrajza a gömb sugarával egyenlő sugarú kör, mert a gömbfelületet orthogonálisan projiciáljuk az axonometrikus képsíkra. Ha a gömb középpontja azonos a koordinátarendszer kezdőpontjával, akkor az egyes tengelyek a gömbfelülettel való metszéspontjainak képei mindig a képkörrajz belsejébe eső pontok, e pontokat úgy szerkesztjük meg, hogy az egyes tengelyekre a koordinátarendszer kezdőpontjától számítva a megfelelő rövidülések tekintetbe vételével felmérjük a gömb sugarát.

Gömbfelület klinogonális axonometrikus képkörrajza mindig ellipszis. T. i. a gömbnek a vetítősugárral parallel érintőhengere egyenes körhenger, melynek egyik vezérköre az érintőhenger érintési köre. Az érintőhenger tengelye a gömb középpontjára illeszkedő és a vetítősugárral parallel egyenes. Mivel pedig a gömb képkörrajza az érintő vetítőhengernek az axonometrikus képsíkkal való síkmetszete és az axonometrikus képsík a henger tengelyére nem merőleges, a képkörrajz ellipszis.

Gömb axonometrikus képkörrajzát csak akkor tudjuk megszerkeszteni, ha ismerjük tengelykereszt, axonometrikus képsík és vetítősugár viszonylagos helyzetét. E szerint gömb klinogonális axonometrikus képkörrajza a legegyszerűbben szerkeszthető kavalierperspektívában, mert ekkor tengelykereszt adott képe és az y tengely rövidülési viszonya már meghatározza tengelykereszt, képsík és vetítősugár viszonylagos helyzetét.

Kavalierperspektívában a tengelykereszt adott képe és az y tengely $q_y = \frac{2}{3}$ adott rövidülési viszonya mellett legyen az adott r sugarú gömb O középpontja azonos a tengelykereszt kezdőpontjával (132. ábra). Mindenekelőtt megszerkesztjük az y tengely és gömbfelület egyik közös A pontjának axonometrikus képét ; e célból az axonometrikus vetítősugarat és az y tengelyt utóbbi axonometrikus vetítősíkjának nyomvonala, az y tengely axonometrikus képe körül beforgatjuk az axonometrikus képsíkba, a leforgatott tengelyre a kezdőponttól számítva felmérjük a gömb sugarát, a nyert pont az A pont leforgatottja, (A). Az (A) ponton átmenő és az axonometrikus vetítősugár leforgatottjával parallel egyenes metszi az y tengely képét a kívánt A pontban. Minden egyenes körhenger síkmetszetének nagytengelyvégpontjai azon hengeralkotók és metsző sík metszéspontjai, mely alkotókban a henger tengelyére illeszkedő és a metsző síkra merőleges sík a hengerfelületet metszi. Jelen esetben a gömb projiciáló hengerének tengelye a gömb középpontjára illeszkedő vetítősugár, s így a tengely orthogonális képe az axonometrikus képsíkon az y tengely megadott axonometrikus képe. Tehát a keresett képkörrajz nagytengelyvégpontjai az y tengely axonometrikus képére eső pontok. E pontok meghatározása végett az y tengely axonometrikus vetítősíkjának leforgatásában megrajzoljuk azokat az alkotókat, melyekben az y tengely axonometrikus vetítősíkja a gömb projiciáló hengerét metszi. A leforgatott alkotókat úgy szerkesztettük meg, hogy leforgattuk azt a kört is, melyben az y tengely axonometrikus vetítősíkja az adott gömböt metszi, e kör az O körül $O\,(A)$ sugárral rajzolt kör, e körnek $A\,(A)$ vagy (p) egyenessel parallel érintői a kívánt alkotók, ezeknek P és Q nyompontjai a képkörrajz nagytengelyének végpontjai. Ha a P ponton átmenő leforgatott alkotó a leforgatott legnagyobb gömbi kört a (P) pontban érinti, akkor e pont a gömb kontúrkörének egy pontja leforgatásban. E pont klinogonális axonometrikus képe P és felrajza P'', ahol P'' az y tengely képének és (P) ponton átmenő és y tengely képére merőleges egyenesnek metszéspontja.

Egyenes körhenger síkmetszetének kistengelye nagyságra nézve egyenlő vezérkörének sugarával, amely a jelen esetben a gömb sugara. A gömb képkörrajzának nagytengelye és kistengelye meghatározza a képkörrajzzot, melyre vonatkozólag csak azt jegyezzük meg, hogy az y tengely képén szerkesztett A pont a képkörrajz ellipszisnek egyik gyujtópontja. T. i. $OP(P)$ háromszög és az $(A)\ AO$ háromszög kongruens háromszögek (a háromszögek szerkesztése alapján mindkét háromszög derékszögű háromszög, az első háromszög $O(P)$ befogója egyenlő a másik háromszög $(A)\ O$ befogójával és az első háromszögben az O melletti hegyesszög a másik háromszög (A) melletti hegyesszöggel egyenlő). De akkor a képkörrajz fél nagytengelye, OP egyenlő az $A\ (A)$ távolsággal, amivel állításunk már igazolva van.



132. ábra.

A gömb kontúrkörének síkja a vetítősugárra merőleges, miből következik, hogy a kontúrkör **S** síkjának második nyomvonala a képkörrajz kistengelye. Az **S** sík első és harmadik nyomvonalát a kontúrkör P pontjának már ismeretes axonometrikus képével és felrajzával szerkesztjük meg. Mivel az **S** sík második nyomvonalát már ismerjük, megrajzoljuk az **S** sík P pontjára illeszkedő második fővonal felrajzát és axonometrikus képét. A fővonal első nyompontja és a koordinátarendszer kezdőpontja meghatározza az **S** sík első nyomvonalát, míg a fővonal harmadik nyompontja és a koordinátarendszer kezdőpontja meghatározza az **S** sík harmadik nyomvonalát.

Az ábrában feltüntettük a koordinátasíkok és gömb síkmetszeteit. A felrajzsíkja által kimetszett kör egyúttal az axonomertikus képsík és gömb síkmetszete, tehát e kör képe az eredetileg kimetszett kör. Ahol e kör metszi az x és z tengelyt, ott metszi az x, illetve z tengely a gömbfelületet. Miután a tengelykereszt minden tengelyének a gömbfelülettel való metszéspontját meghatároztuk, megállapítottuk minden koordinátasík és gömbfelület síkmetszetének képében egy-egy konjugált átmérőpárt. Egy-egy síkmetszet lényeges pontja mindig az a pont, mely a síkmetszetnek és a kontúrgörbének közös pontja, mert ilyen pontban a síkmetszet érintőjének és a kontúrgörbe érintőjének axonometrikus képe ugyanaz az egyenes, mivel a két érintő összekötő síkja axonometrikus vetítősík, szóval ilyen pont axonometrikus képében a síkmetszet képe és a képkörrajz érinti egymást, és továbbá ugyanezen pontok képei elválasztják a síkmetszet képének látható részét a nem látható részétől. Az alaprajz síkjával való síkmetszet és kontúrkör közös pontjai a kontúrkör síkjának és az alaprajz síkjának közös egyenesére illeszkedő pontjai, ez az egyenes az s_1 egyenes. Az s_1 egyenes axonometrikus képének metszéspontjai a képkörrajz-ellipszissel a síkmetszet lényeges pontjainak axonometrikus képei. E metszéspontokat a rajzban azon affin vonatkozás alapján határoztuk meg, mely a képkörrajz-ellipszis és kistengelye fölé, mint átmérő fölé rajzolt kör között van.

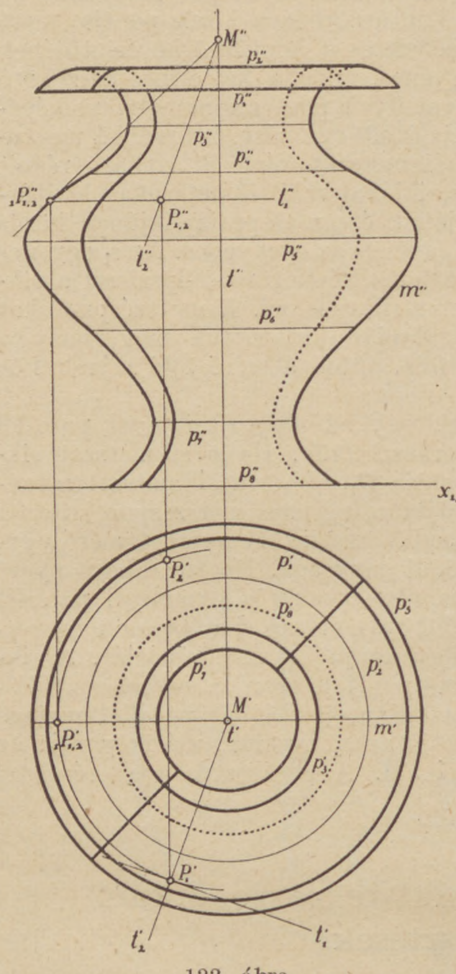
Az ábrában a gömbfelületnek egy az alaprajzsíkjával parallel síkkal való síkmetszetét is megszerkesztettük. Ha e síkmetszet síkjának a z tengellyel való metszéspontja O_1, akkor a síkmetszet x tengellyel parallel átmérőjének végpontjai az egyenes metszéspontjai ama körrel, melyben a felrajzsíkja a gömböt metszi. A nyert átmérő egyúttal a síkmetszet átmérőjének valódi nagysága. Ha továbbá a nyert átmérőhöz hozzácsatoljuk az O_1 ponton átmenő y tengellyel parallel átmérőt, melynek képhossza az előbbi átmérőnek $\frac{2}{3}$-a, akkor megszerkesztettük a síkmetszet képének egy konjugált átmérőpárját. A síkmetszetnek a gömb képkörrajzára eső pontjait azon az egyenesen találjuk, melyben a kontúrkör síkja az alaprajzsíkjával parallel metsző síkot metszi. Ez egyenes egyik pontja az s_2 egyenes, másik pontja az s_3 egyenes metszéspontja a metsző síkkal. A szerkesztés egyéb részletei az ábrából leolvashatók.

Általános forgási felületekre vonatkozó szerkesztések.

79. §. **Első képsíkra merőleges tengelyű forgási felület ábrázolása.** Legyen a forgási felület t tengelye az első képsíkra merőleges. Minden forgási felület jellemezve van tengelyével és meridiángörbéjével, melynek szimmetria tengelye a forgási felület tengelye. A forgási felületnek csak az a meridiángörbéje mutatkozik parallel projekcióban valódi nagyságban, melynek síkja a képsíkkal parallel. Első képsíkra merőleges tengely mellett a tengelyre illeszkedő és második képsíkkal parallel síkban fekvő meridiángörbe második képe az eredeti meridiángörbével kongruens görbe. E görbe második képét megkapjuk, ha az

adott meridiángörbét úgy másoljuk le, hogy szimmetria tengelye a forgási tengely második képével azonos egyenes legyen (133. ábra). Az ábrázolt m meridiángörbe a forgási felület főmeridiángörbéje, melynek első képe a tengely első képére illeszkedő és $x_{1,2}$ tengellyel parallel egyenes.

A főmeridiángörbe második képe egyúttal a forgási felület második képkörrajza, mert a főmeridiángörbe pontjaihoz tartozó öszszes érintősíkok második vetítősíkok. Ugyanekkor a felületnek első képkörrajza az aequatorkörök és torokkörök első képeiből tevődik össze, ezek p_5 és p_3, p_7. Megjegyzendő, hogy a felület második képkörrajzának pontjait nem merítik ki a főmeridiánra illeszkedő pontok képei, mert e pontokon kívül lehetnek a forgási felületnek egyéb oly pontjai is, melyekhez tartozó felületi érintősíkok második vetítősíkok. Így ábránkban a felület legfelsőbb parallelkörének minden pontjában a felületi érintősík a parallelkör síkja, tehát a parallelkörre illeszkedő pontok második képeivel a második képkörrajz kiegészítendő. A forgási felület minden képkörrajzát kiegészítjük még a felület ama parallelköreinek képeivel, melyekkel a felület ábrázolt véges részét határoltuk, de csak azért, hogy e parallelkörökkel kiegészített képkörrajz a felületről minél képiesebb benyomást nyujtson.



133. ábra.

Ha a felület egy pontjának második képe $P''_{1,2}$, akkor a pont első képének szerkesztésénél megrajzoljuk a pontra illeszkedő parallelkör második képét ; a főmeridiángörbe második képének és a parallelkör második képének metszéspontja a tengely körül a főmeridiánsíkba forgatott pontnak második képe. A nyert pont alapján megrajzolhatjuk a pontra illeszkedő parallelkör első képét, majd ezen leveltítéssel megállapítjuk a pont első képét.

A felület megszerkesztett P_1 pontjában megállapítottuk a felület érintősíkját is. Az érintősík jellemzésére szolgáló egyik felületi érintő, t_1 (t'_1, t''_1), a parallelkör érintője a P_1 pontban, a másik érintő a ponton átmenő meridiángörbe e ponthoz tartozó érintője, t_2 (t'_2, t''_2). A t_2 érintőt úgy nyertük, hogy meghatároztuk annak a parallelkörérintő-kúpnak csúcspontját, mely a P_1 ponton átmenő parallelkör mentén érinti a forgási felületet. E kúpnak M csúcspontja a tengely ama pontja, melyben azt a parallelkör és főmeridián közös pontjában a főmeridiángörbéhez vont érintő metszi. P_1 és M pontok összekötő egyenese a keresett érintősík másik érintője, t_2.

A 133. ábrát még felhasználtuk arra is, hogy a forgási felület tetszőleges meridiánmetszetének két képét mutassuk be. A metszet első képe a tengely első képére illeszkedő egyenes, mert a felület adott helyzete mellett minden meridiánmetszet síkja első vetítősík. A meridiánmetszet pontjainak és érintőinek második képeit pedig úgy szerkesztettük meg, hogy a főmeridinágörbe pontjait és érintőit a felület forgási tengelye körül a kívánt meridiánmetszet síkjába forgattuk.

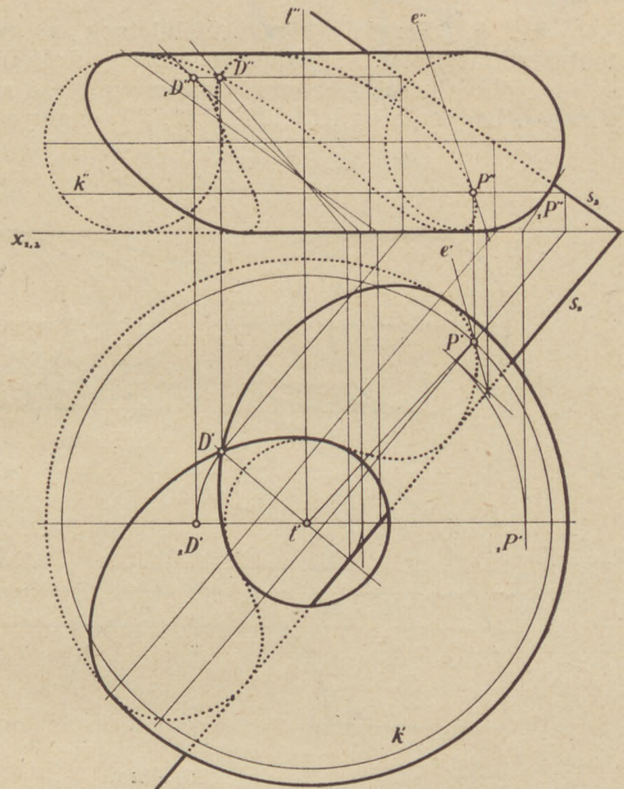
Még megemlítjük, hogy a felületen ábrázolt p_1 és p_2 parallelkörök által határolt felületrész minden pontja a p_2 parallelkörre illeszkedő pontok kivételével a felület elliptikus pontja ; a p_2 és p_4 parallelkörök által határolt rész minden belső pontja a felület hyperbolikus pontja ; a p_4 és p_6 parallelkörök által határolt rész minden belső pontja a felület elliptikus pontja ; p_6 és p_8 parallelkörök által határolt rész minden belső pontja a felületnek ugyancsak hyperbolikus pontja ; végül a felületnek p_2, p_4 és p_6 parallelkörökre illeszkedő pontjai a felületnek parabolikus pontjai.

80. §. Forgási felület síkmetszete. Forgási felület és adott sík síkmetszésének egyes pontjai oly segédsíkok segítségével nyerhetők, melyek a felületet parallelkörökben metszik. Egy segédsík a felületet parallelkörben, a metszősíkot egyenesben metszi, parallelkör és egyenes közös pontjai a síkmetszés pontjai. A metsző síknak és a forgási felületnek mindig van egy közös szimmetria síkja, ez az a forgási felület tengelyére illeszkedő sík, mely a metsző síkra merőleges. (Forgási felületnek és metsző síknak akkor van végtelen sok közös szimmetria síkja, ha a metsző sík a felület tengelyére merőleges.) Ebből következik, hogy a síkmetszésnek mindig van szimmetria tengelye, e tengely a metsző sík ama egyenese, melyben a forgási felület tengelyére illeszkedő és a metsző síkra merőleges sík a metsző síkot metszi. Forgási felület síkmetszésének lényeges pontjaihoz soroljuk a síkmetszésnek szimmetria tengelyére eső pontjait, egy-egy ilyen pontban a metszet érintője merőleges a szimmetria tengelyére, mert általában szimmetria tengellyel bíró síkgörbe mindig olyan görbe, melynek a szimmetria tengelyre eső pontjaiban az érintő a tengelyre merőleges, ha csak e pont a síkgörbének nem duplapontja, ez azonban csak akkor következik be, ha e pont a forgási felületnek szinguláris pontja.

Mivel a következőkben ú. n. forgási körgyűrűfelülettel kapcsolatban demonstráljuk forgási felület síkmetszésének szerkesztését, jellemezni kell a gyakorlatban igen gyakran szereplő forgási gyűrűfelületeket. Forgási gyűrűfelületet akkor nyerünk, ha a végesben zárt síkgörbét tetőszleges tengely körül forgatunk. Így ha ellipszist, kört stb. tetszőleges egyenes körül forgatunk, forgási gyűrűfelületet kapunk. Forgási körgyűrűfelület kizárólag az a forgási felület, melyet körnek síkjára illeszkedő tengely körüli forgatásából származtatunk. E felület meridiángörbéje e szerint a tengelyre nézve szimmetrikus helyzetű két kör, a felület egy speciális negyedrendű forgási felület. A meridiángörbe két körének centrálisa a felület tengelyét oly O pontban metszi, melyre illeszkedő minden egyenes a felületet O pontra nézve szimmetrikus elhelyezkedésű pontokban metszi, ezért az O pontot a felület középpontjának mondjuk. Ebből egyúttal az is következik, hogy a felületnek a felület középpontján átmenő síkkal való síkmetszete nemcsak axiális, hanem centrális szimmetriával bíró síkgörbe. A felületnek van egy torokköre és egy aequatorköre, e körök közös síkja a felület középpontján átmenő és tengelyre merőleges sík, ugyanezen sík a felületnek egyetlen, a meridiánsíkoktól különböző szimmetria síkja. E síktól r távolságban fekvő síkok, ahol r a forgatott körnek sugara, a felületet parallelkörök mentén érintik, e parallelkörök a felület parabolikus pontjainak mértani helye és egyúttal elválasztják a felület elliptikus pontjait a hyperbolikus pontoktól. Függélyes helyzetű tengely mellett beszélünk a felület alsó és felső, illetve belső és külső feléről és hasonlóan a felület egyes negyedeiről. A forgási körgyűrűfelület három fajtáját különböztetjük meg; ha a felület tengelye a forgatott kört két különböző valós pontban metszi, akkor a felület a csonkakörgyűrűfelület, melynek két valós szinguláris pontja van; ha a felület tengelye a forgatott kört érinti, akkor a felület a zárt körgyűrűfelület, ennél a két valós szinguláris pont összeesik; ha a felület tengelye a forgatott kört képzetes pontokban metszi, akkor a felület a nyitott körgyűrűfelület, melynek valós szinguláris pontja nincs.

Orthogonális parallel projekcióban két képsíkon forgási felület és sík síkmetszetét a legelőnyösebben akkor szerkeszthetjük meg, ha a felület tengelye valamely képsíkra merőleges. Amennyiben a tengely a két képsíkkal szemben általános helyzetű volna, akkor új képsík bevezetésével a fenti helyzetet előállítjuk.

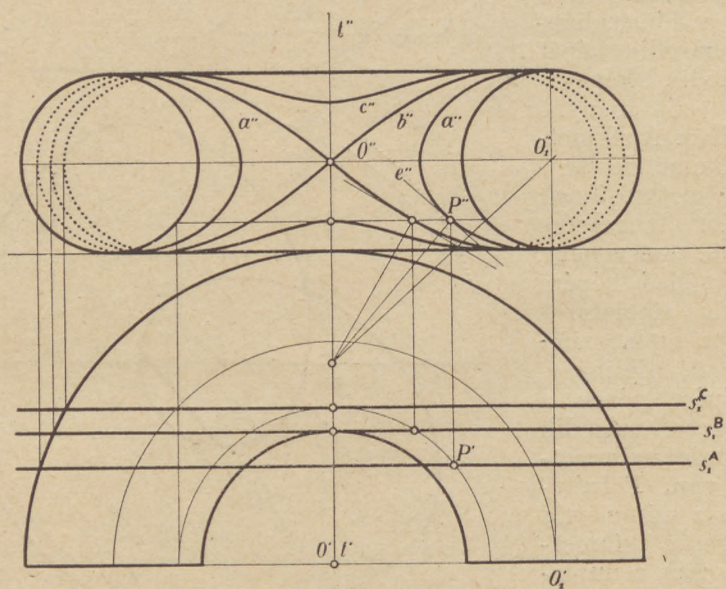
Határozzuk meg egy az első képsíkra merőleges tengelyű forgási nyitott körgyűrűfelületnek síkmetszetét (134. ábra). Az ábrából látható, hogy a forgási felület legalsó parallelköre az első képsíkban van, míg az **S** (s_1, s_2) metsző síkot úgy vettük fel, hogy az a forgási felületet D hyperbolikus pontban érintse. Ezt az érintő- és egyúttal metszősíkot úgy szerkesztettük meg, hogy a főmeridiánkörnek a tengely felé konvex részén felvettük a D pontnak főmeridiánsíkba forgatott pontját, e pontban az érintősík második vetítősík, melynek második nyomvonala a főmeridiánkör második képét az elforgatott pont második képében érinti, majd ezt a síkot a felület tengelye körül tetszőleges szöggel elforgattuk. A síkmetszetben D pont duplapont lesz, e ponton a síkmetszet kétszer valósan megy keresztül. A síkmetszet pontjainak szerkesztésénél elsősorban a lényeges pontokat állapítottuk meg. Ilyenek *a)* az aequatorkörön és torokkörön fekvő pontok, *b)* a legfelső és legalsó parallelkörön fekvő pontok, *c)* a főmeridiángörbén lévő pontok, *d)* a síkmetszet szimmetria tengelyére illeszkedő pontok. Az aequatorkör és torokkör közös síkja a metsző síkot első fővonalban metszi, a parallelkörök és fővonal első képeinek metszéspontjai a síkmetszésnek és parallelkörök közös pontjainak első képei; mivel az aequatorkör és torokkör a felület első kontúrgörbéje, e pontokban a síkmetszet első képe érinti az aequatorkör, illetőleg torokkör első képét. Ugyanúgy szerkesztettük meg a síkmetszésnek a felület legfelső és legalsó parallelkörére eső pontjait. E pontok első képeiben a síkmetszés első képében az érintők a sík első nyomvonalával parallel egyenesek, a második projekcióban az érintők az $x_{1,2}$ tengellyel parallel egyenesek, mert e pontokban a felületi érintősík első képsíkkal parallel sík. Még megjegyezzük, hogy e pontokban a síkmetszés második képe a felület második képkörrajzát érinti. De ezzel nem merítettük ki a második képkörrajzra illeszkedő pontokat, mert a második képkörrajz jelen esetben nemcsak a legfelső és legalsó parallelkör második képéből áll. A teljes második képkörrajzhoz tartozik a főmeridiángörbe második képe is. A főmeridiánsík a metszősíkot második fővonalban metszi, e fővonal második képe metszi a főmeridiángörbe második képét a második képkörrajzra eső hiányzó pontokban. A síkmetszés szimmetria tengelye a metszősíknak a felület tengelyére illeszkedő esésvonala, melynek első képére nézve a síkmetszet első képe orth. szimmetriában, míg második képére nézve a síkmetszet második képe ferde szimmetriában van. Felvételünkben a szimmetria tengelyre a síkmetszésnek csak a duplapontja illeszkedik, mert a szimmetria tengelynek a főmeridiánsíkba forgatottja a teljes fômeridiángörbe egyik körét érinti, míg a másik kört képzetes pontokban metszi. Amennyiben valós pontokban metszené, úgy e pontok visszaforgatásával a síkmetszésnek oly pontjait nyernők, melyekben az érintők ugyancsak a metsző síknak első fővonalai.



134. ábra.

A síkmetszet egy általános helyzetű pontjának szerkesztése a k parallellkörön van feltüntetve. A k parallelkör síkja a metsző síkot a h első fővonalában metszi, parallelkör és fővonal közös pontjai a síkmetszés általános helyzetű pontjai. Legyen e pontok közül az egyik P. A síkmetszet P pontjában az e érintő a P pontbeli felületi érintősík és metszősík közös egyenese. Az e érintőnek csak egy pontját kell megszerkeszteni, mert mindkét sík közös pontja P. A P pontbeli felületi érintősíkot úgy nyerjük, hogy a P pontot a forgási felület tengelye körül a főmeridiánsíkba forgatjuk, ez az ${}_1P$ pont; e pontban a forgási felület érintősíkja második vetítősík, melynek második nyomvonala a főmeridiángörbe második képét az ${}_1P''$ pontban érinti; ha az így nyert sík első nyomvonalát ugyanazon szöggel forgatjuk vissza, amilyen szöggel a pontot eredetileg elforgattuk, akkor megszerkesztettük a forgási felület P pontbeli érintősíkjának első nyomvonalát, e nyomvonal és a metsző sík első nyomvonalának közös pontja az e érintő első nyompontja.

81. §. Forgási körgyűrűfelületnek a gyakorlat szempontjából fontos síkmetszetei. A gyakorlatban a gyűrűfelület ama síkmetszeteit kell legtöbbször szerkeszteni, amikor a metsző sík a felület tengelyével parallel. Legyen a gyűrűfelület t (t', t'') tengelye az első képsíkra merő-



135. ábra.

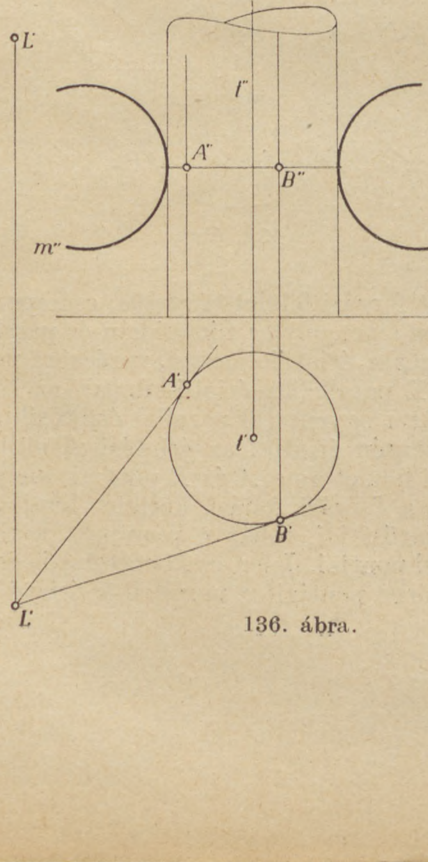
leges, középpontja O (O', O''), egyik főmeridiánkörének középpontja O_1 (O_1', O_1'') és sugara r (135. ábra). A láthatósági viszonyok kedvezőbbek, ha a gyűrűfelületnek a főmeridiánsík elötti részét eltávolítva gondoljuk. A tengellyel parallel metsző síkokat a főmeridiánsíkkal párhuzamos helyzetben vettük fel. Az ábrában a felület három síkmetszetét mutatjuk be. Ha egy-egy metsző sík a főmeridiánsíktól d távolságban van és az O és O_1 pontok távolsága R, akkor mindaddig, míg $d < R - r$ távolságnál, a síkmetszet mindig két részből álló negyedrendű síkgörbe, melynek négy valós duplaérintője van. Ha $d = R - r$, akkor a síkmetszetnek van egy valós duplapontja és e pontban a görbe érintői inflexiós érintők. Ha $R > d > R - r$, akkor a görbe piskótaalakú négy valós inflexiós érintővel. Mivel e síkmetszetek mindegyikének két szimmetria tengelye van, ahol az egyik tengely a metszősík és aequatorkör síkjának, a másik tengely a metszősík és profilmeridiánsík metszésvonala, a síkmetszetek centrális szimmetriával bíró negyedrendű síkgörbék.

A síkmetszet egyes pontjait úgy szerkesztjük meg, hogy a felületet és a metszősíkot a tengelyre merőleges segédsíkkal metsszük, a segédsíkban fekvő parallelkör és fővonal közös pontjai a síkmetszetnek pontjai. Így szerkesztettük meg a felületnek az **A**, **B** és **C** síkkal való síkmetszetét, az a, b, c negyedrendű síkgörbéket. Legyen a felület és **A** sík síkmetszetének egy pontja P, akkor e pontban a síkmetszet érintőjét a metszősík jelenlegi speciális helyzete mellett a pontra illeszkedő felületi normális segítségével állapítjuk meg. Tekintetbe véve azt, hogy a P ponthoz tartozó felületi normális a P ponthoz tartozó minden felületi érintővel derékszöget alkot és a keresett érintő a második képsíkkal parallel, mert a metsző síkra illeszkedő egyenes, a P ponthoz tartozó érintő második képe a P ponthoz tartozó felületi normális második képével derékszöget alkot.

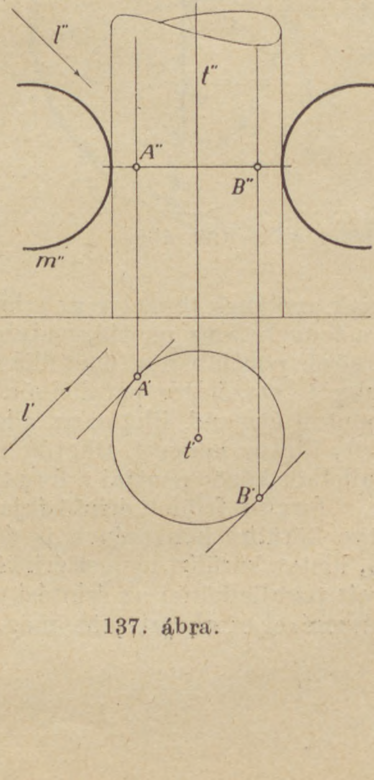
82. §. Körülírt érintőkúp és érintőhenger érintési görbéjének szerkesztése forgási felületeknél. Forgási felület képkörrajzait orth. parallel projeckióban két képsíkon és axonometriában csak akkor szerkeszthetjük meg, ha előzetesen forgási felület érintőkúpjának, érintőhengerének érintési görbéjét megállapítottuk.

A körülírt kúp, melynek csúcspontja az adott L pont, illetve henger, melynek alkotói az adott l egyenessel parallelek, érintési görbéjének szerkesztésénél egyelőre a forgási felület tengelyét az első képsíkra merőleges helyzetben választjuk és a forgási felületet tengelyével és főmeridiángörbéjével adjuk meg. Az érintési görbe pontjait az alant felsorolt módszerekkel határozzuk meg:

a) *A parallelkör-érintő-henger módszere* (136. és 137. ábra). A forgási felület érintősíkjai az aequatorkör, illetve torokkör mentén egye-



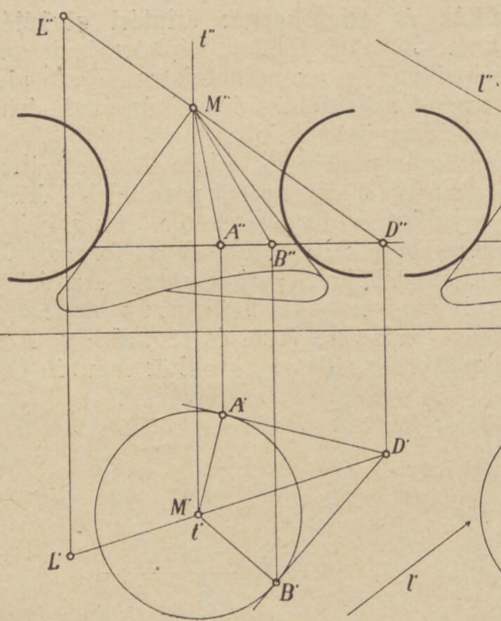
136. ábra.



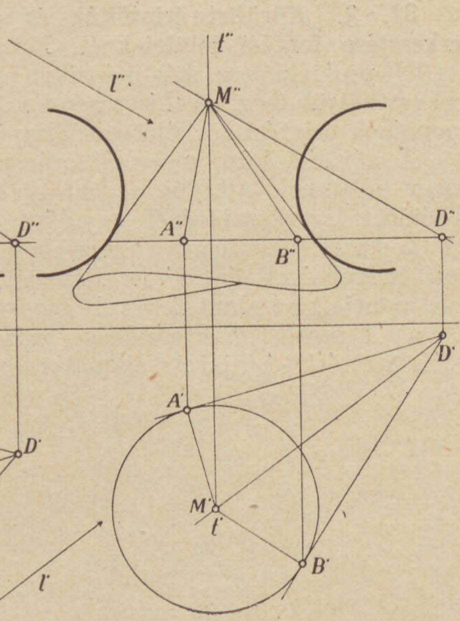
137. ábra.

nes körhengert burkolnak, melynek tengelye azonos a forgási felület tengelyével, vezérköre az aequatorkör, illetve torokkör. E parallelkör-érintő-hengernek az adott L ponton átmenő, illetve az adott l egyenessel parallel érintősíkjai a hengert alkotók mentén érintik, az érintési alkotók és aequatorkör, illetve torokkör közös pontjai a forgási felület oly pontjai, mely pontokban a forgási felület érintősíkjai az L pontból körülírt kúpnak, illetve az l egyenessel parallel alkotójú érintőhengernek is érintősíkja, tehát a megszerkesztett A és B pontok az érintési görbének pontjai. E szerint az L pontból körülírt kúp, illetve az l egyenessel parallel érintőhenger a forgási felületén lévő érintési görbéjének az aequatorkörre vagy torokkörre illeszkedő pontjait a parallelkör-érintő-henger módszerével állapítottuk meg.

b) *A parallelkör-érintő-kúp módszere* (138. és 139. ábra). A forgási felület érintősíkjai tetszőleges parallelkör mentén forgási kúpot bur-



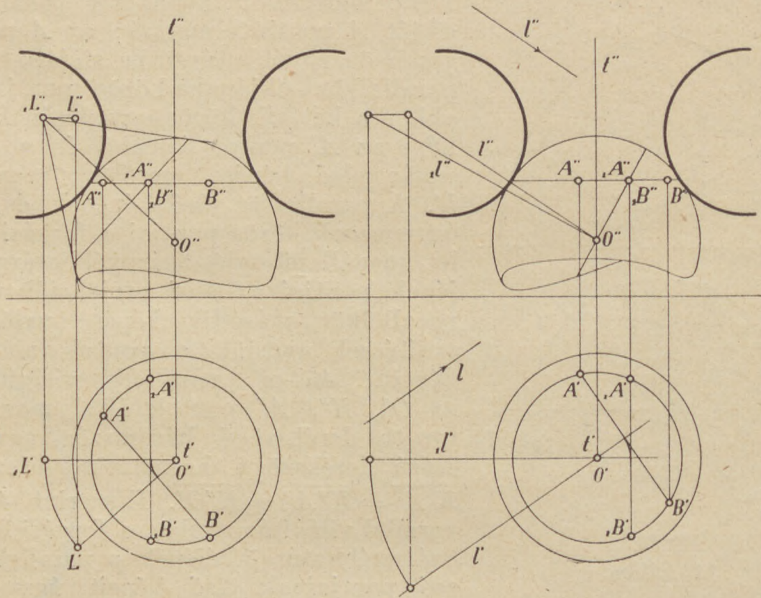
138. ábra.



139. ábra.

kolnak, melynek tengelye az adott forgási felület tengelye, csúcspontja M, a tengely ama pontja, melyben a tengelyt a főmeridián és parallelkör közös pontjában a főmeridiángörbe érintője metszi, vezérköre pedig a felvett tetszőleges parallelkör. E parallelkör-érintő-kúpnak az adott L ponton átmenő, illetve az adott l egyenessel parallel érintősíkjai a kúpot, illetve hengert alkotók mentén érintik, az érintési alkotók és parallelkör közös pontjai a forgási felület ama A és B pontjai, melyekben a forgási felület érintősíkjai a forgási felület körülírt kúpjának, illetve körülírt hengerének is érintősíkjai, tehát e pontok a körülírt kúp, illetve körülírt henger érintési pontjai. Jelen esetben tetszőlegesen felvett parallelkörön az érintési görbe pontjait a parallelkör-érintő-kúp módszerével szerkesztettük meg.

c) *A parallelkör-érintő-gömb módszere* (140. és 141. ábra). A forgási felület tetszőleges parallelkörének pontjaira illeszkedő felületi normálisok a forgási felület tengelyét az O pontban metszik, e pont egyúttal oly gömb középpontja, mely a forgási felületet a tetszőlegesen felvett parallelkör mentén érinti, ha sugara az O pont és a parallelkör tetszőleges pontja által határolt távolság. E parallelkör-érintő-gömb adott L ponton átmenő, illetve adott l egyenessel parallel érintősíkjai a gömböt gömbi kiskör, illetve legnagyobb gömbi kör mentén érintik. A gömbi kiskör, illetve legnagyobb gömbi kör a forgási felület felvett parallelkörét két pontban metszi, e pontok ugyancsak a keresett érintési görbe pontjai. Az L pont, illetve az l egyenes tetszőleges helyzete mellett a gömbi kiskör, illetve legnagyobb gömbi kör mindkét képe ellipszis, de

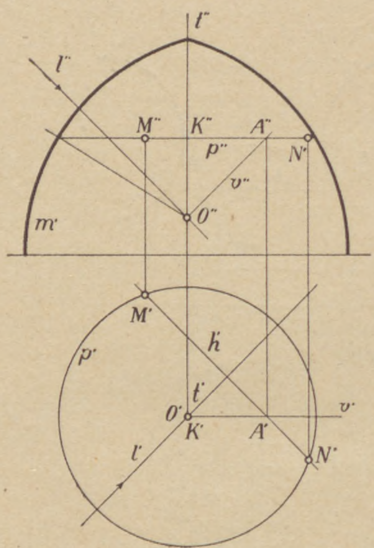


140. ábra. 141. ábra.

ha az L pont a főmeridiángörbe síkjára illeszkedik, illetve az l egyenes a főmeridiángörbe síkjával parallel, akkor a gömbi kiskör, illetve legnagyobb gömbi kör második képe egyenes, mert ekkor a gömbi kiskör, illetve legnagyobb gömbi kör síkja második vetítősík. E vetítősík a forgási felület felvett parallelkörének síkját második vetítősugárban metszi, e vetítőtősugár és parallelkör közös pontjai az érintési görbe keresett pontjai. A szerkesztést úgy végezzük, hogy az L pontot, illetve a t tengelyre illeszkedő l egyenest a forgási felület tengelye körül a főmeridiánsíkba forgatjuk, a fenti módon meghatározzuk az érintési görbe pontjait, majd ezeket ugyanazon rotációs szöggel visszaforgatjuk, mely szöggel az L pontot, illetve l egyenest a főmeridiánsíkba forgattuk. Ekkor a felvett parallelkörön az érintési görbe pontjait parallelkör-érintő-gömb módszerével határoztuk meg.

A parallelkör-érintő-kúp és parallelkör-érintő-gömb módszerek egymást kiegészítik, amikor a parallelkör-érintő-kúp csúcspontja a rajzlap véges síkjából kiesik, a parallelkör-érintő-gömb középpontja hozzáférhető pont és megfordítva.

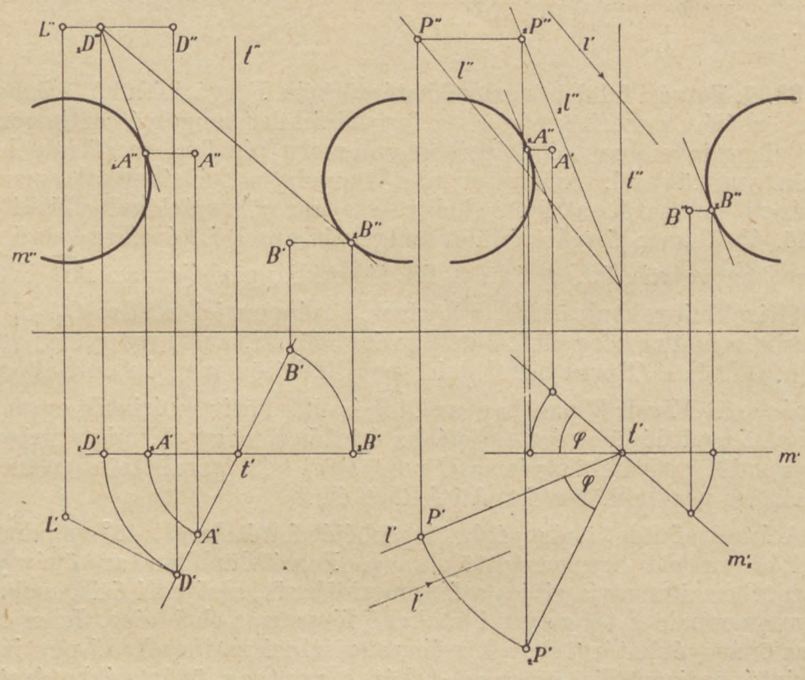
Ha feltesszük, hogy a forgási felület tengelye az első képsíkra merőleges és a szokásos 45°-os parallell világítás mellett kívánjuk megszerkeszteni önárnyékhatárgörbéjét, vagyis a fénysugárral parallel körülírt henger érintési görbéjét, akkor a parallel-érintő-gömb módszerével az érintési görbe pontjainak meghatározása lényegesen egyszerűsíthető. Vegyük fel tengelyével és főmeridiángörbéjével adott forgási felület p parallelkörét, melynek középpontja K (142. ábra). Ha a forgási felület p parallelkör mentén érintő gömb O középpontját megszerkesztettük, akkor a gömb önárnyékhatár körének síkja a gömb középpontjára illeszkedő és a fénysugárra merőleges sík. E síknak a gömb középpontján átmenő második v fővonala a parallelkör síkját A pontban metszi; az A pont a gömb önárnyékhatárgörbe síkjának és a parallelkör síkjának közös pontja, de akkor a két sík közös egyenesének első képe az A' ponton átmenő és a fénysugár első képére merőleges egyenes, h'. A parallelkör első képének és a h' egyenesnek közös pontjai a forgási felület megállapítandó önárnyékhatárgörbéjének pontjai az első projekcióban; a parallelkör második képére való felvetítéssel nyerjük e pontok második képeit. 45°-os parallell világításnál az O'', K'', A'' pontok által meghatározott derékszögű háromszög egyenlőszárú derékszögű háromszög, de akkor $\overline{K'A'} = \overline{K''A''} = \overline{K''O''}$. E szerint 45°-os parallel világítás mellett a forgási felület önárnyékhatárgörbéjének p parallelkörre eső pontjainak első képeit úgy szerkesztjük meg, hogy az O' ponton átmenő és az $x_{1,2}$ tengellyel parallel egyenesre az O' ponttól számítva felmérjük a parallelkör és érintő gömb középpontjainak távolságát, még pedig az O' ponttól jobbra, ha az érintő gömb középpontja a parallelkör alatt van (ellenkező esetben balra) és az így nyert ponton átmenő és a fénysugár első képére merőleges egyenes metszi a parallelkör első képét a keresett M, N pontok első képeiben.



142. ábra.

d) *A meridiángörbe-érintő-henger módszere.* A forgási felület érintősíkjai, melyeknek érintési pontjai tetszőlegesen felvett meridiángörbére illeszkedő pontok, hengerfelületet burkolnak. A hengerfelület vezérgörbéje a felvett meridiángörbe, alkotói pedig a meridiángörbe síkjára merőleges egyenesek. Ha a forgási felület L pontból körülírt kúp érintési görbéjének a felvett meridiángörbére eső pontjait kívánjuk megszerkeszteni, akkor a meridián-érintő-henger ama alkotóit kell megállapítani, mely alkotókmenti érintősíkok az L ponton átmennek, az érintési alkotók és meridiángörbe közös pontjai a keresett pontok. A 143. ábrában a forgási felület m_1 meridiángörbéjén szerkesztettük meg az érintési görbe pontjait. Mivel a meridián-érintő-henger egyenes henger, az L pontból az m_1 meridiángörbe síkjára merőleges egyenest bocsátottunk, a merőleges egyenes és meridiánsík közös D pontján átmenő meridián-érintők érintési pontjai a meghatározandó pontok. Az érintők érintési pontjait úgy nyertük, hogy az m_1 görbe síkját a benne fekvő D ponttal együtt a főmeridiánsíkba forgattuk, és az m főmeridiángörbének ama pontjait határoztuk meg, melyekhez tartozó érintők az elforgatott D ponton átmennek, az érintők érintési pontjai a keresett pontok elforgatottjai.

Ha pedig a forgási felület l egyenessel parallel körülírt henger érintési görbéjének (144. ábra) a felvett m_1 meridiángörbére eső pontjait



143. ábra. 144. ábra.

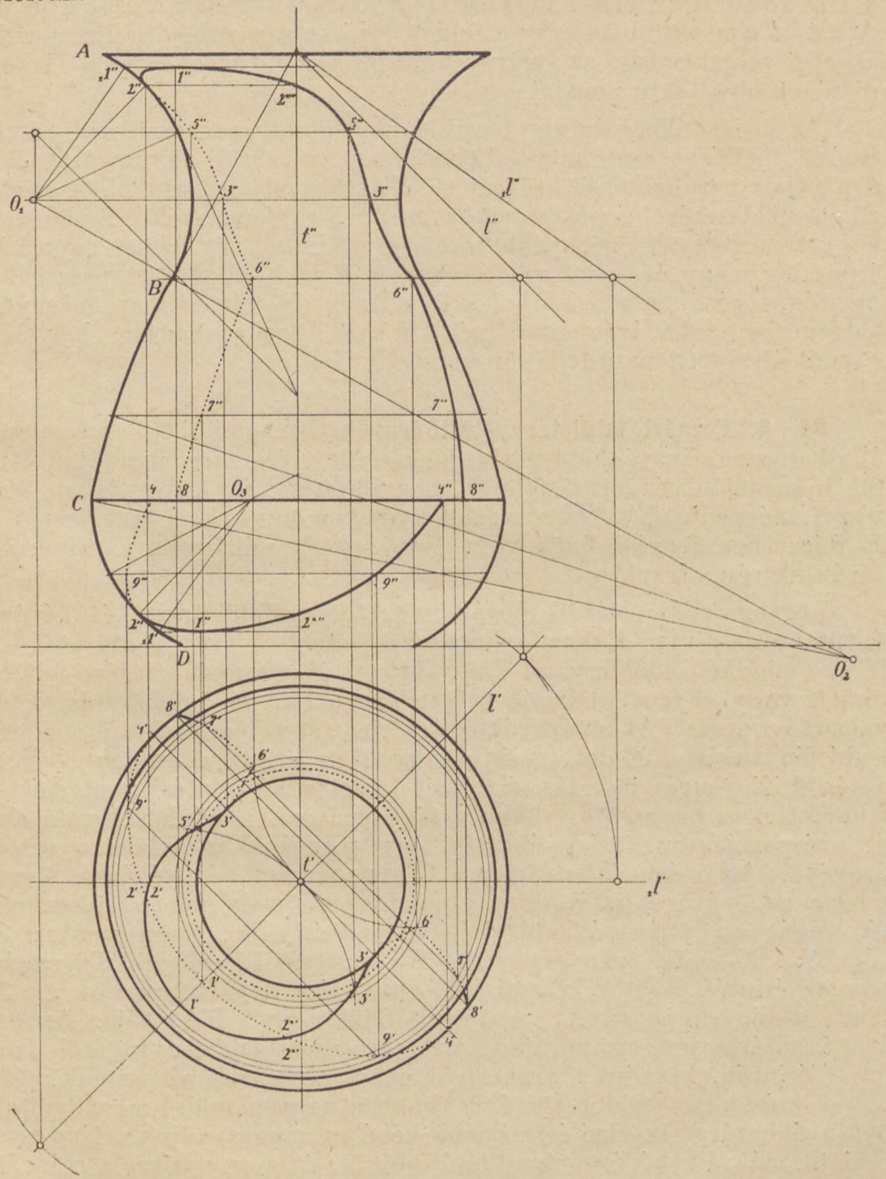
kívánjuk megszerkeszteni, az m_1 meridiángörbét a főmeridiánsíkba forgatjuk és ugyanolyan szöggel és ugyanazon értelemben az l egyenest is elforgatjuk. Ekkor az eredeti meridián-érintőhenger második vetítőhengerbe megy át s így a főmeridiángörbe második képének ${}_1l''$ egyenessel parallel érintők érintési pontjai a keresett, de még elforgatott pontok második képei. Ha e pontokat ama szöggel visszaforgatjuk, mellyel az eredetileg felvett meridiánsíkot elforgattuk, akkor megszerkesztettük az m_1 meridiángörbének és a körülírt henger érintési görbéjének közös $A(A', A'')$ és $B(B', B'')$ pontjait.

A forgási felület körülírt kúpjának érintési görbéje mindig szimmetrikus arra a meridiánsíkra nézve, mely a körülírt kúp csúcspontjára illeszkedik, mert az egyes parallelkörökön az *a)*, *b)* és *c)* módszerek szerint szerkesztett pontok a szerkesztés alapján e síkra nézve szimmetrikusan fekvő pontok. Az érintési görbe szimmetriasíkjában fekvő meridiángörbe és érintési görbe közös pontjaiban, amennyiben e pontok a felületnek reguláris pontjai, az érintési görbe érintője a szimmetria síkra merőleges, mert két-két szimmetrikusan fekvő pont összekötő egyenese a szimmetriasíkra mindig merőleges s így merőleges akkor is, mikor a szimmetrikusan fekvő pontok a szimmetria síkban összeeső pontokká válnak. Ha a körülírt kúp csúcspontja vetítési középpont, akkor az érintési görbe a forgási felület kontúrgörbéje, e kontúrgörbe szimmetria síkja vetítő meridiánsík. Ha pedig a körülírt kúp csúcspontja forgási felület megvilágításánál fényforrásként szerepel, akkor az érintésigörbe a forgási felület önárnyékhatárgörbéje, ugyanakkor a fényforrásra illeszkedő meridiánsík, melyet ez esetben röviden fénymeridiánsíknak mondunk, az önárnyékhatárgörbe szimmetria síkja.

83. §. Forgási felület önárnyékhatárgörbéje. Forgási felület önárnyékhatárgörbéjének szerkesztésénél a forgási felület tengelyét orthogonális parallel projekcióban két képsíkon valamely képsíkra merőleges helyzetben vesszük fel. Amennyiben a tengely a képsíkokkal szemben általános helyzetű, a fenti helyzetet transzformációval előállítjuk. A 145. ábrában a forgási felület tengelyét az első képsíkra merőleges helyzetben vettük fel. A felület fél főmeridiángörbéjét az $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ és $\widehat{CD}$ körívekből raktuk össze, e körívek középpontjai rendre O_1, O_2, O_3. E szerint a felület körgyűrűfelületek részeiből áll, az egyes gyűrűfelületrészek a B és a C pont által leírt parallelkörök mentén csatlakoznak egymáshoz. Mivel B pontban az $\widehat{AB}$ és $\widehat{BC}$ körívek érintik egymást, a két első gyűrűfelületrész egymásba érintőleg megy át, míg a második és harmadik gyűrűfelületrész a C pont által leírt parallelkörben metszi egymást, e parallelkör a forgási felület éle.

A forgási felület önárnyékhatárgörbéjét feltételezett 45°-os parallelvilágítás mellett szerkesztettük meg. Felvételünkben az önárnyékhatárgörbe szimmetria síkja, a fénymeridiánsík, első vetítősík, melynek első nyomvonala a tengelyre illeszkedő fénysugár első képe. Jelen esetben az önárnyékhatárgörbének a fénymeridiánsíkra illeszkedő pontjában az érintő horizontális egyenes, tehát e pont az önárnyékhatárgörbe legmagasabb, ill. legmélyebb pontja. Mivel e pontok a fénymeridiánsíkra illeszkedő pontok, e pontokat meridián-érintő-henger módszerével szerkesztettük meg. A fénymeridiánsíkot a benne lévő fénysugárral együtt a főmeridiánsíkba forgattuk és a főmeridiánnak ama pontjait állapítottuk meg, melyekben a főmeridián érintője az elforgatott fénysugár második képével parallel. E pontok visszaforgatásával nyertük az önárnyékhatár *1* számmal jelölt pontjait, mely pontokhoz tartozó érintők a fénymeridiánsíkra merőlegesek.

Az önárnyékhatárgörbe további fontos pontjai a főmeridiángörbére eső pontok ezeket is meridián-érintő-henger módszerével állapítottuk meg, mégpedig úgy, hogy meghatároztuk a főmeridián ama pontjait, melyekben az érintők a fénysugár második képével parallel egyenesek. A nyert *2* számmal jelölt pontok a második projekcióban az önárnyékhatárgörbe látható és nem látható részének elválasztó pontjai. A főmeridiánsíknak a fénymeridiánsíkra vonatkozó szimmetrikus síkja a profil meridiánsík, tehát a szerkesztett *2* pontoknak a fénymeridiánsíkra nézve szimmetrikus pontjai az önárnyékhatárgörbe ama pontjai, melyek a profil meridiánsíkra illeszkednek, e pontokat 2^x számmal jelöltük.



145. ábra.

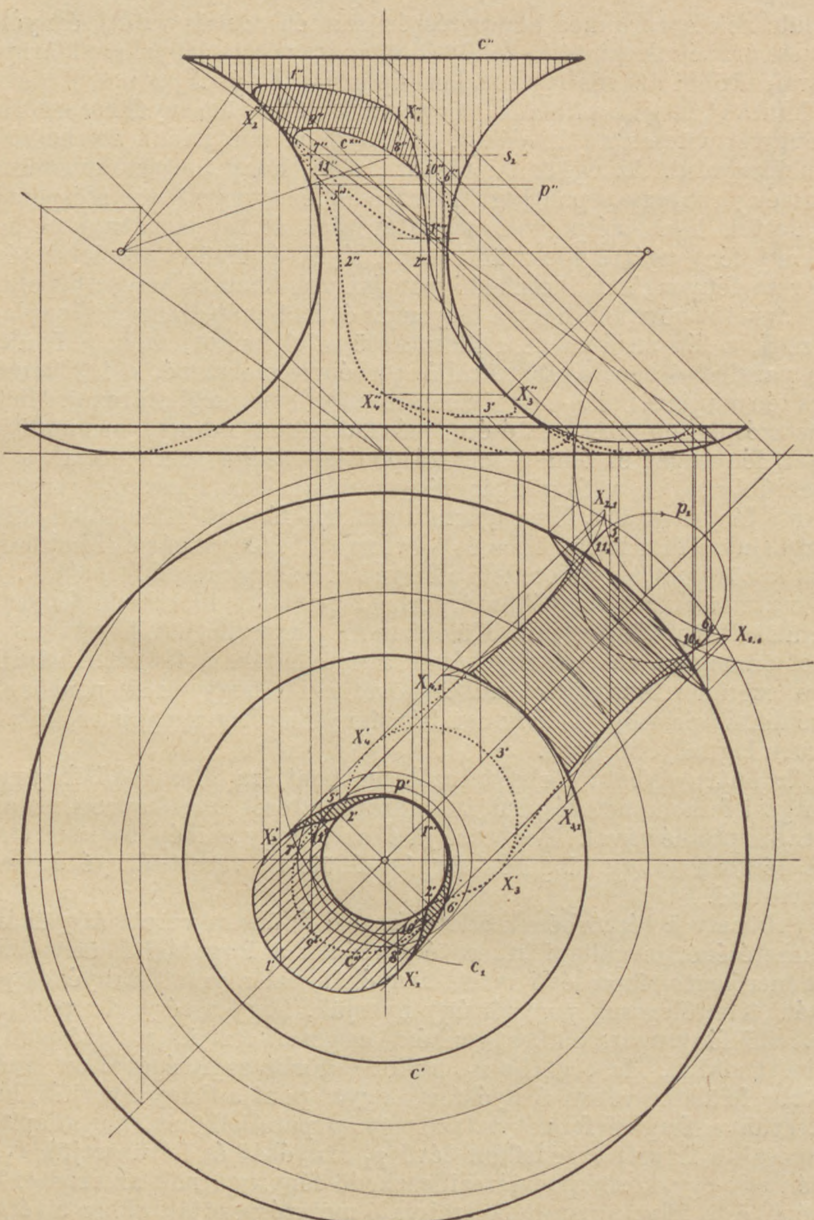
Az önárnyékhatárgörbe első képe szempontjából lényeges pontok a torokkörre és aequatorkörre eső pontok. Mindkét körön a pontokat a parallelkör-érintő-henger módszerével szerkesztettük meg. A torokkörön fekvő pontok a *3* pontok, míg az aequatorkörön fekvő pontok a

4 pontok. A *4* pontokkal kapcsolatban meg kell említeni, hogy e pontok az önárnyékhatárgörbe csak ama részének pontjai, amely a forgásfelületre nézve a parallelkör aequatorkör, így felvételünkben a *4* pontok a $\widehat{CD}$ körív által leírt felületrészen lévő önárnyékhatárgörbe pontjai. A *3* és *4* pontok, mivel ezek a felület első kontúrgörbéjére illeszkedők, az első projekcióban az önárnyékhatárgörbe látható és nem látható részének elválasztó pontjai.

Az önárnyékhatárgörbe további pontjainak szerkesztésbeli részletezését mellőzve csak megemlítjük, hogy az ábrán feltüntetett *5* és *6* pontjait parallelkör-érintő-kúp, *7*, *8* és *9* pontjait parallelkör-érintőgömb módszerével szerkesztettük meg. Figyelemreméltó körülmény, hogy a megrajzolt önárnyékhatárgörbe ott, ahol két felület egymásba érintőileg megy át, mint példánkban a *B* pont által leírt parallelkör mentén, törést mutat, és ahol a felületnek éle van, ott az önárnyékhatárgörbe szakadást mutat, példánkban ilyen szakadásos helyek a *C* pont által leírt parallelkörön vannak.

84. §. Forgási felületre vetett árnyék. Az előbbi §-ban szereplő ábrában az önárnyékhatárgörbe megszerkesztése után nem tüntettük fel tónuskülönbséggel a felület megvilágított és önárnyékban lévő részét, mégpedig azért, mert a felület részben önmagára is vet árnyékot. E fejezetben forgási felületre vetett árnyék néhány gyakori esetét kívánjuk részletezni.

Legyen adva a 146. ábrában egy gyűrűfelületnek két képével feltüntetett része. Ekkor a megszerkesztett önárnyékhatárgörbe a felület mindkét oldalán vagy megvilágított és önárnyékban lévő felületrészek vagy önárnyékban és vetett árnyékban lévő felületrészek elválasztó vonala. Az önárnyékhatárgörbe tetszőleges pontjára illeszkedő fénysugár a felületet a felvett pontban érinti, és amennyiben ez az érintőfénysugár haladási értelmét követve az érintési pont előtt a felületet nem metszette, akkor a fénysugárnak a felülettel való első metszéspontja az önárnyékgörbe egy pontjának a felületre vetett árnyéka. Az önárnyékhatárgörbe felületre vetett árnyékának kezdő pontja az önárnyékhatárgörbe ama pontja, mely pontra illeszkedő fénysugár az önárnyékhatárgörbének is érintője, ilyen pontok az X_1, X_2, X_3, X_4. Mert pl. az X_1 pontra illeszkedő fénysugárnak az érintési pontot követő első metszéspontja ugyancsak az X_1 pont, a fénysugár az X_1 pontban a felület egyik főérintője. Az önárnyékhatárgörbe ama pontjait, melyekre illeszkedő fénysugarak felületi főérintők, körzővel, vonalzóval nem szerkeszthetők, megközelítő szerkesztésük oly módon történik, hogy a nagy gonddal megállapított önárnyékhatárgörbe első és második képében megrajzoljuk a fénysugár első, ill. második képével parallel érintőket, és amennyiben a második kép egy érintőjének kijelölt érintési pontja és az első kép egy érintőjének kijelölt érintési pontja rendező vonalat határoz meg, akkor a kijelölt két érintési pont az önárnyékhatárgörbe oly pontjának két képe, melyre illeszkedő fénysugár felületi főérintő. Ha az önárnyékhatárgörbénknek legmagasabb pontja $1(1', 1'')$, akkor az önárnyéhatárgörbe $\widehat{X_1 1 X_2}$ ívdarabja árnyékot vet a gyűrűfelület torokkör fölötti részére.



146. ábra.

Ez az önmagára vetett árnyék csak az első projekcióban látható és határolva van részben az önárnyékhatárgörbe bevetett árnyékával és részben az önárnyékhatárgörbe X_1, ill. X_2 pontokkal kezdődő folytatásával.

Ha az önárnyékhatárgörbének torokkörön fekvő pontjai a *2* pontok, akkor a görbének felvételünkben $\widehat{X_1 2X_3}$ és $\widehat{X_2 2X_4}$ ívdarabjai a felületnek a torokkör alatti részén szintén adnak vetett árnyékot, e vetett árnyékok szintén a felület önmagára vetett árnyékának árnyékhatárai, utóbbi árnyékhatárok kezdőpontjai X_3 és X_4 stb.

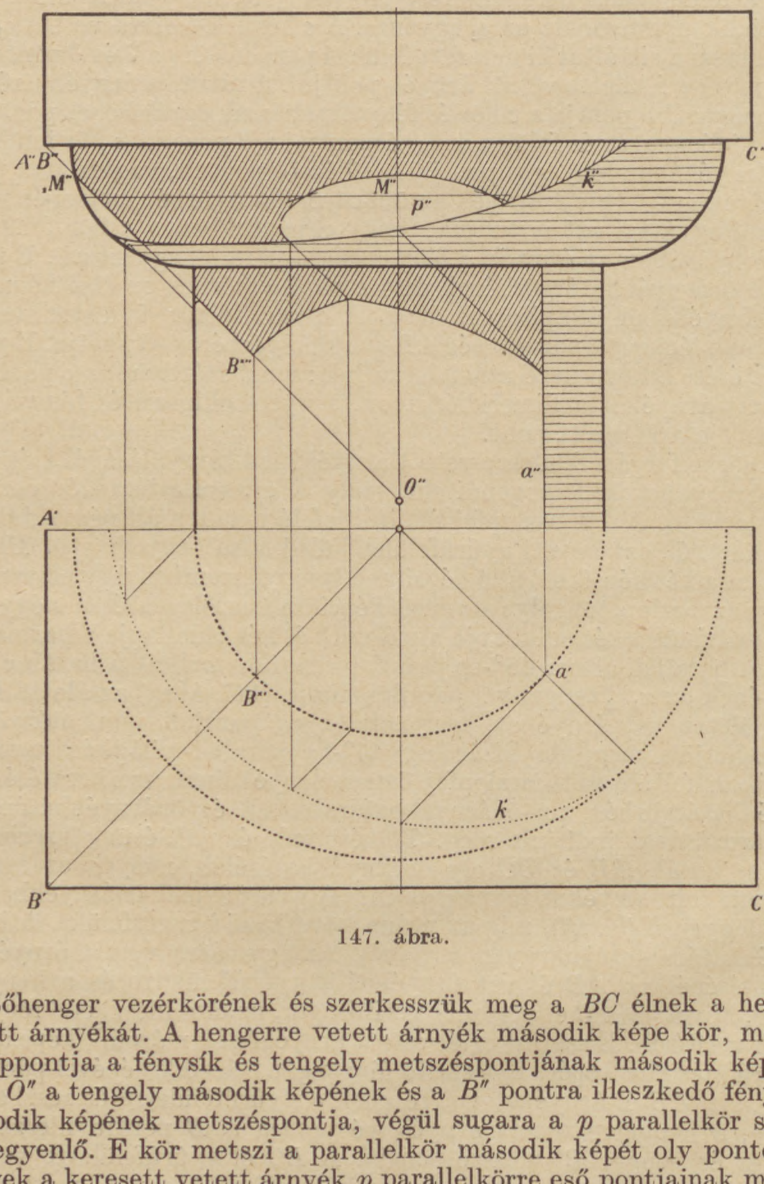
Miután megállapítottuk, hogy a felület önárnyékhatárgörbéje miként vet a felületre árnyékot, ez árnyékok pontjainak szerkesztését kell letárgyalni. Az egyik eljárás az volna, hogy megszerkesztjük az önárnyékgörbe egyes pontjaira illeszkedő fénysugarak metszéspontjait a felülettel. A metszéspontok meghatározásánál úgy járhatunk el, hogy a felvett fénysugárra illesztünk síkot, a sík és felület síkmetszetének a felvett fénysugárra illeszkedő pontjai volnának a keresett pontok. De tekintetbe véve azt, hogy a fénysugár és felület általános viszonylagos helyzetű, a fénysugárra nem illeszthetünk oly síkot, mely a felületet akár parallelkörben, akár meridiángörbében metszené, s így minden egyes fénysugárnál más-más síkmetszetet kellene meghatározni. Mielőtt a metszéspontok szerkesztésére más utasítást adunk, megemlítjük, hogy a fénysugár és felület metszéspontjait akkor szerkesztjük a legegyszerűbben, ha a fénysugár fénymeridiánsíkra illeszkedő egyenes. Ekkor a fénysugarat a fénysugárra illeszkedő fénymeridiánsíkkal együtt beforgatjuk a főmeridiánsíkba és a beforgatott fénysugár és főmeridiángörbe közös pontjait az eredeti elforgatási szöggel visszaforgatjuk. Így szerkesztettük az önárnyékhatárgörbe *1* pontjára illeszkedő fénysugár és felület $1^{\times}$ metszéspontjait. Különben megjegyezhetjük, hogy a forgási felület önmagára vetett árnyékának árnyékhatára a fénymeridiánsíkra nézve szimmetrikus görbe, miből következik, hogy az $1^{\times}$ pontban az árnyékhatár érintője a fénymeridiánsíkra merőleges egyenes, felvételünkben legmélyebb pont.

Az önárnyékhatárgörbe tetszőleges pontjára illeszkedő fénysugár és forgási felület metszéspontjának szerkesztését összekapcsoljuk általánosabb problémával. Megbeszéljük azt, hogy mikép fogjuk tetszőleges térgörbe vagy síkgörbe forgási felületre vetett árnyékát megszerkeszteni.

Valamely k térgörbének adott forgási felületre vetett árnyékának szerkesztésénél megállapítjuk a térgörbének a forgatási felület tengelyére merőleges síkon lévő vetett árnyékát, ezt a vetett árnyékot pontonként lehetőleg sok pontból úgy nyerjük, hogy a térgörbe pontjaira illeszkedő fénysugaraknak egyenként megszerkesztjük metszéspontjait a felvett síkkal. Ha e görbe k_1, akkor e görbe segítségével az eredeti térgörbe felületre vetett árnyékának egyes pontjait úgy nyerjük, hogy felvesszük a forgási felület tetszőleges p parallelkörét, megállapítjuk ugyancsak a felvett segédsíkon lévő p_1 árnyékát és feltüntetjük k_1, p_1 görbék egy-egy közös pontjára illeszkedő fénysugárnak az eredeti térgörbével és a felvett parallelkörrel való metszéspontját, ekkor a térgörbén nyert pontnak felületre vetett árnyéka a parallelkörön nyert pont. Így szerkesztettük meg ábránkban az önárnyékhatárgörbe $\widehat{X_1 1 X_2}$ ívdarabjának a felületre vetett árnyékából a p-vel jelölt parallelkörre eső *5* és *6* pontokat, miután előzőleg az egész önárnyékhatárgörbének a tengelyre merőleges síkra, esetünkben az első képsíkra, vetett árnyékát megállapítottuk. Itt megjegyezzük azt, hogy az önárnyékhatárgörbének első képsíkra vetett árnyékában négy csúcspontot nyerünk, mert a vetett árnyék az önárnyékhatárgörbének ferde parallel képe az első képsíkon a fénysugárral adott ferde parallel projekció mellett. De a fénysugár négy pontban érinti az önárnyékhatárgörbét és minden ilyen pontnak ferde képe csúcspont, mivel térgörbe projekciójában mindig ott van csúcspont, melyhez tartozó eredeti pontban a görbe érintője vetítősugár.

A 146. ábrában a gyűrűfelület felső határoló köre is okoz a felületre vetett árnyékot, mely a felület megvilágított részén a felület önmagára vetett árnyékának árnyékhatára. E c körnek felületre vetett árnyékából három pont szerkesztését tüntettük fel. Meghatároztuk a felületre vetett árnyék a felület ama parallelkörére eső pontjait, mely körre illeszkedő sík második nyomvonala az s_2 egyenes. A c körnek e síkra vetett c_1 árnyéka metszi a sík által kimetszett felületi parallelkört a *7* és *8* pontban, mely pontok a felületre vetett árnyék pontjai. A rávetett árnyék e részének legmagasabb pontja a c kör és fénymeridiánsík egyik közös pontjára illeszkedő fénysugár és felület metszéspontja, a *9* pont. A c kör felületre vetett árnyékának lényeges pontjai a *10* és *11* pontok, vagyis ama pontok, melyekben a vetett árnyék az önárnyékhatárgörbét metszi és mely pontokról egyúttal azt is tudjuk, hogy e pontokban a c kör felületre vetett árnyékában az érintők a fénysugárral parallel egyenesek. E pontokat az önárnyékhatárgörbének és a c parallelkörnek az első képsíkra vetett árnyékából állapítottuk meg. A c parallelkör felületre vetett árnyékának lényeges pontja még a főmeridiángörbére eső pontja. E pont szerkesztésére a következő utasítást adjuk : meghatározzuk a c parallelkör vetett árnyékát a főmeridiánsíkon, a nyert ellipszis és főmeridián közös pontja a keresett pont.

Térgörbe forgási felületre vetett árnyékának tárgyalásánál még egy különleges esetet kell megemlíteni, mely a gyakorlatban dór oszlopfejeken látható. A dór oszlopfej felülről lefelé haladva áll négyzetalapú hasábfelületből, ezt követi gyűrűfelület külső, alsó negyede stb. Ha az oszlopfejet a két képsíkból álló képsíkrendszerrel szemben úgy helyezzük el, hogy az oszlop tengelye az első képsíkra merőleges és a négyzetalapú hasábfelület két oldallapja a második és két oldallapja a harmadik képsíkkal parallel, akkor 45°-os parallel világítás mellett a hasáb alapnégyzetének az $x_{1,2}$ tengellyel parallel oldala (147. ábra) az alatta lévő gyűrűfelületre vet árnyékot, melynek egyes pontjait igen előnyösen szerkeszthetjük meg, de kizárólag 45°-os parallel világítás mellett. Az ábrában feltüntetett oszlopfej összes árnyékainak szerkesztését az önárnyékhatárgörbék, az önárnyékhatáralkotók és önárnyékhatárélek meghatározásával indítjuk meg. Felvételünk és jelölésünk szerint a négyzetes hasáb AB és BC oly önárnyékhatárélek, melyek az oszlop egyes felületeire ányékot fognak vetni. A gyűrűfelület önárnyékhatárgörbéje legyen k (k', k''), míg az utána következő hengerfelület látható önárnyékhatáralkotója legyen a (a', a''). Az egymásra vetett árnyékok szerkesztésénél az AB él vet árnyékot a gyűrűfelületre és a hengerfelületre. Mivel az AB él második vetítősugár, az élre illeszkedő fénysík második vetítősík. E szerint ez él vetett árnyékának második képe az él pontszerű második képére illeszkedő fénysugár második képével parallel egyenes. Az AB él árnyékot vet részben a gyűrűfelületre és részben a hengerre, a hengerre vetett árnyék végpontja a B pontra illeszkedő fénysugár és henger $B^{\times}$ metszéspontja. A BC él gyűrűfelületre vetett árnyékának legmagasabb pontja a profilmeridiánsíkban van, mert az él fénysíkja az $x_{1,2}$ tengellyel parallel. Ezt a legmagasabb M pontot úgy szerkesztjük meg, hogy az él fénysíkját az oszlop tengelye körül az óramutató járásával egyező értelemben 90°-kal elforgatjuk, ekkor az elforgatott fénysík az AB él fénysíkjával azonos. Utóbbi fénysíknak a gyűrűfelület főmeridiángörbéjével való metszéspontja a keresett pont elforgatottja. A BC él fénysíkjának és a gyűrűfelület metszésgörbéjének egyes pontjait a gyűrűfelület előre felvett parallelkörén szerkesztjük meg. Legyen a felvett parallelkör p, akkor tekintsük e kört egy első



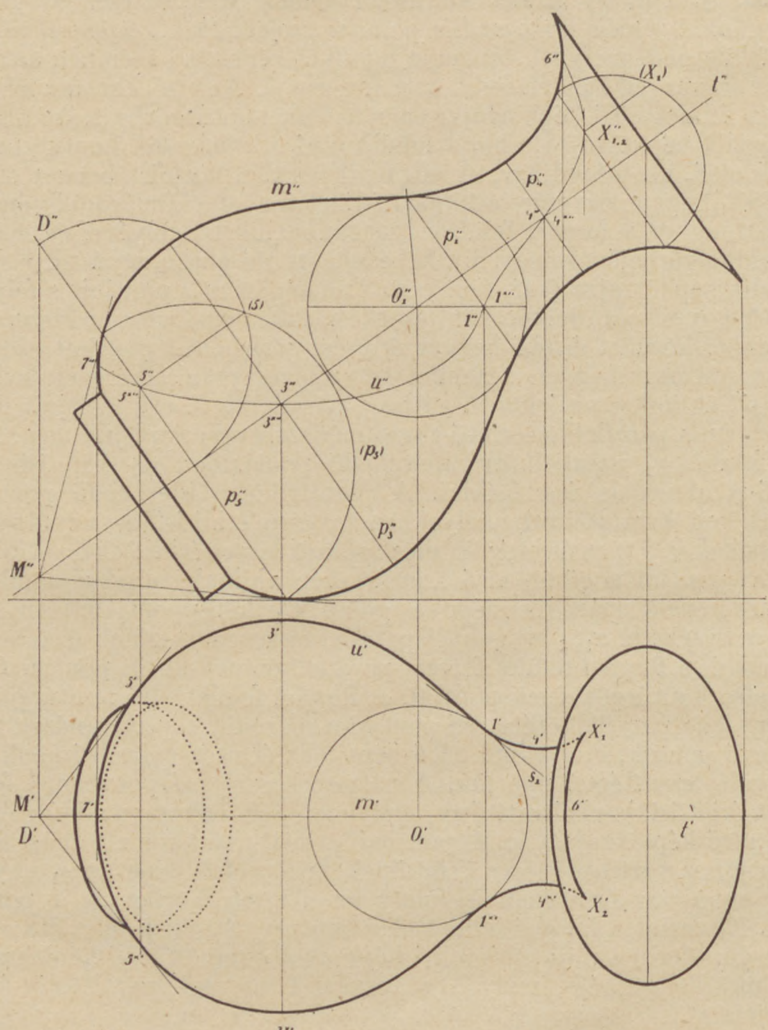
147. ábra.

vetítőhenger vezérkörének és szerkesszük meg a BC élnek a hengerre vetett árnyékát. A hengerre vetett árnyék második képe kör, melynek középpontja a fénysík és tengely metszéspontjának második képe, O'', ahol O'' a tengely második képének és a B'' pontra illeszkedő fénysugár második képének metszéspontja, végül sugara a p parallelkör sugarával egyenlő. E kör metszi a parallelkör második képét oly pontokban, melyek a keresett vetett árnyék p parallelkörre eső pontjainak második képei. Természetesen az így pontonként szerkesztett vetett árnyék a gyűrűfelület megvilágított részén a hasábnak a gyűrűfelületre vetett árnyékának árnyékhatára. Az oszlopfej hengerfelületére vetett árnyékok szerkesztésbeli részletei az ábrából közvetlenül leolvashatók, ezek leírását itt mellőzzük.

85. §. Forgási felület kontúrgörbéjének szerkesztése. a) *Forgási felület kontúrgörbéje orthogonális parallel projekcióban két képsíkon.* Forgási felületnek, melynek tengelye mindkét képsíkkal szemben általános helyzetű, van első és második kontúrgörbéje. Az első kontúrgörbe első képe a felület első képkörrajza, a második kontúrgörbe második képe a második képkörrajza, ahol a felület első, ill. második kontúrgörbéjén értjük első, ill. második vetítősugárral parallel körülírt henger érintési görbéjét. Legyen egyelőre a forgási felület tengelye a második képsíkkal parallel, ekkor a forgási felületet megadhatjuk tengelyével és második főmeridiángörbéjének második képével, utóbbi görbe egyúttal a felület második képkörrajza (148. ábra). Az első képkörrajz pontjait a felületen felvett egyes parallelkörökön szerkesztjük meg ama módszerekkel, melyekkel körülírt érintő henger érintési görbéjének pontjait szerkeszteni tanultuk. Legyen a felület tetszőleges parallelkörének második képe p_1'', ekkor az első kontúrgörbe a parallelkörre eső pontjait legelőnyösebben a parallelkör-érintő-gömb módszerével állapítjuk meg. A forgási felület p_1 parallelkörre illeszkedő pontjaiban az érintősíkok az érintő-gömbnek is érintősíkjai. A parallelkörre illeszkedő pontokból azokat kell kiválasztani, melyekhez tartozó érintősíkok egyúttal első vetítősíkok is. De az érintőgömbhöz tartozó összes érintő első vetítősíkok érintési pontjai a gömb első kontúrkörén vannak, ahol a gömb első kontúrkörének második képe a gömb O_1 középpontjának második képére illeszkedő $x_{1,2}$ tengellyel parallel egyenes. A gömb első kontúrkörének és a forgási felület felvett parallelkörének közös pontjai *1* és $1^{\times}$ az u első kontúrgörbének pontjai. A forgási felület első kontúrgörbéjének egy-egy parallelkörére eső pontjai a második képsíkra nézve födésben lévő pontok, melyeknek első képeit az érintőgömb első képkörrajzára való levetítéssel nyerjük. A megszerkesztett *1* pontban a forgási felület érintősíkja első vetítősík, melynek s_1 első nyomvonala az érintőgömb első képkörrajzát az *1'* pontban érinti, de akkor a forgási felület *1* pontjához tartozó összes érintőinek közös első képe az s_1 egyenes, tehát annak az érintőnek is, mely az u kontúrgörbét az *1* pontban érinti. E szerint a forgási felület első kontúrgörbéjének második képe a görbe duplaprojekciója, míg első képe ama gömbök első képkörrajzainak burkoló görbéje, melyek a forgási felületnek parallelkör-érintőgömbjei.

Alkalmazva a fenti szerkesztést a forgási felület aequatorkörére és torokkörére, azt kapjuk, hogy a kontúrgörbe e körökre illeszkedő *3*, $3^{\times}$ és *4*, $4^{\times}$ pontjai az aequatorkör és a torokkör második képsíkra merőleges átmérőjének végpontjai.

Az első kontúrgörbe pontjainak szerkesztésénél felhasználhatjuk a parallelkör-érintő-kúp módszert is. Ha e módszerrel az u görbének a p_5 parallelkörön lévő pontjait kívánjuk nyerni, a kúp megszerkesztett csúcspontján vezetünk első vetítősugarat és meghatározzuk a kúpnak a vetítősugárra illeszkedő érintősíkján a p_5 parallelkörre illeszkedő érintési pontját. Ha a parallelkör síkjának a vetítősugárral való metszéspontja D, akkor e pontból a p_5 parallelkörhöz vont érintők érintési pontjai a keresett pontok. E végett a p_5 parallelkört a főmeridiánsíkban lévő átmérője körül a főmeridiánsíkba forgatjuk, mivel e forgatásnál D helybenmaradó pont, D'' pontból a beforgatott parallelkörhöz vont



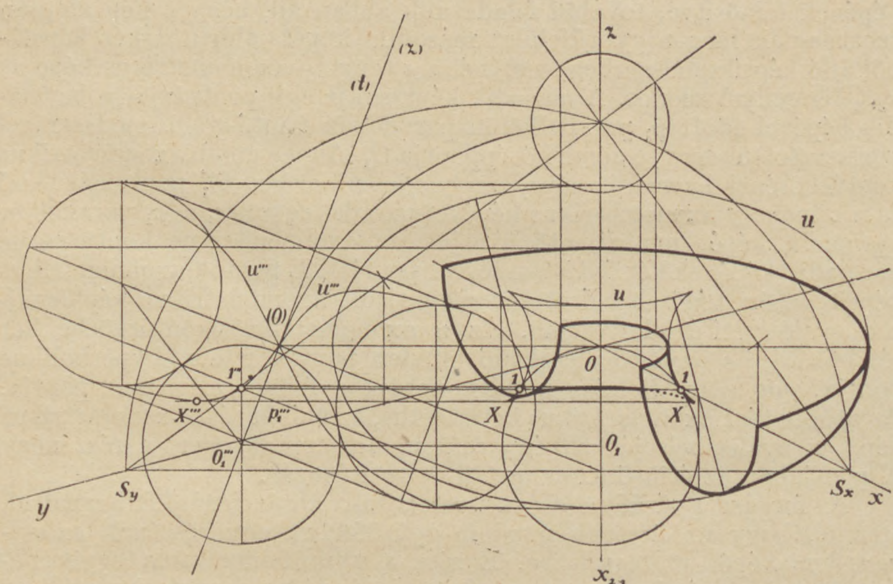
148. ábra.

érintők érintési pontjai a keresett pontok beforgatottjai. Ha e pontok közül az egyik (5), akkor e pont második képe a p_5 kör második képén ott van, ahol az (5) ponton átmenő és t'' egyenessel parallel egyenes azt metszi, ugyanakkor az $\overline{5''(5)}$ távolság az 5 pontnak távolsága a főmeridiánsíktól, miből első képe megszerkeszthető.

Az első kontúrgörbének a felület főmeridiángörbére eső pontjai a főmeridiángörbe ama 6 és 7 pontjai, melyekben a főmeridiángörbe érintői első vetítősugarak, mert minden ilyen pontban a forgási felület érintősíkja első vetítősík.

Felvételünkben az első kontúrgörbének X_1 és X_2 pontjában az érintő első vetítősugár, aminek következménye, hogy e pontok első képei az első képkörrajz görbének csúcspontjai.

Amennyiben a forgási felület tengelye mindkét képsíkkal szemben általános helyzetű, akkor a felület első képkörrajzának szerkesztésénél bevezetünk az első képsíkra merőleges és a forgási felület tengelyével parallel új negyedik képsíkot, mivel a negyedik képsík a forgási felület tengelyével parallel, a forgási felület negyedik képe alapján e §-ban részletezett eljárással szerkesztjük meg a felület első képkörrajzát.



149. ábra.

A felület második képkörrajzának meghatározásánál a felület tengelyével parallel, de a második képsíkra merőleges új képsíkot vezetünk be.

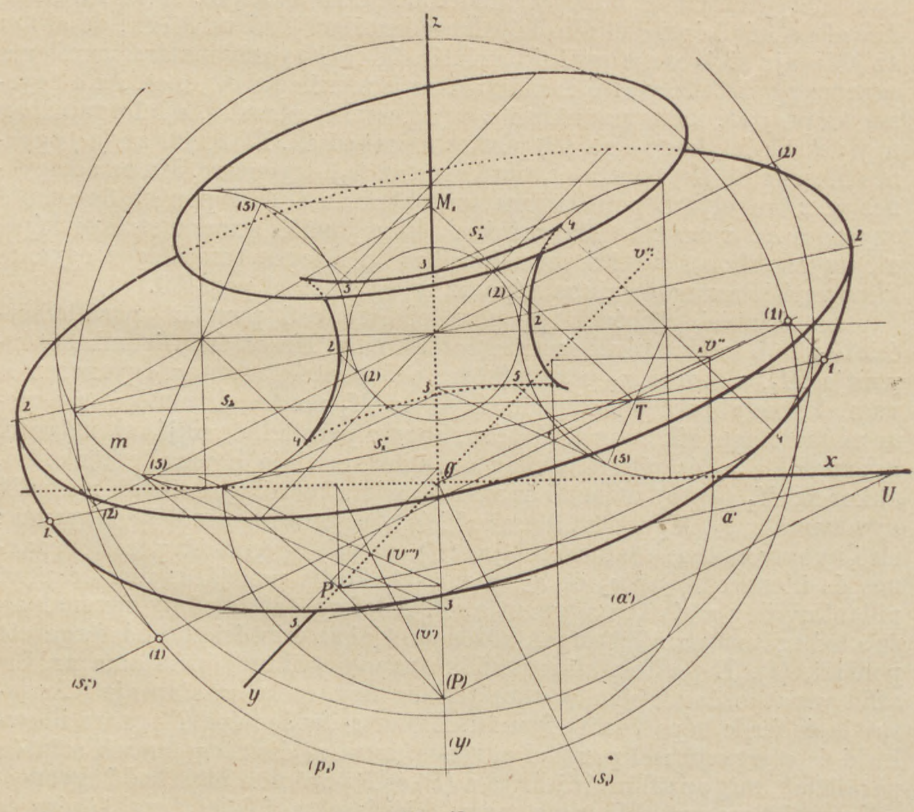
b) *Forgási felület képkörrajza orthogonális axonometriában.* Forgási felület axonometrikus képkörrajzának szerkesztését csak arra az esetre korlátozzuk, mikor a forgási felület tengelye az alaprajz síkjára merőleges és egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a felület tengelye a koordinátarendszer z tengelyével azonos. Az ábrázolandó forgási felület legyen oly gyűrűfelület, melynek középpontja a koordinátarendszer kezdőpontja és melynél a meridiánkör és tengely viszonylagos helyzete ismeretes (149. ábra). Mivel a felület axonometrikus képkörrajza az axonometrikus kontúrgörbe orthogonális projekciója az axonometrikus képsíkon, a képkörrajz szerkesztését az *a)* esetre vezetjük vissza, mégpedig oly módon, hogy az axonometrikus képsíkot minősítjük második képsíknak és a z tengely axonometrikus vetítősíkját harmadik képsíknak. Ekkor az eredeti feladat úgy is fogalmazható, hogy szerkesztessék ama forgási felület második képkörrajza, melynek tengelye harmadik képsíkra illeszkedő egyenes. E megjegyzés alapján utasítást nyertünk az axonometrikus képkörrajz pontjainak szerkesztésére, melynek egyes lépéseit két pont tényleges konstrukciójával ismertetjük.

A tengelykereszt adott axonometrikus képe mellett a nyomháromszöggel adjuk meg tengelykereszt és axonometrikus képsík viszonylagos helyzetét. Miután a z tengelyt axonometrikus képe körül a képsíkba forgattuk és kijelöltük azon a kezdőpont beforgatottját, megrajzoljuk a beforgatásban a gyűrűfelületnek a tengely axonometrikus vetítősíkján lévő képét. A nyert képkörrajzot a gyűrűfelület harmadik képének minősítve, további feladatunk abban áll, hogy e kép alapján szerkesszük meg a gyűrűfelület második képét abban a két képsíkból álló képsíkrendszerben, melynél a z tengely axonometrikus képe az $x_{2,3}$ tengellyel azonos. A második képkörrajz egy pontpárját a harmadik képével adott p_1 parallelkörön parallelkör-érintő-gömb módszerével szerkesztettük meg, e gömb középpontja O_1. Ahol a gömb axonometrikus kontúrkörének harmadik képe, amely a jelen esetben O_1''' ponton átmenő és a z tengely axonometrikus képével parallel egyenes, a p_1 parallelkör harmadik képét metszi, ott nyerjük az axonometrikus kontúrgörbe harmadik képének két födésben lévő 1 pontját. E pontok axonometrikus képeit az érintőgömb előzetesen megrajzolt axonometrikus képkörrajzára való vetítéssel nyerjük. Az u axonometrikus kontúrgörbe két részből áll, az egyikre illeszkedő minden pont a felület hyperbolikus pontja, míg a másik rész minden pontja a felület elliptikus pontja. Az utóbbi rész axonometrikus képe ovális, az előbbi rész axonometrikus képe az ovális belsejében négy csúcspontot mutat, mert e rész négy X pontjában az érintő axonometrikus vetítősugár.

A forgási gyűrűfelület axonometrikus ábrázolását felhaználtuk arra is, hogy az üresnek gondolt gyűrűfelület egy részének axonometrikus képét mutassuk be. E rész a gyűrűfelület ama egyik negyede, melyet részben az alaprajz síkja és részben az (xz) meridiánsík határol.

c) *Forgási felület képkörrajza klinogonális axonometriában.* Forgási felület klinogonális axonometrikus képkörrajzának szerkesztésénél múlhatlanul szükséges az axonometrikus képsík és vetítősugár viszonylagos helyzetének ismerete. Mivel e viszonylagos helyzet legkönnyebben kavalierperspektívában állapítható meg, itt kizárólag forgási felület kavalierperspektív képkörrajzának szerkesztésével fogunk foglalkozni. Az ábrázolandó felület oly körgyűrűfelület, melynek tengelye azonos a z tengellyel és legalsó parallelköre az alaprajz síkjára illeszkedik. Továbbá feltesszük, hogy a tengelykereszt adott ferde képe mellett az y tengelyen lévő rövidülés $q_y = \frac{2}{3}$ (150. ábra).

Az axonometrikus kontúrgörbe pontjait orthogonális parallel projekcióban két képsíkon szerkesztjük meg és a nyert pontokat a perspektíva törvényei szerint ábrázoljuk. A második képsíkot azonosítjuk a felrajz síkjával, e sík egyúttal a forgási felület főmeridiánsíkja s így e síkban felvehetjük a felület m meridiángörbéjét valódi nagyságban. Az első képsík azonos az alaprajz síkjával, illetve egy-egy parallelkörre illeszkedő síkkal. A vetítősugár különböző képeinek meghatározása végett vegyük fel az y tengely tetszőleges pontját és legyen a pont axonometrikus képe az y tengely axonometrikus képén P, akkor P és e pont eredetije meghatározza a v vetítősugár térbeli helyzetét. A v vetítősugár felrajza, vagyis második képe, v'', az y tengely axonometrikus képével parallel. A vetítősugár alaprajzát, melynek axonometrikus képe a z tengellyel parallel, az alaprajz síkjával együtt az x tengely körül



150. ábra.

a második képsíkba forgatjuk. A leforgatott alaprajz egyik pontja az y tengely leforgatottján (P), ahol az $\overline{O(P)}$ távolság a rajzban feltüntetett $\overline{OP}$ távolság felének háromszorosa, mert $q_y=\frac{2}{3}$, másik pontja a vetítősugár alaprajzának forgatásánál ama helybenmaradó pontja, mely pontban az alaprajz axonometrikus képe az x tengelyt metszi. E két pont összekötő egyenese, (v'), a vetítősugár alaprajzának leforgatottja a második képsíkba. Ezek után mondhatjuk, hogy eredeti feladatunk egyik része abban áll, hogy szerkesszük meg orthogonális parallel projekcióban két képsíkon a forgási felület ama körülírt érintőhengerének érintési görbéjét, melynek alkotói a v vetítősugárral parallelek, ahol a vetítősugár második képe az y tengely axonometrikus képével parallel egyenes, és első képe a két képsík egyesítése után (v'). Feladatunk ezt követő része pedig abban áll, hogy a nyert görbe pontjainak klinogonális axonometrikus képeit szerkesszük meg.

Az érintési görbének van szimmetria meridiánsíkja, e sík a vetítősugárral parallel meridiánsík. E vetítő meridiánsík első nyomvonala a két képsík egyesítése után átmegy az O pontra illeszkedő és (v') egyenessel parallel egyenesbe, jele: (s_1). Mivel az érintési görbe szimmetrikusan fekvő pontjainak összekötő egyenesei a vetítő meridiánsíkra merőleges egyenesek, megállapítjuk ilyen egyenessel parallel a egyenes alaprajzának leforgatottját és klinogonális axonometrikus képét. A vetítő meridiánsík a két képsíkból álló képsíkrendszerben első vetítősík, de akkor az alaprajz síkjában a vetítő meridiánsík első nyomvonalára merőleges egyenes egyúttal a vetítő meridiánsíkra is merőleges egyenes. Az a egyenes alaprajzát, mely az eredeti a egyenessel is parallel, a leforgatásban úgy vettük fel, hogy az a (P) pontra illeszkedjék. E szerint az (a') egyenes illeszkedik (P) pontra és merőleges az (s_1) egyenesre. Ha ez az egyenes az x tengelyt U pontban metszi, akkor az U és P pontok összekötő egyenese az a egyenes alaprajzának klinogonális axonometrikus képe, a', ugyanakkor a vetítő meridiánsíkra merőleges tetszőleges egyenes klinogonális axonometrikus képe az a' egyenessel parallel.

Az érintési görbének p_1 parallelkörre eső pontjait parallelkör-érintő-gömb módszerével szerkesztettük meg. Ha az érintőgömb középpontja M_1, akkor a p_1 parallelkörre eső pontok azon az egyenesen is vannak, melyben a parallelkör síkját az M_1 ponton átmenő és v egyenesre merőleges sík metszi. Feltéve, hogy a parallelkör síkjának második nyomvonala s_2 és pillanatnyilag az alaprajz síkja a parallelkör síkja, akkor az M_1 ponton átmenő és vetítősugárra merőleges síknak második nyomvonala, $s_2^\times$, M_1 pontra illeszkedő és v'' egyenesre merőleges egyenes; első nyomvonalának leforgatottja, $(s_1^\times)$, az (a') egyenessel parallel egyenes és illeszkedik az s_2 és $s_2^\times$ egyenesek közös pontjára, mert e pont pillantanyilag a sík tengelypontja, T. A leforgatott első nyomvonalnak és a leforgatott parallelkörnek közös pontjai az érintési görbe leforgatott pontjai, (1). E pontok klinogonális axonometrikus képeit ama axiális affin vonatkozás alapján szerkesztettük meg, mely az alaprajz leforgatottja és ferde képe között fennáll. Ekkor $s_1^\times$ ferde képe T pontra illeszkedő és a' egyenessel parallel egyenes, mert $s_1^\times$ és a' egyenesek szintén parallelek, míg az affinitás iránya a (P) és P pontokra illeszkedő egyenessel van jellemezve. Ha ugyanazon eljárással a felület torokkörére és aequatorkörére eső képkörrajzpontokat szerkesztjük meg, akkor a képkörrajz oly pontjait nyerjük, mely pontokban a képkörrajz érintői a z tengellyel parallel egyenesek, mert az így megszerkesztett 2 pontokban a felületi érintősíkok z tengellyel parallel axonometrikus vetítősíkok.

Az érintési görbének a vetítő meridiánsíkra illeszkedő pontjainak axonometrikus képei a jelen esetben a z tengelyre illeszkedő pontok. E pontokat a meridián-érintő-henger módszerével szerkesztettük meg. A vetítő meridiánsíkot a benne fekvő vetítősugárral együtt, melynek második képe v'' és első képének leforgatottja (s_1), a főmeridiánsíkba forgattuk és az így nyert ${}_1v''$ egyenessel parallel főmeridiángörbeérintők z tengelyen lévő metszéspontjai a keresett pontok. E pontok a rajzban a *3* pontok, melyekben a képkörrajz érintői az a' egyenessel parallel egyenesek.

Az axonometrikus képkörrajznak a főmeridiángörbére eső pontjait szintén meridián-érintő-henger módszerével állapítottuk meg. E *4* pontokat tekintettel arra, hogy a főmeridián-érintő-henger második vetítőhenger, úgy nyertük, hogy a főmeridiángörbe ama érintőinek érintési pontjait állapítottuk meg, melyekben az érintők a vetítősugár második képével parallelek. Mivel e pontok a felrajz síkjában lévő pontok, minden ilyen pontnak felrajza és axonometrikus képe két azonos pont. Még megjegyezzük, hogy a pontokban a képkörrajz érintői az y tengely axonometrikus képével parallel egyenesek, mert a főmeridián-érintőhenger alkotói a térben az y tengellyel parallelek.

A rajzban még feltüntettük az érintési görbének a $[zy]$ meridiánsíkra eső pontjait is ugyancsak meridián-érintőhenger módszerrel. E végett a $[zy]$ síkot és a vetítősugárnak benne fekvő oldalrajzát a z tengely körül a főmeridiánsíkba forgattuk. A vetítősugár beforgatott oldalrajzával, a (v''') egyenessel, parallel főmeridián-érintők érintési pontjai a keresett pontok beforgatottjai, ezek az (*5*) pontok. Az ábrában az üresnek gondolt gyűrűfelületnek külső felső negyedét eltávolítottuk, hogy a képkörrajz csúcspontjai jobban érvényesüljenek.

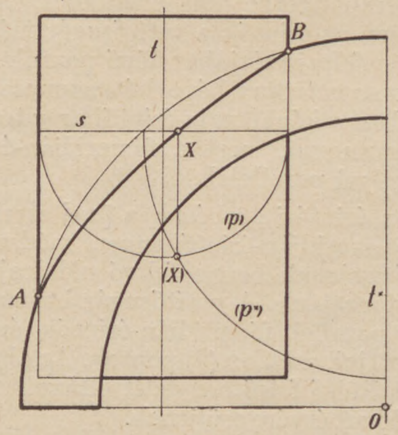
86. §. Forgási felületek áthatási görbéje. **F** és $\mathbf{F}^{\times}$ adott forgási felületek áthatási görbéjének szerkesztésénél segédfelületeket alkalmazunk. Az $\mathbf{F}_1$ segédfelület az **F**, illetve $\mathbf{F}^{\times}$ felületet az m_1, ill. az $m_1^{\times}$ görbében metszi, e görbék közös pontjai az áthatási görbe pontjai. Segédfelületekül oly felületeket használunk, melyeknek az adott felületekkel való áthatási görbéit lehetőleg előnyösen állapíthajtuk meg.

Adott forgási felületek áthatásának szerkesztésénél a következő eseteket különböztetjük meg :

a) *a felületek tengelyei azonos egyenesek,*
b) « « « *parallel egyenesek,*
c) « « « *végesben fekvő pontokra illeszkedő egyenesek,*
d) « « « *kitérő egyenesek.*

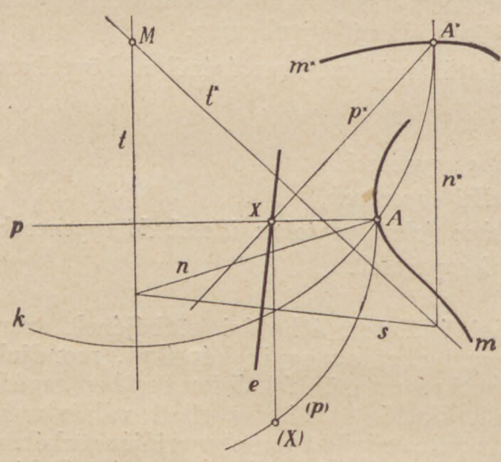
a) Azonos tengelyű forgási felületek áthatási görbéjének szerkesztésénél a $t \equiv t^{\times}$ összeeső tengelyeket az egyik képsíkra, mondjuk az első képsíkra merőleges helyzetben vesszük fel. Jelen esetben segédfelületnek a közös tengelyre illeszkedő tetszőleges síkot választunk, e sík az egyik forgási felületet az m, a másikat az $m^{\times}$ meridiángörbében metszi, a két meridiángörbe közös pontjai az áthatásnak pontjai. Tekintetbe véve azt, hogy forgási felületnél a meridiángörbe bármely pontja által leírt parallelkör minden pontja felületi pont, az azonos tengelyű két forgási felület meridiángörbéinek közös pontjai által leírt parallelkörökre illeszkedő minden pont a két felület közös pontja. E szerint a két felület áthatása a közös parallelkörökből áll.

b) Parallel tengelyű forgási felületek áthatási görbéjének szerkesztésénél a segédfelületek mindkét tengelyre merőleges síkok. Egy ilyen sík mindkét felületet egy vagy több parallelkörben metszi, e parallelkörök minden közös pontja áthatási pont. A tényleges kivitelnél a tengelyek összekötő síkját azonosítjuk a rajz síkjával, ugyanakkor a segédsíkok a rajz síkjára nézve vetítősíkok. A segédsíkban fekvő parallelkörök közös pontjait leforgatásban szerkesztjük, majd a nyert pontokat felállítjuk. Így szerkesztettük meg a 151. ábrában forgásihenger és gömb áthatását, ahol a gömböt oly forgási felületnek tekintettük, melynek $t^{\times}$ tengelye a forgási henger t tengelyével parallel. Az áthatás tetszőleges X pontját ama segédsíkkal szerkesztettük meg, melynek a rajz síkján lévő s nyomvonala mindkét tengelyre merőleges. A segédsík által kimetszett parallelköröket a sík nyomvonala körül a rajz síkjába forgattuk stb. Az áthatás negyedrendű térgörbe, mert a felületek másodrendű felületek. A görbe vetülete a rajz síkján duplaprojekció, s így e képe másodrendű görbének egy része. Felvételünk mellett a görbe két részből áll: melynek csak egyik részét tüntettük fel. E rész képének végpontjai A és B, a henger kontúralkotóinak és a gömb kontúrkörének metszéspontjai. A másik rész képe a szerkesztett résszel szimmetrikus, a szimmetria tengelye a gömb középpontjára illeszkedő és a henger tengelyére merőleges egyenes.



151. ábra.

c) Véges pontra illeszkedő tengelyek mellett két forgási felület áthatási görbéjének szerkesztésénél segédfelületeknek oly gömböket alkalmazunk, melyeknek közös középpontja a tengelyek illeszkedési pontja. Ilyen gömb, mivel mindkét forgási felülettel koaxiálisnak tekinthető, mindkét felületet parallelkörökben metszi, e parallelkörök, mint egy gömbön fekvő körök metszik egymást, minden metszéspont az áthatási görbe pontja. A 152. ábrában az áthatási görbe egy pontjának szerkesztését mutatjuk be.



152. ábra.

Legyen a t és $t^{\times}$ tengelyek összekötő síkja a rajz síkja, melyet egyúttal képsíknak is választunk (152. ábra). A t tengelyű forgási felület főmeridiángörbéjének egy része m, a máiké $m^{\times}$. Messe a tetszőleges sugarú segédgömbnek k főmeridiánköre, melynek középpontja a tengelyek közös M pontjával azonos, az m meridinángörbét az A és az $m^{\times}$ görbét az $A^{\times}$ pontban, akkor a segédgömb és egyik forgási felület közös parallelkörének orth. képe a képsíkon az A ponton átmenő t tengelyre merőleges egyenes, a segédgömb és másik forgási felület közös parallelkörének orth. képe a képsíkon az $A^{\times}$ ponton átmenő és $t^{\times}$ tengelyre merőleges egyenes. A két egyenes közös pontja X, a két parallelkör két közös pontjának közös képe a képsíkon. Így változó sugarú segédgömbökkel megszerkesztve rendre az áthatási görbe pontjait a képsíkon az áthatás duplaprojekcióját nyerjük, mert minden pont két pont közös képe. Amennyiban az áthatási görbe új képsíkon lévő képét kívánjuk megrajzolni, ismerni kell a tetszőleges X pontnak távolságát a rajz síkjától. E végett az X pontra illeszkedő p, vagy $p^{\times}$ parallelkört a rajt lévő ponttal együtt a rajz síkjába forgatjuk és akkor a pont képe és leforgatottja által meghatározott távolság az X pont rendezője. Az ábrában még feltüntettük az áthatási görbe X pontbeli érintőjének szerkesztését. Az egyik felületre nézve az X pontra illeszkedő felületi normális nyompontja a t tengely ama pontja, melyben az m főmeridiángörbének A pontbeli n normálisa metszi. Ha ugyanúgy megszerkesztjük az X pontnak a másik felületre vonatkozó normálisának nyompontját, akkor e nyompontok összekötő s egyenesre merőleges az X pontbeli e érintő képe, mivel az érintő a normálisok összekötő síkjára merőleges.

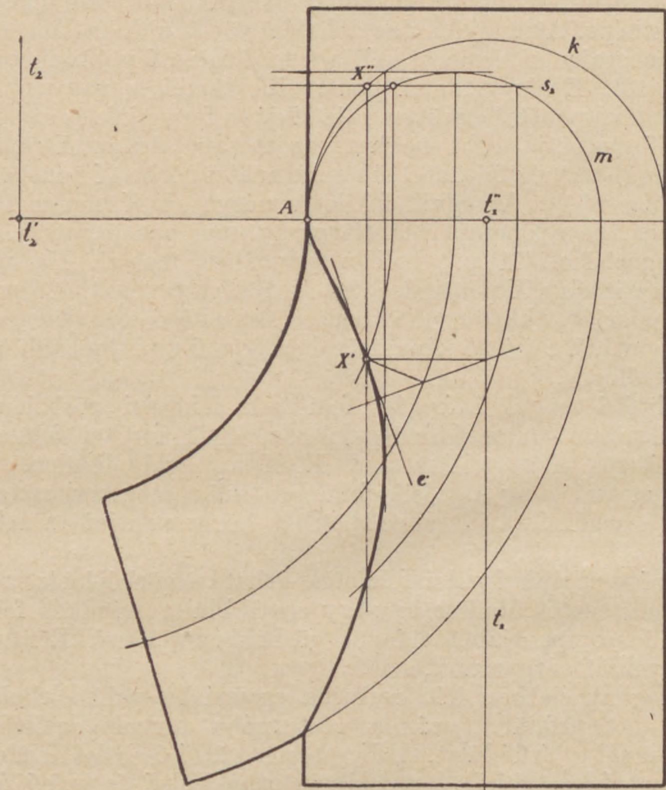
d) Kitérő tengelyű forgási felületek áthatási görbéjének szerkesztésénél általában segédfelületnek az egyik forgási felület tengelyére merőleges síkot választunk. E sík az egyik felületet parallelkörökben metszi, míg a másik felületet külön megszerkesztendő síkgörbében, a segédsíkra illeszkedő görbék közös pontjai az áthatásnak pontjai.

Kitérő tengelyű forgási felületek áthatási görbéjének szerkesztésénél vannak esetek, mikor egy-egy segédfelület mindkét felületet a konstrukció szempontjából előnyös görbékben metszi. Erre vonatkozólag két példát tárgyalunk.

1. A gyakorlatban két csatorna egymásba való torkolásánál a főcsatorna hengerfelület, míg a csatornába torkoló mellékcsatorna a betorkolásnál gyűrűfelület. A főcsatorna külső és belső felülete egyenes körhengerfelületekből, a mellékcsatorna külső és belső felülete a betorkolásnál forgási körgyűrűfelületekből áll (153. ábra). Egyszerűsítés kedvéért legyen a főcsatorna külső felülete forgási henger, a mellékcsatornának érdekelt részében forgási gyűrűfelület. A hengerfelület t_1 tengelyét és a gyűrűfelület torok- és aequatorkörét az első képsíkban vettük fel, még pedig úgy, hogy a henger egyik első kontúralkotója az A pontban érintse a torokkört (153. ábra). E szerint az A pontban a két felületnek az érintősíkja közös, az A pont az áthatásnak duplapontja. Második képsíknak a gyűrűfelület tengelyére illeszkedő és a henger alkotóira merőleges síkot választottuk. Legyen a henger második nyomköre k és a gyűrűfelület egyik főmeridiánkörének felső része m. A két felület áthatásának egyes pontjait ekkor az első képsíkkal parallel segédsíkokkal állapítjuk meg. Tudniillik az első képsíktól tetszőleges távolságban felvett s_2 nyomvonalú segédsík a hengert alkotókban, a gyűrűfelületet parallelkörökben metszi, ezek közös pontjai az áthatás pontjai. Az egész áthatásra nézve a máso-

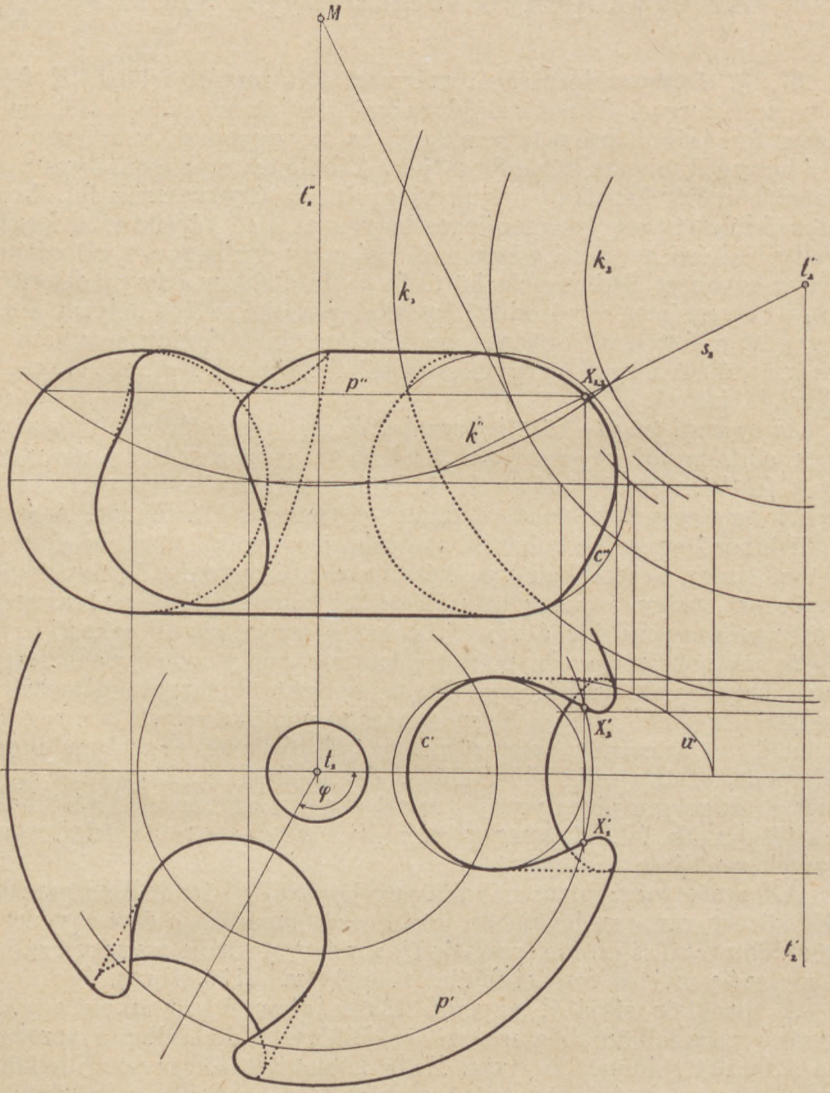
dik képsík és az első képsík szimmetria sík, ezért a rajzban az áthatásnak csak az első térnegyedben lévő részének első képét mutatjuk be.

2. A második példában két forgási körgyűrűfelület áthatási görbéjét szerkesztettük meg ama feltétel mellett, hogy az első gyűrűfelület t_1 tengelye illeszkedik a második gyűrűfelület aequatorkörének síkjára. Ugyanezt a síkot az ábrázolásnál második képsíknak tekintjük, míg az első képsíkot a t_1 tengelyre merőleges helyzetben



153. ábra.

gondoljuk (154. ábra). Legyen a második gyűrűfelület aequatorköre k_1, torokköre k_2, egyik meridiánsíkjának második nyomvonala s_2 és e sík által kimetszett egyik meridiánkör második képe k''. Ama gömbök középpontjai, melyeknek síkmetszete a k meridiánkör, a k kör középpontjára illeszkedő és a k kör síkjára merőleges egyenesen vannak. Mivel ez az egyenes a második gyűrűfelület aequatorkörének síkjára illeszkedő egyenes és feltevésünk szerint az első gyűrűfelület tengelye szintén e síkra illeszkedő egyenes, a két egyenes M metszéspontja oly gömb középpontja, mely átmegy a k meridiánkörön és az első gyűrűfelületet parallelkörökben metszi. A megállapított p parallelkör és k meridiánkör közös pontjai az áthatásnak pontjai. A második gyűrűfelület meridiánköreinek változtatásával az ismertetett eljáráshoz hasonlóan az áthatás minden pontját szerkeszthetjük meg. A c (c', c'') áthatási görbének első projekciójának lényeges pontja az első gyűrűfelület aequatorkörére eső pont, e pont szerkesztésénél meghatároztuk az aequatorkör síkjának a második forgási felülettel való u síkmetszetét, a síkmetszet első képének és az aequatorkör első képének metszés-



154. ábra.

pontja a keresett pont első képe. A két forgási felület áthatási görbéjének második képe duplaprojekció, mert a második képben szerkesztett minden pont az áthatás két pontjának második képe. Az áthatási görbének jobb szemléltetése végett a második gyűrűfelületet az áhtatással együtt az első gyűrűfelület tengelye körül tetszőleges φ

szöggel elforgattuk és úgy eredeti helyzetében, mint elforgatott helyzetében a két felület által határolt közös testrész elhagyásával csak a tömörnek gondolt első gyűrűfelület ábrázolását emeltük ki.

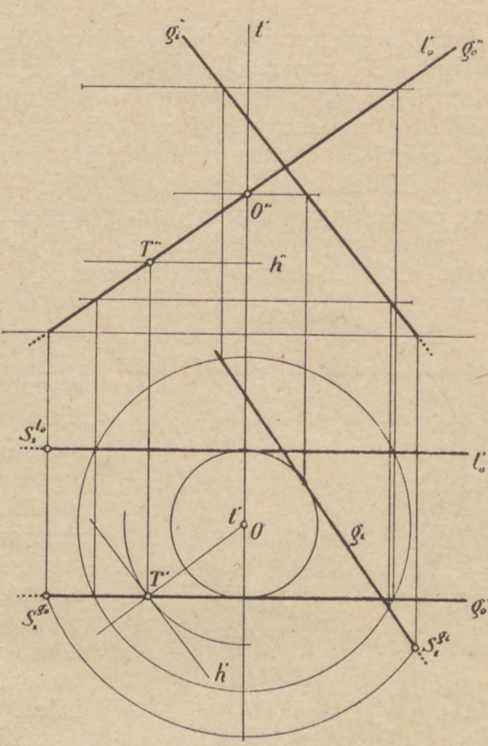
Az egyköpenyű forgási hyperboloid.

87. §. Egyenes forgásából származtatott forgási felület. E fejezetben ama forgási felület tulajdonságait fogjuk megállapítani, mely egyenes forgásából származik akkor, ha az egyenest vele szemben kitérő helyzetű tengely körül forgatjuk. A felületet orthogonális parallel projekcióban két képsíkon fogjuk tárgyalni és úgy vesszük fel, hogy a forgásfelület t tengelye merőleges legyen az első képsíkra. A forgási tengellyel kitérő helyzetű g egyenest egészen tetszőlegesen választjuk, de ha az egyenest első tengely körül forgatjuk, akkor a forgatott egyenes két helyzetében a második képsíkkal parallel, e két helyzet közül az egyiket a forgatott egyenes kezdőhelyzetének fogjuk mondani és g_0-lal jelöljük. A forgatott egyenes egyéb helyzeteit a $g_1, g_2, \ldots, g_i, \ldots$ jelekkel látjuk el.

Az egyenes tengely körüli forgatásából oly forgási felületet nyerünk, melyen végtelen sok egyenes van. Ezekről az egyenesekről azt mondjuk, hogy a felületen sereget alkotnak. A felület minden pontján átmegy a seregnek egy egyenese, tehát a felület egyenesvonalú felület. A sereg két különböző egyenese sohasem metszheti egymást, mert ha feltesszük azt, hogy a seregben van két illeszkedő egyenes és figyelembe vesszük azt, hogy a sereg tetszőleges egyenese forgatással a sereg bármely más egyenesébe átvihető, akkor a sereg két illeszkedő egyenesének metszéspontja oly pontot jelentene, mely az egyenes forgatásánál helyét nem változtatja. De tengely körüli forgatásnál csak a tengelyre illeszkedő pontok helybenmaradó pontok, vagyis a sereg két illeszkedő egyenesének metszéspontja feltétlenül tengelyre illeszkedő pont, már pedig feltételünk értelmében a forgatott egyenesnek a tengelyen nincs pontja, mivel a g és t egyenesek kitérő helyzetét tételeztük fel. *A sereg alkotói kitérők, a sereget a felület torzseregének mondjuk.*

A forgatott g egyenes minden pontja parallelkört ír le, e parallelkörök között van egy legkisebb kör, ennek sugara a g és t egyenesek legrövidebb távolsága, középpontja O, a g és t normális transzverzálisának metszéspontja a forgási felület tengelyével (155. ábra).

A torokkör síkjától egyenlő távolságban fekvő síkok egyenlő nagyságú parallelkörökben metszik a felületet, de akkor a torokkör síkja a felület szimmetria síkja. Ha a felület tetszőleges parallelkörén felveszünk pontot és e pontot összekötjük a torokkör O középpontjával, akkor ez az egyenes metszi a felvett parallelkör szimetrikusát is és az egyenes ama darabját, melyet rajta a parallelkörökkel való metszéspontok határolnak, az O pont felezi. Minden ilyen egyenes egy-egy meridiánsíkban van, tehát a torokkör középpontjára illeszkedő egyenes a felület meridiángörbéjét oly pontpárokban metszi, mely pontpárok pontjai az O ponttól egyenlő távolságban vannak, szóval az O pont minden meridiángörbének középpontja, ezért az O pontot a felület középpontjának, centrumának mondjuk.



155. ábra.

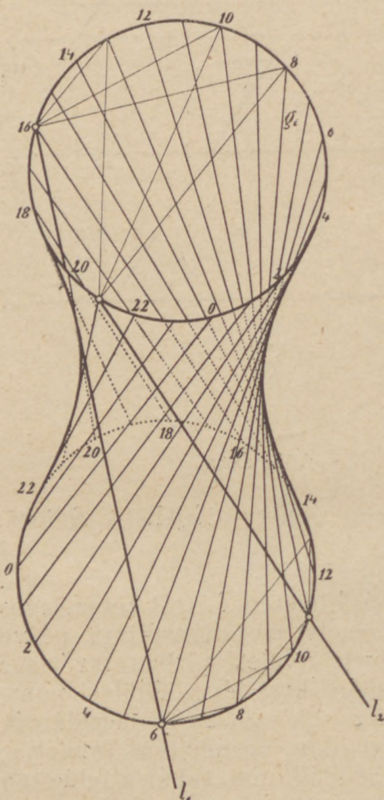
88. §. Érintősík szerkesztése. A g_0 egyenes tetszőlegesen felvett T pontjában az érintősík szerkesztésére felveszünk a T ponton átmenő két felületi görbét, az egyik a g_0 egyenes, a másik a T ponton átmenő parallel kör (155. ábra). A parallelkör T pontbeli érintője és a g_0 egyenes összekötő síkja a felület T pontjában az érintősík. Az érintősík szerkesztésénél használt parallelkör T pontbeli érintője a forgásfelület felvett helyzete mellett az érintősík első fővonala. Ha a g_0 alkotó másmás pontjában szerkesztjük meg a felület érintősíkját, az érintősíkok közös egyenese a g_0 alkotó, de az érintősíknak érintési pontjára illeszkedő első fővonala pontrólpontra változik. Egy alkotó pontjaihoz tartozó érintősíkok tehát különböző síkok, s így az egyenesvonalú forgási felületünk nem lehet kifejthető felület, a felület torzfelület.

89. §. A felület két torzserege. Forgásfelületen felvett tetszőleges görbe vonal szimmetrikusa a felület bármely meridiánsíkjára nézve megint felületen fekvő görbe, mert a felvett felületi görbe tetszőleges pontjának szimmetrikusa, bármely meridiánsíkra nézve felületi pont, t. i. a felvett ponton átmenő parallelkört a kiválasztott meridánsík átmérőben metszi, ez az átmérő a parallelkör szimmetria tengelye, s így a pont szimmetrikus megfelelője a parallelkörön, tehát a felületen fekvő pont.

A g_0 egyenes felületi alkotó, ennek szimmetrikusa bármely meridiánsíkra nézve a felületen fekvő egyenes. Ha meridiánsíkul a felület főmeridiánsíkját választjuk, akkor a g_0 egyenes szimmetrikus egyenese l_0, vele parallel, mivel g_0 a főmeridiánsíkkal parallel (155. ábra). Ha az így nyert l_0 egyenest a felület forgási tengelye körül forgatjuk, akkor minden helyzetében az eredeti felületen fekvő egyenes, mert bármely l egyenes szimmetrikus egyenesét választva, tetszőleges meridiánsíkra megint egy g alkotót nyerünk. Tehát a felületen az egyeneseknek két rendszere van, a g és l alkotók torzserege. Mindkét sereg alkotói a felület tengelyével egyenlő szöget alkotnak.

A két seregbeli alkotók viszonylagos helyzetét vizsgálva kimutathatjuk, hogy tetszőleges g alkotóra illeszkedő tetszőleges T pontján át megy a felület egy l alkotója. Vegyük fel a g alkotó kezdő helyzetében az erre illeszkedő T pontot. A T pontra illeszkedő l

alkotót úgy nyerjük, hogy felvesszük a felület ama meridiánsíkját, mely a T pontra illeszkedik és e meridiánsíkra nézve megszerkesztjük a g_0 szimmetrikusát. A szimmetrikus egyenes mindenesetre l alkotó és átmegy a T ponton, mert a választott meridiánsík minden pontja a felvett szimmetriában önmagának megfelelő pont. Szóval a felület tetszőleges g alkotójára illeszkedő tetszőleges ponton át egy és csakis egy l alkotó megy. Továbbá kimutatható, hogy a felület két, nem egy seregbe tartozó alkotója mindig metszi egymást. Vegyük fel a két különböző seregbeli g és l alkotókat és vegyük fel a felület teszőleges parallelkörét, messe e parallelkör a g alkotót A pontban, az l alkotót B pontban. Az A és B pontok mindenesetre egy meridiánsíkra nézve szimmetrikus pontok, e meridiánsík az $\overline{AB}$ távolságot merőlegesen felezi. A g egyenesnek e meridiánsíkra nézve szimmetrikus egyenese az l sereg egy alkotója, még pedig eredetileg felvett alkotóval azonos alkotó, mert ellenkező esetben a B pont két különböző l seregbeli alkotó közös pontja volna, holott egy seregbe tartozó alkotók nem metszhetik egymást.



156. ábra.

Mivel a felület minden pontján át két alkotó megy, e körülmény felhasználható a felület érintősíkjának szerkesztésére. Meghatározzuk a felület felvett pontján átmenő két alkotót, ez alkotók összekötő síkja a felvett ponthoz tartozó érintősík.

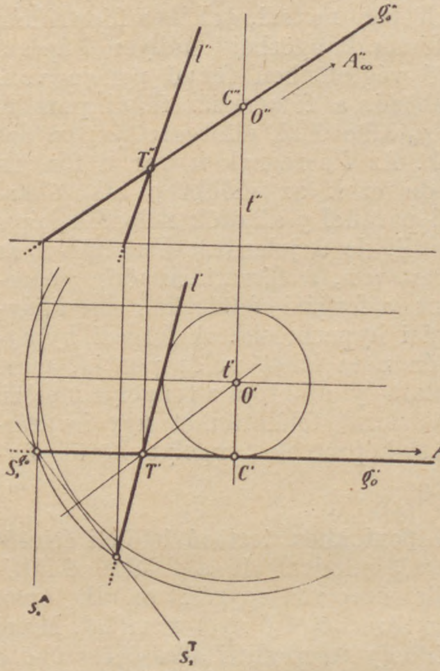
A felület két torzseregével kimutathatjuk azt is, hogy egy-egy torzsereg végtelen sokféleképpen két projektív síksor sugárképződményeként állítható elő. Vegyük fel a felület tetszőleges parallelkörét, a g_i és az l seregbeli l_1 és l_2 alkotókat (156. ábra). Ha a g_i alkotó a g seregbeli alkotókat befutja és l_1, l_2 fix marad, akkor az l_1g_i és l_2g_i síksorok projektív síksorok, ha a g sereg egy alkotójára illeszkedő síkok megfelelők, mert a megfelelő síkok a felvett parallelkör síkján lévő megfelelő nyomvonalainak pontképződménye a felvett parallelkör. E szerint azt is mondhatjuk, hogy a mozgó g_i alkotó mindenkori nyompontja egészen tetszőlegesen felvett síkban ama két-két egyenes metszéspontja, melyekben két-két projektív megfelelő sík a tetszőlegesen felvett síkot metszik. Tehát a felület minden síkmetszete két projektív sugársor pontképződménye, vagyis kúpszelet, a felület másodrendű forgási felület.

90. §. A felület meridiángörbéje. A főmeridián egyes pontjait ott nyerjük, ahol az egyes felületi alkotók a főmeridiángörbe síkját metszik. Ha megszerkesztjük egy alkotó és főmeridiánsík metszéspontjának két képét, akkor az alkotó második képe a főmeridiángörbe második képének érintője, mert a főmeridián második képe a felület második képkörrajza. Az alkotó és főmeridiánsík metszéspontjának második képe az a pont, melyben az alkotó második képe a főmeridiángörbe második képét érinti. Így megszerkeszthetjük a második képkörrajz annyi pontját és érintőjét, amennyire annak megrajzolása szempontjából szükségünk van.

Minden sík a felületet kúpszeletben metszi, tehát a főmeridián síkja is. Kérdés, hogy a felület főmeridiángörbéje milyen kúpszelet? A kúpszeletnek két különböző végtelenben fekvő pontja van, mert a g seregnek van két különböző, a főmeridiánsíkkal parallel alkotója, az egyik a g_0, a másik a g_0 alkotónak elforgatottja, ha azt a tengely körül 180°-kal elforgatjuk. Az l seregnek is van a főmeridiánsíkkal parallel két alkotója, de ezek az előbbi g alkotókkal parallel alkotók. A főmeridiánsíkkal parallel g alkotók második képei a főmeridián második képének érintői, de a jelen esetben, mivel az érintők érintési pontja a végtelenben van, a főmeridiángörbe második képének asymptotái. E szerint a forgási felületünk meridiángörbéje hyperbola, a felület a forgási hyperboloid. A forgási hyperboloidnak a forgási felület tengelyén nem lehet valós pontja, mert ez azt jelentené, hogy a felület valamely alkotója a tengelyt metszi, amit kezdettől fogva kizártunk. E szerint felületünket úgy is származtatjuk, hogy adott hyperbolát képzetes tengelye körül forgatunk.

91. §. Egy alkotóra illeszkedő pontokhoz tartozó felületi érintősíkok. A felület g_0 alkotóján átmenő minden sík a felület érintősíkja. A g_0 alkotóra illeszkedő sík jellemezve van egyrészt az alkotóval, másrészt az alkotó első nyompontján átmenő első nyomvonallal. Mivel e felület érintősíkja mindig egy g és egy l seregbeli alkotó összekötő síkja és az érintési pont a két alkotó metszéspontja, továbbá az érintősík mindig merőleges az érintési ponton átmenő meridiánsíkra, a g_0 alkotóra illeszkedő érintősík érintési pontját úgy kapjuk, hogy megszerkesztjük azt a meridiánsíkot, mely az érintősíkra merőleges. E meridiánsík és g_0 alkotó közös pontja az érintősík érintési pontja. E szerint az érintési pont első képét úgy nyerjük, hogy a forgási tengely pontszerű első képéből az érintősík első nyomvonalára merőleges egyenest vezetünk, ahol ez az egyenes metszi a g_0 alkotó első képét, az lesz az érintősík érintési pontjának első képe (157. ábra). Ha ugyanezt a szerkesztést a g_0 alkotóra illeszkedő más-más síkra elvégezzük, akkor azt látjuk, hogy az érintősík első nyomvonalára mindig merőleges az az egyenes, mely a t' pontra illeszkedően az alkotó első képén az érintési pont első képét kimetszi. A g_0 alkotóra illeszkedő érintősíkok első nyomvonalai egy az első képsíkban fekvő sugársort írnak le, e sugársor minden sugarához tartozik egy erre merőleges sugár a t' körüli sugársorból, utóbbi kimetszi az alkotó első képén ama érintési pont első képét, melyhez tartozó érintősík első nyomvonala az első sugársor kiválasztott sugara. A két sugársor sugarainak eme összetartozandósága a sugársorok sugarai között projektív vonatkozást állapít meg. Mivel az érintősíkok nyomvonalainak sugársora az érintősíkok sorával perspektív és a t' pont körüli sugársor az érintési pontok első képeivel perspektív, mondhatjuk, hogy az egy alkotóra illeszkedő érintősíkok sora és e síkok érintési pontjaiból alkotott pontsor pontjai projektív vonatkozásban vannak, ha egy sík megfelelőjeként a sík érintési pontját választjuk.

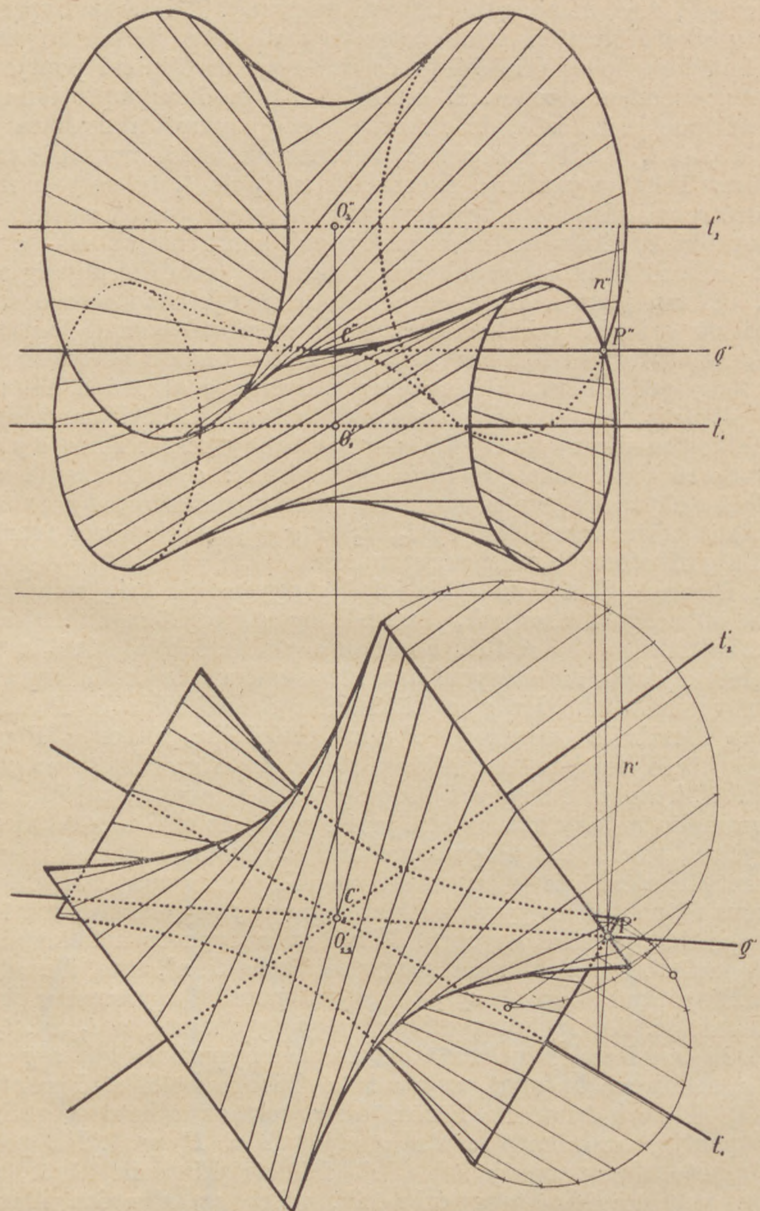
Legyen a g_0 alkotóra ileszkedő sík első nyomvonala az alkotó első képére merőleges, akkor e felvett érintősík érintési pontja az alkotó végtelenben fekvő pontja, szóval az érintősík érintési pontja a felület végtelenben fekvő pontja. Oly sík, mely a felületet végtelenben fekvő pontjában érinti, a felület asymptotikus síkja. A szerkesztésből kitűnik, hogy a g_0 alkotóra illeszkedő asymptotikus sík a g_0 alkotó és t tengely normális transzverzálását is tartalmazza, ahol a normális transzverzálisnak metszéspontja a felület tengelyével a felület középpontja. Szóval felületünknél minden asymptotikus sík a felület középpontjára illeszkedő sík. Ha a g_0 egyenest forgatjuk a felület tengelye körül, ugyanakkor az asymptotikus sík a felület középpontjára illeszkedően forog, tehát az itt tárgyalt felületnél az összes asymptotikus síkok forgási kúpot burkolnak, a felület asymptotikus kúpját. Az asymptotikus kúp tengelye a felület tengelye, csúcspontja a felület középpontja és félnyílása felületi alkotó és tengely által bezárt szög. Az asymptotikus kúp a g_0 egyenes forgásából származtatott forgási felületnél a felület ama iránykúpja, melynek csúcspontja a forgási felület középpontja.



157. ábra.

A forgási felület egy alkotójára illeszkedő felületi érintősíkok közül kiemeljük az alkotó centrálsíkját. Az alkotóra illeszkedő centrálsík az asymptotikus síkra merőleges. A centrálsík érintési pontja az alkotó és tengely normális transzverzálisának C metszéspontja az alkotóval, e pont az alkotó centrálpontja.

92. §. Alkotó mentén érintkező forgási hyperboloidok. A fogaskerekek tárgyalásánál eddig az osztófelületek egyenes körhengerfelületek voltak és a homlokkerekekkel kapcsolatban láttuk, miként biztosítjuk az osztófelületek tiszta gördülését. De ha a fogaskerekek tengelyei kitérő egyenesek, akkor osztófelületeknek alkotó mentén érintkező hyperboloidokat választhatunk, melyekkel ugyan a hyperboloidok tiszta gördülése nem biztosítható, de a két kerék szögsebességének állandó aránya elérhető. Ha kitérő tengelyű fogaskerekeknél osztófelületeknek



158. ábra.

hyperboloidokat veszünk fel, akkor azt a tisztán geometriai problémát kell megoldani, mely szerint szerkesztendők egy alkotó mentén érintkező, kitérő tengelyű forgási hyperboloidok.

Az érintkező forgási hyperboloidok tengelyeit tetszőlegesen választhatjuk. Legyen az egyik tengelye t_1 és a másiké t_2 (158. ábra), a tengelyeket az első képsíkkal parallel helyzetben vettük fel. A hyperboloidok közös g alkotójának felvételében, mely mentén a hyperboloidok érintkeznek, már némileg korlátozva vagyunk. T. i. ha a hyperboloidok a g alkotó mentén érintkeznek, a g alkotóra illeszkedő minden sík a felületek közös érintősíkja és egy-egy sík érintési pontja a két felülettel szemben azonos. E szerint a g alkotó asymptotikus síkja és centrálpontja is közös, de akkor e közös asymptotikus síkra illeszkedik a g és t_1, továbbá a g és t_2 egyenesnek közös normális transzverzálisa. Tehát a g alkotó illeszkedik a t_1 és t_2 tengelyek normális transzverzálisára és e transzverzálisra merőleges. A g alkotó még egy további feltételt tartozik kielégíteni, mert ha az alkotó pontjaihoz tartozó érintősíkok mindkét felülettel szemben mindig azonos síkok, ez azt jelenti, hogy a g alkotó pontjaihoz tartozó felületi normálisok szintén mindkét felülettel szemben azonos egyenesek. A felületeink forgási felületek, s így minden felületi normális a felületek tengelyeire illeszkedő egyenes. Mivel a g alkotó a két felület közös alkotója, az alkotó pontjaihoz tartozó felületi normálisok a közös alkotóra illeszkedő és rája merőleges egyenesek. Tehát a g alkotó a következő feltételeket tartozik kielégíteni: *a)* illeszkedik a forgási felületek tengelyeinek normális transzverzálisára, *b)* merőleges e normális transzverzálisra, *c)* t_1, t_2 és g egyenesek közös transzverzálisai a g alkotóra merőleges egyenesek.

A felsorolt feltételeket kielégítő g egyenesek még mindig egyméretű sokaságot alkotnak, ezekből egyet legkönnyebben azáltal választhatunk ki, ha a 158. ábrában a g alkotó első képét a tengelyek első képének metszéspontjára illeszkedően, de különben tetszőlegesen vesszük fel. Ha g' a közös alkotó első képe és P' a közös alkotóra illeszkedő tetszőleges P pont első képe, akkor a P ponton átmenő közös felületi normális első képét közvetlenül megrajzolhatjuk. T. i. az első képével megadott közös alkotó, mivel a tengelyek normális transzverzálisa első vetítősugár, az első képsíkkal parallel egyenes, továbbá a P pontra illeszkedő közös n normális, a tengelyekre illeszkedő és g egyenesre merőleges egyenes. E szerint n első képe P' ponton megy át és merőleges a g' egyenesre, mert g az első képsíkkal parallel egyenes. Mivel az n egyenes a felületek tengelyeit metszi, az n' alapján megszerkeszthető n'', erre illeszkedően P''. A P'' ponton átmenő $x_{1,2}$ tengellyel parallel egyenes a g egyenes második képe. Az így megszerkesztett g egyenesnek a t_1, ill. t_2 tengelykörüli forgásából származtatott forgási hyperboloidok a g alkotó mentén érintkeznek, mert a g alkotó három különböző pontjában mindkét felületi érintősík közös, e pontok az alkotó végtelenben fekvő pontja, az alkotó centrálpontja és a P pont. Ha pedig a közös alkotó három pontjában a két felületi érintősík közös, akkor minden pontban közös az érintősík, mert az alkotóra illeszkedő érintősíkok sora projektív az érintési pontok sorával és e projektivitás három megfelelő elempár által egyértelműen meg van határozva.

Másodrendű felületek.

93. §. Másodrendű felület szinguláris ponttal. *Oly felület, melynek tetszőleges egyenessel való metszéspontjainak száma kettő, másodrendű* *felület.* Az egyenes metszheti a felületet két különböző valós pontban, akkor az egyenes a felület szelője, ha két összeeső pontban metszi, akkor az egyenes a felület érintője, végül lehetnek a metszéspontok képzetesek is, ilyenkor az egyenesről azt mondjuk, hogy a felületet nem metszi. Mivel egyenes és felület metszéspontjainak száma kettő, a felület minden síkmetszete másodrendű görbe. Ha egyenes és másodrendű felület közös pontjainak száma kettőnél több, akkor az egyenes minden pontja felületi pont, az egyenes felületi alkotó. Feltéve, hogy egyenes és felület közös pontjainak száma kettőnél több, akkor az egyenesre illeszkedő tetszőleges sík a felületet oly másodrendű görbében metszi, melynek pontjaiból egy egyenesre kettőnél több esik, a síkmetszet elfajuló kúpszelet, melynek egyik része az egyenes. Ha a tér minden egyenese a felületet képzetes pontokban metszi, akkor a felület képzetes másodrendű felület. A képzetes, valamint a két síkká elfajuló másodrendű felületeket további tárgyalásainkból kikapcsolhatjuk, mert technikus csak valós objektumokat tervez és a síkokká elfajuló másodrendű felülettel azért nem foglalkozunk, mert a sík ábrázoló geometriai tárgyalását elintéztük.

Általában felület szinguláris pontjára illeszkedő síkkal való síkmetszetének van duplapontja, e pont a szinguláris pont. Ha feltesszük, hogy másodrendű felületnek két szinguláris pontja van, akkor a két szinguláris pontra illeszkedő tetszőleges sík és felület másodrendű síkmetszetének két duplapontja van, de akkor a duplapontok összekötő egyenese a síkmetszetnek kétszer számítandó egyenese. Mivel a szinguláris pontokra illeszkedő minden sík síkmetszetében a szinguláris pontok összekötő egyenese kétszer számítandó egyenes, ez az egyenes a felületnek duplaegyenese. A duplaegyenes nem meríti ki a másodrendű felület pontjait, ha P a felület duplaegyenesére nem illeszkedő pontja, akkor P és a duplaegyenes oly síkot határoznak meg, melynek a felülettel való metszete másodrendűnél magasabbrendű görbe, ez csak úgy lehetséges, hogy a sík a másodrendű felületnek egy része, de akkor az egész másodrendű felület két síkra széteső felület.

Legyen a másodrendű felületnek csak egy szinguláris pontja, M, akkor e pontra illeszkedő minden sík a másodrendű felületet duplaponttal bíró kúpszeletben, vagyis két egyenesben metszi, az így nyert összes felületi egyenesek közös pontja M. Amennyiben a felület nem széteső másodrendű felület, akkor a felületet a tér tetszőleges síkja kúpszeletben metszi, e kúpszelet pontjai az előbbi felületi egyenesek metszéspontjai a metszősíkkal. Ebből kitűnik. hogy az egy szinguláris ponttal bíró másodrendű felület a másodrendű kúpfelület. A másodrendű kúpfelületekkel itt nem kell foglalkozunk, ezeket már letárgyaltuk. Tehát a következőkben csak az általános másodrendű felületekkel foglalkozunk, melyeknek minden pontja reguláris.

94. §. Az általános másodrendű felületek osztályozása. Minden érintősík, mint minden sík, a másodrendű felületet kúpszeletben metszi, ahol az érintési pont a kúpszeletnek duplapontja. De akkor az érintősík és másodrendű felület síkmetszete két egyenesre széteső kúpszelet. Ebből következik, hogy minden másodrendű felület egyenesvonalú felület.

Az érintősík által kimetszett két felületi egyenes lehet:

a) *két különböző valós egyenes*,

b) *két képzetes egyenes valós metszésponttal*,

c) *két összeeső valós egyenes*, amikor az érintősík az egész egyenes mentén érinti a felületet.

Tegyük fel, hogy az érintősík a másodrendű felületet két összeeső egyenesben metszi, vagyis a pont a felület parabolikus pontja. Ha a felület és érintősík közös egyenese g, akkor a g egyenesre illeszkedő tetszőleges sík a felületet két egyenesre széteső kúpszeletben metszi, mert a síkmetszet egyik része a g egyenes. Legyen a síkmetszet másik része l, akkor $[lg]$ sík a felület érintősíkja, mert két egyenesre széteső kúpszeletben metszi, az érintési pont a két egyenes metszéspontja, M. De akkor M pont a felületnek oly pontja, melyre a felület két érintősíkja illeszkedik, az egyik érintősík az eredeti érintősík, a másik az érintési alkotóra illeszkedő tetszőleges sík, tehát az M pont a felület szinguláris pontja, a felület nem általános másodrendű felület.

Tegyük fel, hogy az érintősík a másodrendű felületet két különböző valós egyenesben metszi. vagyis az érintési pont a felület hyperbolikus pontja. Ekkor a felület minden pontja hyperbolikus, t. i. ha P a felület hyperbolikus pontja és e ponthoz tartozó érintősík a felületet a P pontra illeszkedő g és l egyenesekben metszi és a felületnek Q pontja nem illeszkedik a felvett érintősíkra, akkor a $[Qg]$ és $[Ql]$ síkok mindegyike a felületet még egy-egy Q pontra illeszkedő egyenesben metszi. Messe a $[Qg]$ sík a felületet az l_1 egyenesben, akkor l_1 egyenes mindenesetre g egyenesre illeszkedő egyenes, messe a $[Ql]$ sík a felületet az l egyenesre illeszkedő g_1 egyenesben. Ha g_1 és l_1 azonos egyenesek, akkor ez az egy egyenes a P, Q pontok összekötő egyenese, de akkor a felület P pontjára három felületi alkotó illeszkedik, melyek közül kettő-kettő a felület P pontbeli érintősíkját határozza meg, vagyis ekkor a felület P pontja a felület szinguláris pontja. Ebből következik, hogy általános másodrendű felület esetében az l_1 alkotó a g alkotót és g_1 az l alkotót P ponttól különböző pontban metszi, vagyis a g, l, g_1, l_1 alkotók felületi torznégyszöget határoznak meg, mert Q nem illeszkedik a g és l alkotók összekötő síkjára. Ezzel kimutattuk, hogy a felület tetszőlegesen választott Q pontja a felületnek szintén hyperbolikus pontja, mivel a g_1 és l_1 alkotók összekötő síkja a felület Q pontbeli érintősíkja. De ezzel az általános másodrendű felületekre vonatkozó következő tételt is nyertük, mely szerint ha általános másodrendű felületnek egy pontja elliptikus, akkor minden pontja elliptikus. T. i. parabolikus pontja nem lehet, mert akkor minden pontja parabolikus, sőt egy pontja szinguláris. Hyperbolikus pontja sem lehet, mert ha egy pontja hyperbolikus, akkor minden pontja az. Még megjegyezzük azt is, hogy az elliptikus pontokkal bíró másodrendű felületnek nem lehetnek valós alkotói.

Ezek szerint *az általános másodrendű felületeknek két osztályát különböztethetjük meg, az elliptikus és a hyperbolikus pontokkal bíró felületosztályokat.*

Valamint a valós végesben fekvő kúpszeletek osztályozásának alapja a kúpszeletsík végtelenben fekvő egyenesének és kúpszeletnek viszonylagos helyzete volt, úgy a másodrendű felületeket is osztályozhatjuk a felület és végtelenben fekvő sík viszonylagos helyzete szerint. A végtelenben fekvő sík metszheti a másodrendű felületet el nem fajuló valós vagy képzetes kúpszeletben, vagy pedig a végtelenben fekvő sík a felületnek érintősíkja. *Ha a végtelenben fekvő sík a másodrendű felületet* a) *valós el nem fajuló kúpszeletben metszi, akkor a felületet hyperboloidnak,* b) *képzetes el nem fajuló kúpszeletben metszi, akkor a felületet ellipszoidnak,* c) *érinti, akkor a másodrendű felületet paraboloidnak mondjuk.* Itt megjegyezzük, hogy a hyperbolikus pontokkal bíró másodrendű felületet a végtelenben fekvő sík mindig valós kúpszeletben metszi, mert e felületeken fekvő valós egyenesek a végtelenben fekvő síkot valós pontokban metszik.

95. §. Másodrendű felület kontúrgörbéje, pont polársíkja stb. Másodrendű felület ábrázolásánál meg kell szerkesztenünk a felület kontúrgörbéjét. A kontúrgörbe a vetítési középpontra illeszkedő felületi érintősíkok érintési pontjainak összessége, vagyis a kontúrgörbe a felület körülírt érintőkúpjának érintési görbéje. Mivel az érintőkúp minden alkotója a felület érintője, a körülírt kúp egy alkotójára illeszkedő tetszőleges sík a felületet oly kúpszeletben metszi, melynek egyik érintője a felvett kúpalkotó, a kúpalkotó érintési pontja pedig a körülírt érintőkúp érintési görbéjének pontja. A körülírt érintőkúp csúcspontjára illeszkedő tetszőleges sík a másodrendű felületet kúpszeletben metszi, ha e kúpszeletet ismeretesnek tételezzük fel, akkor a körülírt kúpnak e metszősíkra illeszkedő összes alkotói a kúpszeletnek a kúp csúcspontjára illeszkedő érintői. Mivel minden kúpszelet másodosztályú, mondhatjuk, hogy az érintőkúp csúcspontjára illeszkedő minden sík a körülírt kúpot két alkotóban metszi E szerint *a másodrendű felület minden körülírt érintőkúpja másodrendű.*

A körülírt kúp érintési görbéjének tetszőleges pontja a kúpfelület és másodrendű felület közös pontja s e pontban a kúpfelületi érintősík azonos a másodrendű felület ugyanezen pontjához tartozó érintősíkkal. Tehát az érintési görbe a körülírt kúp és másodrendű felület oly áthatási görbéje, melynek minden pontjában a két felületi érintősík közös, de akkor az áthatási görbe minden pontja duplapont. És mivel az áthatási görbén átmenő mindkét felület másodrendű, az áthatás, vagyis az érintési görbe oly negyedrendű görbe, melynek minden pontja kétszer számítandó pont. Ebből következik, hogy *másodrendű felület bármely körülírt érintőkúpjának érintési görbéje kúpszelet,* vagyis másodrendű felületeknél az érintési görbe síkgörbe, e síkgörbe egy meghatározott síknak a másodrendű felülettel való metszete.

Tehát centrális projekcióban minden másodrendű felület kontúrgörbéje és képkörrajza másodrendű és centrális világítás mellett önárnyékhatárgörbéje, valamint az önárnyékhatárgörbe képe szintén másodrendű.

Az érintőkúp rendszámának megállapításánál utasítást nyertünk arra vonatkozólag is, hogy hogyan lehet az érintési görbe egyes pontjait megszerkeszteni. Ott láttuk, hogy a körülírt kúp csúcspontjára illeszkedő sík a másodrendű felületet kúpszeletben metszi, e kúpszelethez a kúp csúcspontjából vont érintők érintési pontjai voltak az érintési görbe pontjai. Ugyanakkor a két érintési pont összekötő egyenese az érintési görbe síkjára illeszkedő egyenes. Ez az egyenes egyúttal a kúp csúcspontjának polárisa a másodrendű felületből kimetszett kúpszeletre nézve. Mondhatjuk tehát, *hogy a tér tetszőleges P pontjára illeszkedő összes síkok a másodrendű felületet mindig oly kúpszeletekben metszik, melyekre vonatkozólag a P pont polárisai egy és ugyanazon síkra illeszkedő egyenesek, e sík a P pontból körülírt kúp érintési görbéjének síkja, ezért ezt a síkot a másodrendű felületre nézve a P pont polársíkjának és ugyanakkor a P pontot a sík pólusának mondjuk.*

A továbbiakban a kúpszelet következő pólus és poláris tulajdonságaira támaszkodunk: *a)* pólusra illeszkedő kúpszeletszelőkön megszerkesztve a pólus negyedik harmonikus társait a szelő és kúpszelet közös pontjaira nézve a negyedik harmonikus társak mértani helye a pólus polárisa, *b)* a kúpszeletre illeszkedő pont polárisa a pontra illeszkedő kúpszeletérintő, *c)* egy egyenesre illeszkedő pontok polárisai az egyenes pólusára illeszkedő egyenesek.

A felsorolt tulajdonságok tekintetbevételével a másodrendű felület pólus és polársíkra vonatkozó következő tételeit mondhatjuk ki: *a)* adott másodrendű felület esetében a tér tetszőleges P pontjára illeszkedő szelőkön a P pont negyedik harmonikus társai a szelők és felület közös pontjaira nézve a P pont polársíkjára illeszkedő pontok, *b)* felületi pont polársíkja a felület e pontjához tartozó érintősík, *c)* P pont **P** polársíkjára illeszkedő tetszőleges Q pont Q polársíkja mindig P pontra illeszkedő sík, mert PQ egyenesre illeszkedő tetszőleges sík a másodrendű felületet oly kúpszeletben metszi, melyre nézve a P pont polárisa a Q pontra és Q pont polárisa a P pontra illeszkedő egyenes.

E harmadik tétel feltételezett adott másodrendű felület mellett szerkesztésbeli utasítást ad arra vonatkozólag is, hogy hogyan kell tetszőlegesen adott síkhoz, mint polársíkhoz, a pólust megszerkeszteni. Felvesszük az adott sík három pontját, e pontok polársíkjai egy pontra illeszkedő síkok, e pont az adott sík pólusa. A második tétel igénybevételével adott sík pólusát úgyis szerkeszthetjük meg, hogy a másodrendű felület és adott sík síkmetszetének három pontjában meghatározzuk a felületi érintősíkot, e három sík közös pontja szolgáltatja ugyancsak az adott sík pólusát.

Külön kimutatjuk, hogy *adott másodrendű felület esetében tetszőleges egyenesre illeszkedő pontok polársíkjai egy másik meghatározott egyenesre illeszkedő síkok.* E célból vegyük fel a tetszőleges g egyenest és legyen a g egyenesre illeszkedő **A** sík pólusa A és ugyanezen egyenesre illeszkedő **B** sík pólusa B, akkor a g egyenesre illeszkedő tetszőleges P pont polársíkja átmegy az A és B pontok összekötő egyenesén. Mert a g egyenesre illeszkedő P pont egyúttal rajta van a g egyenesre illeszkedő **A** és **B** síkon is, s így kell, hogy a P pont polársíkja e síkok pólusaira illeszkedő sík legyen. Hasonlóan bizonyítható, hogy síksor síkjainak pólusai egy meghatározott egyenesre illeszkedő pontok, továbbá azt is, hogy a nyert egyenesre illeszkedő síkok pólusai az eredeti síksor tengelyére illeszkedő pontok. Tehát *a másodrendű felület a tér minden egyeneséhez rendel egy másik egyenest, ilyen egyenesekről azt mondjuk, hogy mindegyik a másiknak poláregyenese.*

96. §. Átmérősík, átmérő, középpont stb. Végtelenben fekvő pont polársíkja, amennyiben a végtelenben fekvő sík nem érinti a másodrendű felületet, végesben fekvő sík, minden ilyen sík átmegy a végtelenben fekvő sík végesben fekvő pólusán. A végtelenben fekvő sík pólusán átmenő minden szelőn a pólus harmonikus társa a szelő és felület metszéspontjaira nézve végtelenben fekvő pont, amiből következik, hogy a pólus a szelő és felület közös pontjai által meghatározott távolságnak felezési pontja. Szóval a végtelenben fekvő sík O pólusára illeszkedő minden egyenes a másodrendű felületet O ponttól szimmetrikusan fekvő pontokban metszi, vagyis a felület centrális szimmetriával bíró felület, ezért a szimmetria centrumát, vagyis a végtelenben fekvő sík O pólusát a másodrendű felület centrumának vagy középpontjának mondjuk.

A másodrendű felület középpontjára illeszkedő minden sík a felület átmérősíkja és mivel az átmérősík végtelenben fekvő pont polársíkja, az átmérősík a végtelenben fekvő pontot jellemző egyenessel parallel egyeneseken lévő húrok felezési pontjainak mértani helye.

A másodrendű felület középpontjára illeszkedő minden egyenes a felület átmérője.

Eddig feltettük azt, hogy a végtelenben fekvő sík pólusa végesben fekvő pont, ugyanekkor a másodrendű felületről azt mondjuk, hogy centrális másodrendű felület.

Ha a végtelenben fekvő sík pólusa a másodrendű felületre nézve végtelenben fekvő pont, vagyis pólus és polársík illeszkedők, akkor a végtelenben fekvő sík a felület érintősíkja, az érintési pont a pólus, amelyről azt is mondhatnók, hogy a másodrendű felület végtelenben fekvő O középpontja. De mivel e pontra nézve már nem mondhatjuk azt, hogy e pontra illeszkedő egyeneseknek a felülettel való metszéspontjai e pontra nézve szimmetrikusan fekvő pontok, azért ez esetekben azt mondjuk, hogy a másodrendű felületnek nincs középpontja. Tehát *az ellipszoidok és hyperboloidok centrális másodrendű felületek, míg a paraboloidok nem centrális másodrendű felületek.*

Mindezek ellenére a paraboloidoknál a végtelenben fekvő sík végtelenben fekvő pólusára illeszkedő egyeneseket, ill. síkokat itt is a felület átmérőinek, ill. átmérősíkjainak nevezzük. E szerint a paraboloidok összes átmérői parallel egyenesek és az átmérősíkok az összes átmérőkkel parallel síkok.

Adott másodrendű felületnél minden átmérősíknak van meghatározott pólusa a végtelenben fekvő síkban, a pólust jellemző parallel egyenesek közös iránya az átmérősíkhoz tartozó konjugált irány. A pólust jellemző parallel egyenesek közül egy illeszkedik a végtelenben fekvő sík pólusára, ez az átmérő a felvett átmérő síknak konjugált átmérője.

Átmérősíkhoz tartozó konjugált irányú egyenesek általában az átmérősíkra nem merőlegesek. Itt megemlítjük, de nem bizonyítjuk, hogy centrális másodrendű felületeknél mindig találunk legalább három olyan átmérősíkot, melyekhez tartozó konjugált irányú egyenesek az átmérősíkokra merőlegesek. Ezeket az átmérősíkokat fősíkoknak nevezzük, ahol két-két fősík mindig egymásra merőleges. Két-két fősík metszésvonala a felület tengelye, ahol egy-egy tengely a rája merőleges fősík konjugált átmérője. Tengelyek és felület közös pontjai a másodrendű felület csúcspontjai. A paraboloidoknál, ha a végtelenben fekvő síktól eltekintünk, általában két fősíkot, egy tengelyt és egy csúcspontot találunk.

A fősík meghatározásából következik, hogy a fősíkra illeszkedő pont polársíkja a fősíkra merőleges, mert a polársík keresztül megy a fősík pólusán és e pont a fősíkra merőleges egyenes végtelenben fekvő pontja.

97. §. Asymptotikus kúp, síkmetszetek. A hyperboloidok a végtelenben fekvő síkot nem széteső, valós kúpszeletben metszik. E végtelenben fekvő kúpszelet minden pontja végtelenben fekvő pont, e pontok polársíkjai, tehát egyrészt átmérősíkok és másrészt, mivel e pontok felületi pontok, oly síkok, melyek a felületet a végtelenben érintik. A hyperboloid eme érintősíkjait a felület asymptotikus síkjainak mondjuk. Hyperboloid összes asymptotikus síkjai másodrendű kúpot burkolnak, melynek csúcspontja a felület középpontja és vezérgörbéje a felület végtelenben fekvő kúpszelete. Mondhatjuk azt is, hogy az asymptotikus kúp a hyperboloid ama speciális körülírt érintőkúpja, melynek csúcspontja a hyperboloid középpontja.

Másodrendű felület minden síkmetszete kúpszelet. Kúpszelet pólus és poláris tulajdonságai alapján tudjuk, hogy kúpszelet átmérője a kúpszelet síkjára illeszkedő végtelenben fekvő pont polárisa, középpontja a sík végtelenben fekvő egyenesének pólusa és konjugált átmérők oly végtelenben fekvő pontok polárisai, mely pontok közül az egyik a másik átmérő végtelenben fekvő pontja.

Legyen g a másodrendű felület tetszőleges átmérője, akkor a g egyenesnek a másodrendű felületre vonatkozó poláregyenese mindig a végtelenben fekvő síkra illeszkedő egyenes. Mert centrális másodrendű felületeknél a g egyenesre illeszkedő felületi középpont polársíkja a végtelenben fekvő sík, és a paraboloidoknál a g egyenes és felület közös végtelenben fekvő pontjához tartozó polársík ugyancsak a végtelenben fekvő sík. Ebből következik, hogy átmérőre illeszkedő pontok polársíkjai parallel síksor síkjai. Legyen e parallel síksor tetszőleges síkja **S** és messe e sík a másodrendű felületet a k kúpszeletben, akkor a k kúpszelet egy átmérőjét úgy nyerjük, hogy megszerkesztjük az **S** sík egyik végtelenben fekvő pontjának polárisát. Mivel e poláris egyúttal illeszkedik a felvett végtelenben fekvő pontnak a felületre vonatkozó polársíkjára is és a polársík a g egyenesre illeszkedő sík, hiszen **S** sík végtelenben fekvő egyenese és a g egyenes a másodrendű felületre nézve poláregyenesek, mondhatjuk, hogy a k kúpszelet minden átmérője átmegy a g egyenes és **S** sík közös pontján, de akkor e pont k kúpszelet középpontja. Eredményeinket így is fogalmazhatjuk, hogy a másokrendű felület parallel síkmetszeteinek középpontjai egy egyenesre illeszkedő pontok, ahol ez az egyenes a felület ama átmérője, mely a metszősíkok közös végtelenben fekvő egyenesének polár egyenese. Amennyiben pedig egy-egy kúpszeletnek egy-egy konjugált átmérőpárját szerkesztjük meg az előbbi utasítások szerint, azt nyerjük, hogy a parallel síkokkal kimetszett kúpszeletekben az egyik kúpszeletben felvett bármely kapcsolt átmérőpár átmérőivel parallel átmérők egy másik kúpszeletben ugyancsak kapcsolt átmérők. Mivel ilyen kúpszeletek hasonlók, mondhatjuk, hogy másodrendű felület parallel síkmetszetei hasonló kúpszeletek.

Vizsgálat tárgyává téve az egyes másodrendű felületek síkmetszeteit, a következő eredményekhez jutunk :

a) ellipszoid minden síkmetszete ellipszis, mert ellipszoidnak nincsenek végtelenben fekvő pontjai, de akkor síkmetszetének sem lehetnek végtelenben pontjai,

b) a hyperboloid végtelenben fekvő pontjai az asymptotikus kúp végtelenben fekvő pontjaival azonos pontok. A felület e tulajdonságának figyelembevételével tetszőleges síkmetszet végtelenben fekvő pontjait úgy szerkesztjük meg, hogy meghatározzuk az asymptotikus kúpnak a metszősíkkal parallel alkotóit, akkor egy-egy ilyen alkotó végtelenben fekvő pontja a síkmetszetnek is végtelenben fekvő pontja. E szerint hyperboloid síkmetszetei között vannak hyperbolák, amikor a felület középpontjára illeszkedő és a metszősíkkal parallel sík az asymptotikus kúpot két különböző valós alkotóban metszi, vannak parabolák, amikor a felület a középpontjára illeszkedő és a metszősíkkal parallel sík az asymptotikus kúp érintősíkja, vannak ellipszisek, amikor a felület középpontjára illeszkedő és a metszősíkkal parallel sík az asymptotikus kúpot nem metszi valós alkotókban.

c) az elliptikus pontokkal bíró paraboloidnak csak egy végtelenben fekvő pontja valós, az átmérők közös végtelenben fekvő pontja, melyben a végtelenbe fekvő sík a felületet érinti. Ebből következik, hogy a felületnek az átmérőkkel parallel minden síkmetszete parabola, egyéb síkmetszetei ellipszisek.

d) a hyperbolikus pontokkal bíró paraboloidnak végtelenben fekvő pontjai két valós egyenesen sorakoznak, ahol az egyenesek illeszkedési pontja a végtelenben fekvő sík és felület érintési pontja. Ebből következik, hogy a felületnek az átmérőkkel parallel minden síkmetszete parabola, egyéb síkmetszetei hyperbolák.

Bebizonyítottuk, hogy másodrendű felületek parallel síkmetszetei hasonló kúpszeletek. A paraboloidok síkmetszeteire nézve említésre méltó, hogy parallel átmérősíkok síkmetszetei kongruens parabolák. Messe két párhuzamos $\mathbf{S}_1$ és $\mathbf{S}_2$ sík a paraboloidot a k_1 és k_2 parabolában. A parabolák kongruenciájának bizonyítására felvesszük azt az $\mathbf{S}$ síkot, mely az $\mathbf{S}_1$ és $\mathbf{S}_2$ síkok távolságát felezi. Az $\mathbf{S}$ sík a paraboloid átmérősíkja, mint ilyen az $\mathbf{S}$ sík egyúttal a konjugált irányú húrok felezési pontjainak mértani helye. Vagyis az $\mathbf{S}$ sík a paraboloid ferde szimmetria síkja, ahol e szimmetriában a megfelelő pontok összekötő egyenesei az $\mathbf{S}$ sík végtelenben fekvő pólusát jellemző egyenessel parallel egyenesek. Mivel e szimmetria felületi pontot felületi pontba viszi át és ugyane szimmetria az $\mathbf{S}_1$ sík pontjait az $\mathbf{S}_2$ sík pontjaiba viszi át, kell, hogy e szimmetria a paraboloid és $\mathbf{S}_1$ sík közös pontjait a paraboloid és $\mathbf{S}_2$ sík közös pontjaiba vigye át, vagyis a k_2 parabola ferde szimmetrikusa a k_2 parabolának. De a parabolák egymásba való átvitelét ama henger közvetíti, melynek alkotói a szimmetria irányával parallel egyenesek, e hengernek k_1 és k_2 parallel síkmetszetei, tehát a két parabola kongruens.

98. §. Térbeli rendszerek planaris affin vonatkozása. Két térbeli rendszer a háromdimenziós térben mindig együttes fekvésű. Az együttes fekvésű térbeli rendszerek elemei között különböző vonatkozásokat létesíthetünk. Így eddigi tárgyalásainkban pl. a hasonlóság alapján vonatkoztattunk két térbeli rendszert egymásra akkor, mikor valamely térbeli alakzat eredetijéből az alakzat megadott lépték szerinti modelljét szerkesztettük. Itt a térbeli rendszerek egy különleges vonatkozásával foglalkozunk, a planaris affin vonatkozással. E vonatkozásnál kikötjük azt, hogy a megfelelő elemek egyneműek legyenek, illeszkedő elemeknek megint illeszkedő elemek feleljenek meg és megfelelő pontok összekötő egyenesei parallel egyenesek legyenek. A vonatkozás felsorolt egyszerű tulajdonságainak közvetlen következménye, hogy megfelelő egyenesek metszéspontjai és megfelelő síkok metszésvonalai egy síkra illeszkedő elemek, mely síknak minden eleme e vonatkozásban önmagának megfelelő elem, e sík röviden az affinitás síkja, míg két megfelelő pont összekötő egyenese az affinitás iránya. A megállapított affinitásban parallel egyenesek megfelelői parallelek, parallel síkok megfelelői szintén parallelek. Az affinitás irányával parallel síknak megfelelője önmaga, ilyen nem pontonként önmagának megfelelő síkra az affin vonatkozású térbeli rendszerek megfelelő elemei illeszkednek, melyek a síkban axiális affin vonatkozást állapítanak meg, az affinitás tengelye a síknak az affinitás síkjával való metszésvonala és iránya térbeli affinitás irányával egyezik. A részletezett affin vonatkozásnak egyik speciális esete a planaris orthogonális affinitás, amikor az affinitás sugarai az affinitás síkjára merőlegesek. A planaris affin vonatkozásnak további speciális esetei az orthogonális és ferde planaris szimmetria.

99. §. A másodrendű forgási felületek. A szinguláris pontnélküli másodrendű felületek külön csoportjába tartoznak a másodrendű forgási felületek. E felületek mindegyikét úgy származtatjuk, hogy meridiángörbének kúpszeletet választunk és a forgási felület tengelyének a kúpszelet egyik tengelyét vesszük. Mivel minden kúpszelet tengelyére orthogonális szimmetriában van, a származtatott felület másodrendű.

a) A nagytengelye vagy kistengelye körül forgatott ellipszis által leírt forgási felületnek nincs valós végtelenben fekvő pontja, tehát e felületek az ellipszoidok csoportjába tartoznak. Az alaki viszonyok tekintetbevételével a nagytengely körül forgatott ellipszis által leírt felület a tojásalakú, míg a kistengely körül forgatott ellipszis által leírt felület a lencsealakú forgási ellipszoid. A másodrendű felületek megállapított tulajdonságai alapján tudjuk, hogy ellipszoid minden pontja elliptikus, ez különben kitűnik abból is, hogy a forgatott meridiángörbe a forgási tengely felé mindig konkáv oldalát mutatja. A meridiánellipszis tulajdonságai alapján közvetlenül kimondhatjuk, hogy a meridiánellipszis középpontja egyúttal a forgási ellipszoidnak is középpontja, mert e pontra illeszkedő minden egyenes a felületet a középpontra nézve szimmetrikus pontokban metszi. A forgási ellipszoid minden meridiánsíkja az ellipszoid fősíkja, mert minden meridiánsíkra nézve a felület orthogonális szimmetriában van. A felület a meridiánsíkokon kívül még egy síkra nézve van orthogonális szimmetriában, e sík a felület középpontjára illeszkedő és a forgási tengelyre merőleges sík, vagyis a forgatott ellipszis ama tengelye által leírt sík, melyre merőleges tengely körül a meridiánellipszist forgattuk. A felsorolt síkok mindegyike a felület egy-egy fősíkja. Mivel két tetszőleges fősík metszésvonala a felület tengelye, a forgási ellipszoidnak, mint másodrendű felületnek, végtelen sok tengelye van, ezek közül egy a forgási tengely, a többi az aequatorkör átmérői. Mivel másodrendű felületnél tengely és felület közös pontja a felület csúcspontja, megállapíthatjuk, hogy a forgási ellipszoidnak végtelen sok csúcspontja van, ezek közül kettő illeszkedik a forgási felület forgási tengelyére és a többi illeszkedik az aequatorkörre.

b) Hyperbola forgatásával származtatott másodrendű felületek két különböző osztályát nyerjük a szerint, hogy a felvett meridiánhyperbolát valós, illetve képzetes tengelye körül forgatjuk. Mindkét osztályba tartozó felületek a végtelenben fekvő síkot szét nem eső valós kúpszeletben metszik. A végtelenben fekvő kúpszelet jellemezve van ama forgási kúp által, melyet a meridiánhyperbola asymptotáinak az általunk választott tengelykörüli forgatásával nyerünk. A kúp a forgási felület asymptotikus kúpja. Hyperbola forgatásával nyert másodrendű felület tehát hyperboloid. A hyperboloidok középpontját, átmérőit, fősíkjait tengelyeit ugyanúgy állapítjuk meg, mint a forgási ellipszoidnál.

Ha a hyperbolát valós tengelye körül forgatjuk, akkor e felület minden pontja elliptikus, mert ekkor a meridiánhyperbola a forgási tengely felé mindig konkáv oldalát mutatja. A felületi elliptikus pontok miatt a felületet forgási elliptikus hyperboloidnak nevezzük. Jellegzetessége, hogy a felületet két részből állónak látjuk, ezért kétágú vagy kétköpenyű hyperboloidnak is mondjuk. Mivel a felületi tengelyek közül csak a felület forgási tengelyével azonos tengely metszi a felület valós pontokban, a felületnek csak két valós csúcspontja van, továbbá a felületnek sem aequator-, sem torokköre nincs, mert a felület középpontjára illeszkedő és a forgási tengelyre merőleges sík a felületet képzetes parallelkörben metszi.

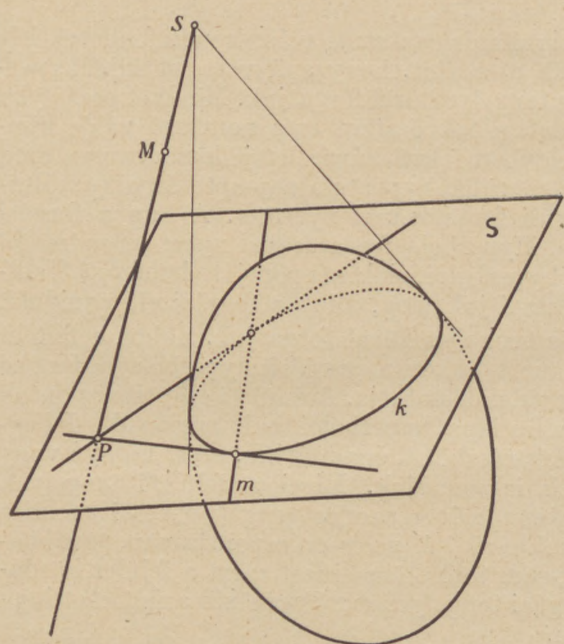
Ha a hyperbolát képzetes tengelye körül forgatjuk, akkor a felület minden pontja hyperbolikus, mert ekkor a meridiánhyperbola a forgási tengely felé mindig konvex oldalát mutatja. A felületet hyperbolikus pontjai miatt forgási hyperbolikus hyperboloidnak nevezzük. A felületet az előbbivel szemben egy részből állónak látjuk, azért egyköpenyű forgás hyperboloidnak is mondjuk. Mivel e felület tulajdonságait már a 87—92. §-okban ismertettük, a felület további részletezése mellőzhető.

c) A parabolának csak egy végesben fekvő tengelye van, s így parabola forgásából csak egyféle forgási másodrendű felületet nyerhetünk, ez a forgási paraboloid. Felületének minden pontja elliptikus, mert a parabola tengelye felé mindig konkáv oldalát mutatja, mondhatjuk tehát elliptikus paraboloidnak is. Végesben csak egy tengelye van, ez azonos a forgási tengellyel, csúcspontja is csak egy van, ez a tengely és felület végesben fekvő metszéspontja. Átmérői a tengellyel paralellek, fősíkjai a meridiánsíkok.

A fentiek szerint lényegében négy különböző forgási másodrendű felülethez jutottunk, ezek: a forgási ellipszoid, a forgási egyköpenyű és kétköpenyű hyperboloid és a forgási paraboloid.

100. §. A másodrendű forgási felület síkmetszetének és a körülírt kúp érintési görbéjének szerkesztése. A kitűzött két feladat másodrendű felületeknél tulajdonképpen egy feladat, mert a körülírt kúp érintési görbéje a kúp csúcspontjához tartozó polársíknak a felülettel való síkmetszete.

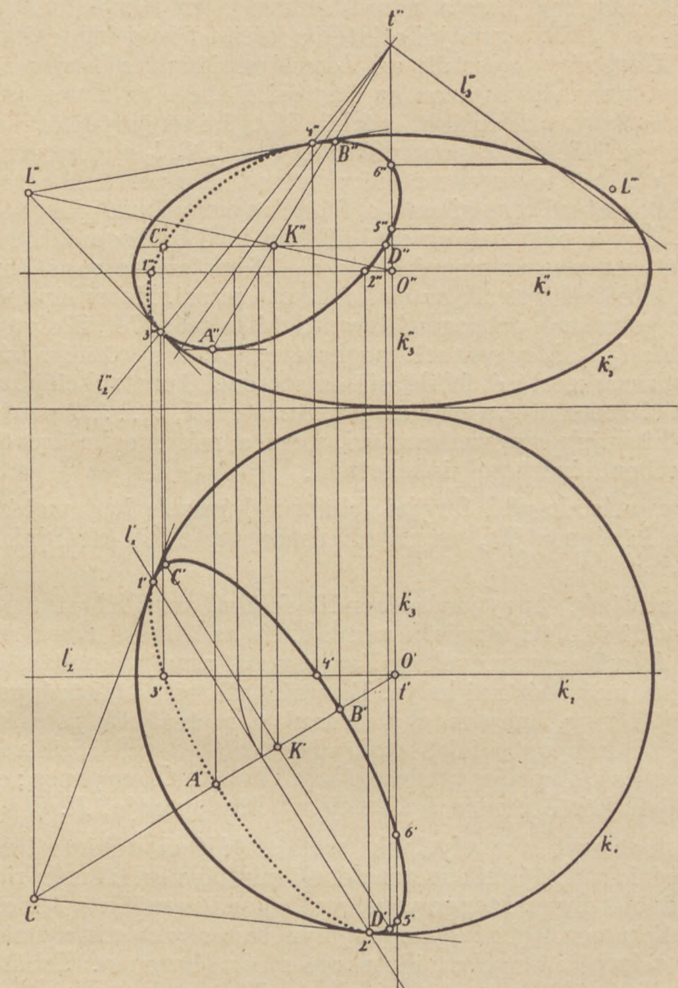
A szerkesztések tényleges megindítása előtt megbeszéljük, hogy adott másodrendű felületnél miként határozzuk meg a tetszőleges M pont polársíkjának m nyomvonalát a tetszőlegesen adott **S** síkon (159. ábra). Feltéve, hogy az **S** sík pólusa S, akkor az MS egyenesre illeszkedő pontok polársíkjai egy egyenesre, az MS egyenes poláregyenesére illeszkedő síkok. Az MS egyenes poláregyenese az MS egyenesre illeszkedő két pont polársíkjának közös egyenese. Az MS egyenes S pontjának polársíkja feltevésünk szerint az **S** sík. Messe az MS egyenes a **S** síkot a P pontban, akkor a P pontnak, mint az **S** síkra illeszkedő pontnak polársíkja az S pontra illeszkedő sík. A P polársíkjának egy egyenesét úgy nyerjük, hogy a P ponton átmenő tetszőleges sík és felület közös kúpszeletére 'vonatkozólag megszerkesztjük a P pont polárisát. Ha a P pontra illeszkedő **S** sík a felületet a k kúpszeletben metszi, és a P pontnak a k kúpszeletre vonatkozó polárisa az m egyenes, akkor P pont polársíkja az $[Sm]$ sík. A szerkesztés szerint MS egyenes poláregyenese az m egyenes, mert az MS egyenes két pontjának polársíkja az m egyenesre illeszkedő sík. Ám akkor az MS egyenes bármely pontjának polársíkja m egyenesre illeszkedő sík, vagyis M polársíkjának nyomvonala az **S** síkon az m egyenes. E szerint M pont polársíkjának **S** síkon lévő m nyomvonalát úgy szerkesztjük meg, hogy az **S** sík pólusát összekötjük az M ponttal, megállapítjuk a nyert egyenes és **S** sík közös pontját, e pont polárisa az **S** sík és felület közös kúpszeletére nézve a keresett m nyomvonal.



159. ábra.

A körülírt kúp érintési görbéjének, illetve a felület síkmetszetének szerkesztésénél különbséget teszünk centrális és nem centrális másodrendű felület között. Minden esetben azonban a felület forgási tengelyét az első képsíkra merőlegesen vesszük fel. A konstrukciók folyamán többször kell egyenes és kúpszelet közös pontjait, kúpszeletre nézve pont polarisát, ill. egyenes pólusát megállapítani, e részletfeladatokkal kapcsolatban már most megemlítjük, hogy az erre vonatkozó szerkesztési vonalak feltüntetését mindenhol mellőztük.

a) *A körülírt kúp, illetve síkmetszet szerkesztése centrális másodrendű forgási felületnél.* Legyen a felület a lencsealakú forgási ellipszoid. Meg-



160. ábra.

állapodunk abban, hogy a forgási tengelyre merőleges fősík az első fősík, e sík és felület metszete az első főmetszet, k_1, második fősík a második főmeridiánsík, a második főmetszet k_2, a harmadik fősík a harmadik főmeridiánsík, harmadik főmetszete k_3, ahol k_1 az aequatorkör, k_2, ill. k_3 a forgási felület második, illetve harmadik főmeridiángörbéje, ugyanakkor a felület felvett helyzete mellett k_1, k_2, ill. k_3 a felület első, második, ill. harmadik kontúrgörbéje (160. ábra).

Ha a körülírt kúp csúcspontja $L(L', L'')$, akkor e pont polársíkjának az első fősíkon lévő l_1 nyomvonala az első főmetszet ama pontjának polárisa, melyben az L pontra illeszkedő vetítősugár az első fősíkot metszi, mert a jelen esetben az első fősík pólusa a fősíkra merőleges egyenes végtelenben fekvő pontja. Az l_1 egyenes és k_1 kör közös pontjai a körülírt kúp érintési görbéjének *1* és *2* pontjai. Hasonlóan L polársíkjának l_2 nyomvonala a második fősíkon az L e fősíkon lévő orthogonális vetületének polárisa a második főmetszetre nézve, ahol *3* és *4* pontok, az l_2 és k_2 közös pontjai szintén a körülírt kúp érintési görbéjének pontjai. Ugyanúgy nyertük az L polársíkjának a harmadik fősíkon lévő l_3 nyomvonalát és azon az érintési görbe *5* és *6* pontját ; e szerkesztésnél a harmadik fősíkot, a felület forgási tengelye körül a második fősíkba forgatjuk. Az L pont polársíkja az l_1, l_2, l_3 egyenesek összekötő síkja. A polársík e szerkesztésével utasítást nyertünk arra is, hogy hogyan kell tetszőleges síknak a felületre vonatkozó pólusát megszerkeszteni. Így a pólusnak az első fősíkon lévő orthogonális vetülete az első főmetszet ama egyenesének az első főmetszetre vonatkozó pólusa, melyben a tetszőleges sík az első fősíkot metszi. Hasonlóan nyerjük az adott sík pólusának orthogonális vetületét a második, illetve harmadik fősíkon. Az l_1, l_2, l_3 egyenesek meghatározásával a körülírt kúp érintési görbéjének szerkesztését felület síkmetszetének konstrukciójára vezettük vissza. A síkmetszetet a már megszerkesztett *1*, *2*,..., *6* pontoktól függetlenül kívánjuk megszerkeszteni, mert a már meghatározott pontok adott esetben képzetesek is lehetnek.

Sík a másodrendű forgási felületet kúpszeletben metszi, e kúpszeletnek középpontját, tengelyeit és asymptotáit kívánjuk megszerkeszteni.

Kimutattuk, hogy másodrendű felület parallel síkmetszeteinek középpontjai felületi átmérőn vannak, ez az átmérő a metszősík végtelenben fekvő egyenesének poláregyenese, amely egyúttal a parallel síkok pólusainak mértani helye. E szerint síkmetszet középpontját úgy szerkesztjük meg, hogy meghatározzuk a metsző sík pólusát, a pólus és a felület középpontjának összekötő egyenese a metszősík végtelenben fekvő egyenesének poláregyenese, ábránkban az OL egyenes ; ez egyenes és metszősík közös pontja a síkmetszet középpontja, K.

A síkmetszet tengelyeinek szerkesztésénél tekintetbe vesszük, hogy forgási felület és sík metszetének mindig van szimmetriatengelye, amely a felület forgási tengelyének orthogonális vetülete a metszősíkon. Első képsíkra merőleges forgási tengelynél a metszet szimmetria tengelye a síknak a forgási tengelyre illeszkedő első esésvonala. Tehát a forgási másodrendű felület síkmetszetének egyik tengelye a metszősík ama egyenese, amely a K középpontot a metszősík és forgási tengely közös pontjával összeköti. E tengelyen a síkmetszet esetleges valós pontjait úgy nyerjük, hogy beforgatjuk a felület forgási tengelye körül a második fősíkba és akkor a beforgatott egyenes és második főmetszet közös pontjai a keresett pontok beforgatottjai. A síkmetszet másik tengelye a metszősíkra és a K középpontra illeszkedő és a már megszerkesztett tengelyre merőleges egyenes. Utóbbi egyenesnek a felülettel való esetleges metszéspontjait, mivel az egyenes a felület forgási tengelyére merőleges, úgy nyerjük, hogy a felületet az egyenesre illeszkedő és a felület forgási tengelyére merőleges síkkal metszük, az így nyert parallelkör az egyenest a keresett pontokban metszi. Ábránkban a tengelyek végpontjai, A, B és C, D. Ezekben szerkesztésbeli eljárást kaptunk minden centrális másodrendű forgási felület ellipszismetszetének meghatározására.

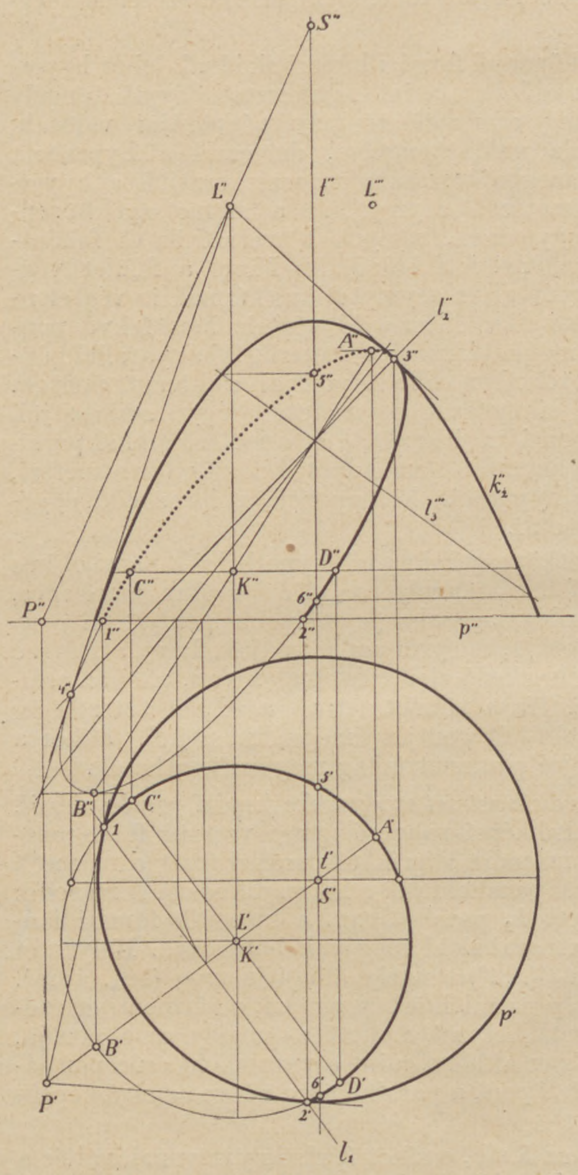
Az egyköpenyű és kétköpenyű forgási hyperboloidnak lehet hyperbolametszete is, ekkor az előzők szerint szerkesztett egyik tengely végpontjai képzetesek, míg a másik tengely végpontjai valósak, utóbbi tengely a hyperbola valós tengelye, de ezzel a hyperbola még nincs meghatározva, meghatározására megszerkesztjük a hyperbola asymptotáit. A síkmetszet asymptotái a síkmetszet középpontjára illeszkedő ama egyenesek, melyek a metszősík és felületközös végtelenben fekvő pontjai felé haladnak. Mivel a felület végtelenben fekvő pontjai egyúttal az asymptotikus kúpnak is végtelenben fekvő pontjai, a metsző síkra illeszkedő végtelenben fekvő pontokat úgy nyerjük, hogy meghatározzuk a metsző síkkal parallel kúpalkotókat, ez alkotók végtelenben fekvő pontjai a kívánt pontok. E szerint a hyperbolikus síkmetszet asymptotáit úgy szerkesztjük meg, hogy a felület középpontjára illeszkedő és a metsző síkkal parallel síkot vezetünk, e sík az asymptotikus kúpot két alkotóban metszi, ez alkotókkal parallel és a hyperbola középpontjára illeszkedő egyenesek és hyperbola asymptotái.

Az egyköpenyű és kétköpenyű forgási hyperboloid parabolikus metszeténél, ha a forgási felület tengelye az első képsíkra merőleges, megszerkesztjük a parabola legmagasabb (legmélyebb) pontját. E pont egyúttal a parabola csúcspontja, melyről azt is tudjuk, hogy a metsző síknak a forgási tengelyre illeszkedő első esésvonalán van, ahol az esésvonal a parabola tengelye. Ha a síkmetszetnek a felület tetszőleges parallelkörén fekvő további két pontját megszerkesztjük, akkor a parabola további már pontjai planimetriailag megszerkeszthetők.

b) *A körülírt kúp, illetve síkmetszet szerkesztése forgási paraboloidnál.* A paraboloid tengelyét az első képsíkra merőlegesen vesszük fel és megállapodunk abban, hogy a második képsíkkal parallel fősík a második fősík és a harmadik képsíkkal parallel fősík a harmadik fősík. A második fősík a felületet a megadott k_2 parabolában, a második főmeridiángörbében metszi, mellyel a paraboloid meg van határozva. Helyzetét a két képsíkkal szemben a $t'(t', t'')$ tengely állapítja meg (161. ábra). Az első képsík a felületet a p parallelkörben metszi, e körmenti érintőkúp csúcspontja, S, a felvett helyzet mellett a tengely ama pontja, melynek első távolsága kétszer akkora, mint a paraboloid csúcspontjának első távolsága. A nyert S pont a paraboloidra nézve az első képsík pólusa.

A paraboloidot metszi az **S** sík, e síkot l_1 első nyomvonalával és a második fősíkra illeszkedő l_2 második fővonalával adtuk meg. Az l_1 egyenes és p parallelkör *1, 2* közös pontjai, továbbá l_2 és a második főmeridiánparabola *3, 4* közös pontjai már a síkmetszetnek pontjai. A síkmetszetnek további két pontját a harmadik főmeridiángörbén szerkesztettük meg oly módon, hogy a metsző síknak a harmadik főmeridiánsíkon lévő l_3 nyomvonalnak és harmadik főmeridiángörbének közös pontjait állapítottuk meg, e pontok *5* és *6*.

A síkmetszet középpontját ugyanúgy szerkesztjük meg, mint a centrális felületeknél. A *K* középpont a metsző sík ama pontja, melyben a metsző sík pólusára illeszkedő felületi átmérő a síkot metszi. A pólust az l_1, l_2, l_3 egyenesek polár egyeneseinek közös pontjaként állapítjuk meg. Az l_1 poláregyenesének egy pontja az *S* pont, mert e pont az l_1 egyenesre illeszkedő első képsík pólusa, másik pontja az $[l_1S]$ sík pólusa, *P*. A *P* pont az első képsíkra illeszkedő pont, mert $[l_1S]$ sík a első képsík pólusára illeszkedő sík, de akkor *P* pont az l_1 egyenes pólusa ama *p* parallelkörre nézve, melyben az első képsík a felületet metszi. Ha a *P* pólust megszerkesztettük, akkor az adott metsző sík pólusának egyik mértani helye az *SP* egyenes. Hasonlóan állapítjuk meg az l_2 egyenes poláregyenesét. Mivel ez egyenes a második fősíkra illeszkedő egyenes, polár-egyenese átmegy az l_2 egyenesnek a második főmeridián görbéjére vonatkozó pólusán és merőleges a második fősíkra, vagyis l_2 polár-egyenese második vetítősugár. E szerint ha megszerkesztjük l_2 és főmeridián parabola közös pontjaiban a parabola érintőit, akkor az érintők közös pontjának második képe felület és képsíkrendszer jelen helyzete mellett a metsző sík *L* pólusának is a második képe. Ellenőrzés is áll rendelkezésünkre, mert helyes szerkesztésnél L'' pont szükségképpen illeszkedik $S''P''$ egyenesre. A metsző sík



161. ábra.

pólusának harmadik képét a profil meridiánsíkon ugyanúgy szerkesztjük meg, mint a második főmeridiánsíkon.

A paraboloid összes átmérői a forgási tengellyel parallel egyenesek, felület és képsíkok felvett helyzete mellett első vetítő sugarak. Ebből következik, mivel a síkmetszet középpontja a metsző sík pólusára illeszkedő átmérőn van, hogy a középpont első képe, K', a pólus első képével L' ponttal, azonos pont. A középpont második képét a metsző síkra illeszkedő K pont első képéből szerkesztettük meg.

A síkmetszet ellipszis, melynek tengelyeit és a tengelyek A, B, C, D végpontjait ugyanúgy állapíthatjuk meg, mint a forgási ellipszoidnál.

A forgási paraboloidnak minden tengelyével nem parallel síkmetszete ellipszis. Bebizonyítjuk, hogy a forgási paraboloid ellipszis síkmetszetének orthogonális projekciója a felület tengelyére merőleges síkon mindig kör. A tételt kimutattuk, ha ábránkban szerkesztett ellipszis első képének van legalább két egymástól különböző oly kapcsolt átmérőpárja, melynek átmérői egymásra merőlegesek. Az ellipszis tengelyeinek első képei egymásra merőlegesek, mert az egyik tengely az első képsíkkal parallel egyenes, ez egy oly kapcsolt átmérőpár az első projekcióban, melynek átmérői egymásra merőlegesek. Egy másik átmérőpár egyik átmérője legyen profil síkban fekvő átmérő, ez átmérő konjugáltja két sík metszésvonala, az egyik sík az ellipszis síkja, a másik sík a profilátmérő végtelenben fekvő pontjának polársíkja. Utóbbi polársík szerkesztésénél a profilátmérő helyett felvehetünk vele parallel tetszőleges egyenest is. Legyen a profilátmérővel parallel egyenes ama egyenes, amely az S pontra illeszkedik, ahol S a paraboloid ama érintőkúpjának csúcspontja, melynek érintési görbéje a paraboloidnak első képsíkra illeszkedő p parallelköre. Ha az S pontra illeszkedő, gondolatban felvett egyenes g, akkor a g egyenesre illeszkedő pontok polársíkjai a g egyenes g_1 poláregyenesére illeszkedő síkok. A g_1 egyenes az első képsíkra illeszkedő egyenes, mert S polársíkja az első képsík, különben pedig a g egyenes első nyompontjának polárisa p parallelkörre nézve. Mivel g egyenes első nyompontja a p parallelkörnek $x_{1,2}$ tengelyre merőleges átmérőjére illeszkedik, a g_1 poláris az $x_{1,2}$ tengellyel parallel egyenes. Vagyis g egyenes végtelenben fekvő pontjának polársíkja, mint a g_1 egyenesre illeszkedő sík, a második képsíkkal parallel átmérő sík. E síkra illeszkedő minden egyenes első képe a g_1 egyenessel azonos egyenes, tehát g_1 annak az egyenesnek is az első képe, melyben az átmérősík az ellipszis síkját metszi. De az átmérősík a profilátmérő végtelenben fekvő pontjának polársíkja, tehát a g_1 egyenes a profilátmérő konjugáltjának első képe. E szerint az ellipszis első képe oly kúpszelet, melyben egyszernél többször két konjugált átmérő egymásra merőleges, tehát kör.

101. §. **Másodrendű forgási felületekből térbeli affinitással származtatható általános másodrendű felületek.** A másodrendű forgási felületek bármelyikének térbeli affin megfelelője általános másodrendű felület. A térbeli affinitásnál végtelenben fekvő pont, végtelenben fekvő egyenes megfelelője végtelenben fekvő pont, illetve végtelen-

ben fekvő egyenes, amiből következik, hogy a végtelenben fekvő sík megfelelője önmaga, de nem pontonként. A térbeli affinitás e tulajdonsága alapján mondhatjuk, hogy forgási ellipszoid affin megfelelőjének nem lehetnek végtelenben fekvő pontjai, vagyis megfelelője ellipszoid. Ugyanúgy a hyperbolikus forgási hyperboloid hyperbolikus hyperboloidba megy át, mert a felületi egyenesek az affin megfelelő felület felületi egyeneseibe mennek át, elliptikus forgási hyperboloid elliptikus hyperboloidba és elliptikus forgási paraboloid általános elliptikus paraboloidba megy át. Az affinitással a forgási másodrendű felületekből előállított általános másodrendű felületek pontjairól, síkmetszeteiről, fősíkjairól, tengelyeiről stb. legjobb áttekintést akkor nyerünk, ha az affinitás síkja a forgási felület tetszőleges meridiánsíkja és az affinitás iránya a választott meridiánsíkra merőleges. Ekkor a forgási felületnek a felvett meridiánsíkra, továbbá meridiánsíkra merőleges meridiánsíkra és a felület középpontjára illeszkedő, forgási tengelyre merőleges síkra orthogonális szimmetriában lévő pontjai az affinitással ugyanezen síkokra orthogonális szimmetriában lévő pontokba mennek át. Mivel e síkok nemcsak az eredeti forgási felületet, hanem a származtatott általános másodrendű felületet is orthogonális szimmetrikus részekre bontják, e síkok az új felületnek is fősíkjai. E szerint *centrális forgási felületből származtatott másodrendű felületnek mindig van legalább három fősíkja, három tengelye, középpontja, míg a forgási paraboloidból nyert felületnek van két fősíkja és egy tengelye. A forgási ellipszoidból kapjuk a háromtengelyű ellipszoidot, az egyköpenyű forgási hyperboloidból a háromtengelyű egyköpenyű hyperboloidot, a kétköpenyű forgási hyperboloidból a háromtengelyű kétköpenyű hyperboloidot, végül a forgási paraboloidból nyerjük az általános elliptikus paraboloidot.* E felületeknél a térbeli affinitás a forgási felület parallelköreit hasonló és hasonló helyzetű ellipszisekbe viszi át, a forgási felület tetszőleges síkmetszetét az általános másodrendű felület síkmetszetébe viszi át, melynek síkja az eredeti síkmetszet síkjának affin megfelelője stb.

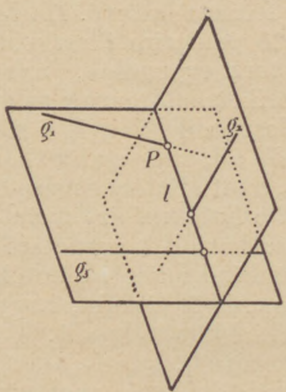
A forgási másodrendű felületekből levezetett általános másodrendű felületeken végzendő szerkesztéseknél az általános másodrendű felületet orthogonális parallel projekcióban két képsíkon úgy helyezzük el, hogy egy-egy fősík egy-egy képsíkkal legyen parallel, amennyiben csak két fősíkja van (ált. ell. paraboloid), akkor az egyik fősíkot a második, a másik fősíkot a harmadik képsíkkal párhuzamos helyzetben vesszük fel. A centrális felületeknél ama fősíkot választjuk az első képsíkkal párhuzamos helyzetben, mellyel parallel síkok a felületet ellipszisekben metszik. Ha ekkor a felületnek első képsíkra merőleges tengelyét oly forgási felület forgási tengelyének választjuk, melynek főmeridiángörbéje azonos az adott általános másodrendű felület második főmetszetével, akkor a forgási másodrendű felület az adott másodrendű felület térbeli affin megfelelőjének tekinthető. Az affinitás síkja a második fősík, az affinitás sugarai második vetítősugarak, és egy-egy az első képsíkkal parallel síkban lévő axiális affinitás a sík és általános másodrendű felület ellipszis síkmetszetét a sík és forgási felület parallelkör metszetébe viszi át.

A megállapított affinitás alapján a négy általános másodrendű felület tetszőleges **S** síkkal való síkmetszetét úgy szerkesztjük meg, hogy megszerkesztjük a metsző sík affin megfelelőjét, megállapítjuk utóbbi sík és forgási másodrendű felület síkmetszetét, a nyert síkmetszet affin megfelelője a keresett síkmetszet. A szerkesztésből kitűnik, hogy a síkmetszetek első képei axiális affin vonatkozásban vannak, ez affinitás tengelye a második fősík első nyomvonala ; a síkmetszetek második képei födésben lévő kúpszeletek. E példa egyúttal mutatja, hogy miképpen kell a négy általános másodrendű felületre vonatkozó minden konstrukciót forgási másodrendű felület közbeiktatásával elvégezni.

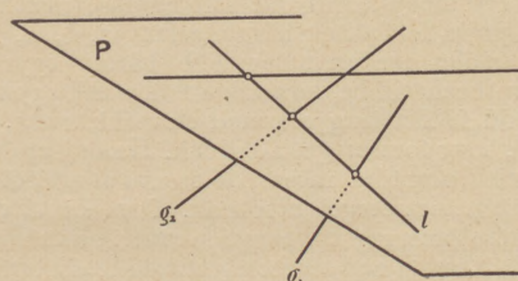
102. §. Hyperbolikus másodrendű felületek torzseregei. Láttuk, hogy minden másodrendű felület hyperbolikus pontokkal egyenes vonalú felület, a felület minden pontjára két felületi alkotó illeszkedik. Legyen a felület egy alkotója g_1, akkor ez alkotó minden pontja felületi pont, s így minden pontjára illeszkedik még egy felületi alkotó. Ha l_1, l_2, $l_3, \ldots$ a g_1 alkotótól különböző és a g_1 alkotó pontjaira illeszkedő alkotók, akkor az l alkotók párosával mindig torz egyenesek, mert feltéve, hogy l_i és l_k metszik egymást, ezek oly síkot határoznak meg, melyre a felületnek három alkotója, l_i, l_k, g_1, illeszkedik, vagyis a sík és felület metszete legalább három egyenesből áll, ami csak akkor következhetik be, ha a sík a felületnek egy része, amit általános másodrendű felület tárgyalásánál eleve kizárunk. Az l alkotókról azt mondjuk, hogy torzsereget alkotnak. Hasonlóan kimutathatjuk, hogy tetszőleges l alkotóra illeszkedő és az l alkotótól különböző felületi alkotók szintén torzsereget alkotnak. További tárgyalásainkból kitűnik, hogy a két torzsereg egyenesei kimerítik a másodrendű felület alkotóit.

Legyen az l torzsereg három tetszőleges alkotója l_1, l_2 és l_3, akkor a három alkotó minden közös transzverzálisa felületi alkotó, ahol egy ilyen közös transzverzálist úgy szerkesztünk meg, hogy az egyik alkotón felveszünk tetszőleges pontot és meghatározzuk a másik két alkotónak a felvett pontra illeszkedő transzverzálisát. A három alkotó tetszőleges közös transzverzálisa az alkotók mindegyikére egy-egy pontban illeszkedik, minden illeszkedési pont a transzverzális és másodrendű felület közös pontja, e szerint a tanszverzális a felületet legalább három pontban metszi, ami csak úgy lehetséges, hogy a tranzverzális minden pontja felületi pont, vagyis a transzverzális felületi alkotó. Megfordítva kimutatható, hogy a felület minden pontjára illeszkedik a három alkotó egy közös transzverzálisa. Ha a felület tetszőleges pontja P, akkor a felület P pontjára két felületi alkotó illeszkedik, amint azt hyperbolikus pontokkal bíró másodrendű felületekre vonatkozólag általában kimutattuk. Az egyik alkotó a $[Pg_1]$ síkban van, a másik alkotót a $[Pl_1]$ sík révén nyerhetjük, t. i. e sík a másodrendű felületet oly kúpszeletben metszi, melynek egyik része az l_1 egyenes, másik része a keresett felületi alkotó, a. Ugyanezen okoskodás alapján az a alkotót nemcsak a $[Pl_1]$ sík, hanem a $[Pl_2]$ sík, vagy a $[Pl_3]$ sík révén is szerkeszthettük volna. E szerint az a alkotó illeszkedik a $[Pl_1]$, $[Pl_2]$ és $[Pl_3]$ síkok mindegyikére, mint az első síkra illeszkedő egyenes metszi az l_1 egyenest, mint a második síkra illeszkedő egyenes metszi az l_2 egyenest és mint a harmadik síkra illeszkedő egyenes metszi az l_3 egyenest is, szóval az a alkotó az l_1, l_2, l_3 egyeneseket metszi, vagyis a három egyenes egy közös transzverzálisa. Tehát hyperbolikus másodrendű felületre illeszkedő pontok összessége azonos három párosával kitérő egyenes közös transzverzálisaira illeszkedő pontok összességével. Az l_1, l_2, l_3 alkotók közös transzverzálisai által meghatározott torzseregből három alkotót kiválasztva, e három alkotóra az előbbi tárgyalást ismételhetjük, amiből kitűnik, hogy az utóbbi három alkotó közös transzverzálisai szintén felületi torzsereget alkotnak. Vagyis hyperbolikus másodrendű felületen mindig van két torzsereg, ahol két különböző seregbe tartozó két alkotó mindig metszi egymást, de az egy seregbe tartozók párosával kitérők.

Legyen az egyik torzsereg három alkotója g_1, g_2, g_3 és a másik torzsereg három alkotója l_1, l_2, l_3. A g_1 alkotó minden pontjára illeszkedik az l sereg egy alkotója, így a tetszőleges P pontra illeszkedő alkotó (162. ábra) két sík metszésvonala, az egyik sík $[g_2P]$, a másik $[g_3P]$. Ha a P pont a g_1 egyenest befutja, akkor az l seregbeli alkotók szerkesztésénél a segédsíkok egy-egy síksort írnak le, az



162. ábra.



163. ábra.

egyik síksor tengelye g_2, a másiké g_3. Az l alkotók szerkesztése e síksorok síkjait párosítja, ahol egy-egy párnak síkjai a g_1 ugyanazon pontjára illeszkedő síkok. E szerint a síksorok a g_1 pontsorral perspektív helyzetben vannak, vagyis a két síksor projektív vonatkozásban van. A projektív vonatkozásban a megfelelő síkok metszésvonalai az l sereg alkotói. Mivel a két torzsereg szerepe felcserélhető, egész általánosságban mondhatjuk, hogy a hyperbolikus másodrendű felület egy torzseregbe tartozó alkotóinak összessége kitérő tengelyű projektív síksorok sugárképződménye.

Vegyük fel újból a hyperbolikus felület egy-egy torzseregének három három alkotóját (163. ábra). A g_1 alkotón átmenő minden síkra illeszkedik az l sereg egy alkotója, így a tetszőleges **P** síkra illeszkedő alkotó két pont összekötő egyenese; az egyik pont $(g_2\mathbf{P})$, a másik $(g_3\mathbf{P})$. Ha a **P** sík a g_1 tengelyű síksort befutja, akkor az l seregbeli alkotók szerkesztésénél a segédpontok egy-egy pontsort írnak le, az egyik pontsor sorozó egyenese g_2, a másiké g_3. Az l alkotók szerkesztése e pontsorok pontjait párosítja, ahol egy-egy párnak pontjai a g_1 tengelyű síksor ugyanazon síkjára illeszkedő pontok. E szerint a pontsorok a g_1 tengelyű síksorral perspektív helyzetben vannak, vagyis a két pontsor projektív vonatkozásban van. A projektív vonatkozásban a megfelelő pontok összekötő egyenesei az l sereg alkotói. Mindezek alapján mondhatjuk, hogy hyperbolikus másodrendű felület egy torzseregbe tartozó alkotóinak összessége kitérő tengelyű projektív pontsorok sugárképződménye.

103. §. A hyperbolikus paraboloid. A hyperbolikus paraboloid oly hyperbolikus másodrendű felület, melynek egy érintősíkja a végtelenben fekvő sík. Mivel a végtelenben fekvő sík a felület érintősíkja, a végtelenben fekvő síkban fekszik a felület két alkotója, a két alkotó közös pontja a végtelenben fekvő sík érintési pontja. Az érintési pontra illeszkedő minden végesben fekvő egyenes a felület átmérője és ugyanazon pontra illeszkedő minden végesben fekvő sík a felület átmérősíkja. Az átmérők közül egy a felület tengelye, tengely az az átmérő, melynek a felülettel való végesben lévő metszéspontjához tartozó felületi érintősíkja az átmérőre merőleges. A tengely és felület végesben lévő metszéspontja a felület csúcspontja. A csúcsponthoz tartozó érintősík a felületet két jellegzetes alkotóban metszi. Ama tengelyre illeszkedő síkok, melyek a csúcspontra illeszkedő alkotók szögét felezik, a felület fősíkjai.

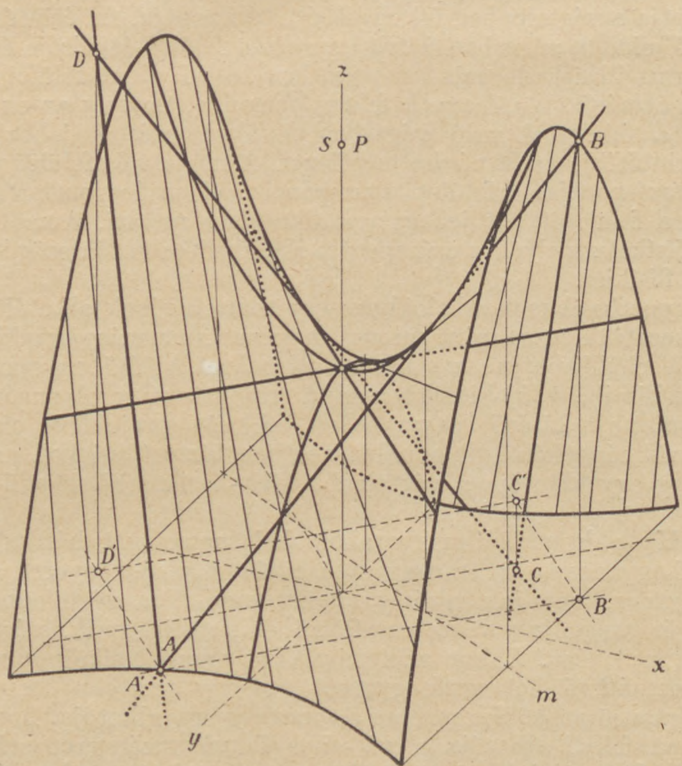
A hyperbolikus paraboloid egy-egy torzseregének alkotóit ugyanúgy szerkesztjük meg, mint minden hyperbolikus másodrendű felületnél, tehát előállíthatjuk *a)* három párosával kitérő egyenes közös transzverzálisaiként, *b)* kitérő tengelyű projektív síksorok sugárképződményeként, *c)* kitérő egyeneseken fekvő projektív pontsorok sugárképződményeként, de minden esetben biztosítani kell azt, hogy a torzsereg egy alkotója a végtelenben fekvő síkra illeszkedő egyenes legyen.

a) Ha a hyperbolikus paraboloid l torzseregét három párosával kitérő egyenes közös transzverzálisaiként kívánjuk nyerni, a három kitérő egyenes, mondjuk vezéregyenesek, egyikét a végtelenben veszszük fel és megadjuk végesben fekvő sík, az iránysík, végtelenben fekvő egyeneseként. Ekkor az iránysíkkal parallel síkok mindegyike a végesben fekvő két vezéregyenest egy-egy pontban metszi, kétkét ilyen pont összekötő egyenese a torzsereg egy alkotója. A torzsereg végtelenben fekvő alkotója a végesben fekvő vezéregyenesek végtelenben fekvő pontjainak összekötő egyenese, tehát minden sík, mely a végesben fekvő vezéregyenesekkel parallel, jellemzi a torzsereg végtelenben lévő alkotóját, utóbbi síkok közül bármelyik a felület másik iránysíkja.

b) Amennyiben a hyperbolikus paraboloid l torzseregét g_1 és g_2 kitérő tengelyű projektív síksorok sugárképződményeként akarjuk előállítani, három megfelelő síkpárral adjuk meg a projektivitást, de úgy, hogy a g_1 tengelyű síksor g_2 egyenessel parallel síkjának megfelelője a g_2 tengelyű síksorban a g_1 egyenessel parallel sík legyen.

c) Végül, ha a hyperbolikus paraboloid l torzseregét g_1 és g_2 kitérő egyeneseken lévő projektív pontsorok sugárképződményeként akarjuk előállítani, akkor a projektív pontsorok projektivitását úgy kell megadni, hogy az egyik egyenes végtelenben fekvő pontjának a másik egyenes végtelenben fekvő pontja feleljen meg, vagyis a pontsorok hasonlóan projektív pontsorok legyenek. Ebből leolvashatjuk azt is, hogy a hyperbolikus paraboloid egyik torzseregének alkotói a másik torzsereg alkotóit hasonló pontsorokban metszik.

104. §. Torznégyszöggel megadott hyperbolikus paraboloid. A hyperbolikus felületeknél az egyik torzsereg két tetszőleges alkotója és a másik torzsereg két tetszőleges alkotója torznégyszöget alkot. Nevezetes, hogy a hyperbolikus paraboloid tetszőleges torznégyszögével teljesen van megadva. A hyperbolikus paraboloid jobb megismerése végett



164. ábra.

e meghatározásával kapcsolatban megbeszéljük lényegesebb adatainak szerkesztését és az eredmények axonometrikus képeit a 164. ábrában mutatjuk be. Az $ABCD$ torznégyszöget a derékszögű koordinátarendszer síkjával szemben úgy vettük fel, hogy a négyszög szemközt fekvő oldalaival parallel síkok első vetítősíkok legyenek. Ennek következménye, hogy $A'B'$ és $C'D'$, továbbá $A'D'$ és $B'C'$ első vetületek parallel egyenesek; az iránysíkok első vetítősíkok, melyeknek első nyomvonalai az $A'B'$, illetve az $A'D'$ egyenesekkel parallel egyenesek; a felület átmérői a z tengellyel parallel egyenesek; átmérő síkjai első vetítősíkok. Mindenekelőtt megszerkesztettük a paraboloid ama torzseregét, melyhez az AD és BC négyszög oldalak is tartoznak; a torzsereg egyes alkotóit úgy határoztuk meg, hogy az AD oldallal parallel tetszőleges iránysíknak az AB és CD oldalakkal való metszéspontjait összekötöttük.

A felület csúcsalkotói egyrészt a felület tengelyére vagy bármely átmérőjére merőleges egyenesek, másrészt az iránysíkokkal parallel egyenesek, tehát ezek irányát szolgáltatja az átmérőre merőleges sík és iránysík közös egyenese, ilyen egyenes az első képsíkban fekvő $A'D'$ és $A'B'$ egyenes. E szerint az egyik csúcsalkotó az AD és BC egyenesek $A'B'$ egyenessel parallel transzverzálisa, a másik csúcsalkotó AB és CD egyenesek $A'D'$ egyenessel parallel transzverzálisa. Az alkotók közös pontja a felület csúcspontja, a csúcspontra illeszkedő első vetítősugár a felület tengelye, a csúcsalkotók szögeit felező és a tengelyre illeszkedő síkok a felület fősíkjai.

A fősíkokon az alkotók nyompontjai a főmetszetek pontjai, a felület mindkét főmetszete parabola, e parbolák közös csúcspontja a felület csúcspontja. Az egyik parabolának pontjai a felület csúcspontjához tartozó érintősíkja alatt, a másik parabolának pontjai e sík fölött vannak.

A felületet határoltuk három síkmetszetével. Két síkmetszet síkja az egyik fősíkkal parallel, melyek közül az egyik a torznégyszög B csúcspontjára illeszkedik és mindkét sík a fősíktól egyenlő távolságban van. E határoló síkmetszetek kongruens parabolák, mert a fősík a felület szimmetria síkja, továbbá kongreunsek egyúttal azzal a főmetszetparabolával, melynek síkja a síkmetszetek síkjaival parallel, mert a paraboloidot parallel átmérősíkok kongruens parabolákban metszik, mint azt az elliptikus paraboloiddal kapcsolatban kimutattuk. A harmadik metszet síkja az alaprajz síkja, amely egyúttal felvételünk szerint a felület tengelyére merőleges sík. A harmadik metszet hyperbola, melynek középpontja a felületi tengely első nyompontja, mert a metsző sík végtelenben fekvő egyenesének poláregyenese a tengely. A hyperbola tengelyei a fősíkok első nyomvonalai, asymptotái pedig az iránysíkok első nyomvonalaival parallel egyenesek, mert a felület végtelenben fekvő pontjaihoz tartozó érintősíkok az iránysíkok.

Végül megszerkesztettük a hyperbolikus paraboloid kontúrgörbéjének síkját. Parallel vetítésnél minden másodrendű felület kontúrgörbéjének síkja átmérősík, tehát a jelen esetben a felület tengelyével parallel sík, első vetítősík. Ez az első vetítősík jellemezve van első nyomvonalával. A kontúrgörbe síkja a végtelenben fekvő vetítési középpont polársíkja, e polársík első nyomvonalát a 100. § 159. ábra szerint szerkesztjük meg. Meghatározzuk az alaprajz síkjának S pólusát a felületre nézve. Az S pont a felület tengelyének ama pontja, melynek távolsága az alaprajz síkjától a csúcspontnak az alaprajz síkjától való távolságának kétszerese, mert az első képsíkban fekvő hyperbola és főmetszetparabola közös pontjaihoz tartozó érintősíkok mindenesetre az S pontra illeszkedők. Az S ponton átmenő axonometrikus vetítősugár az alaprajz síkját P pontban metszi, melynek axonometrikus képe az S pont axonometrikus képével azonos. A P pontnak polárisa, m, a hyperbola metszetre nézve a kontúrgörbe síkjának első nyomvonala.

Torzfelületek, csavarfelületek.

105. §. A torzfelületekről általában. Terünk négyméretű egyenes sokaságából sokféleképpen választhatunk ki egyméretű egyenes sokaságot. Amennyiben a kiválasztott egyméretű egyenes sokaság felületet alkot, a felületet egyenesvonalú felületnek mondjuk. Az egyenesvonalú felületek két osztályát különböztetjük meg. Az egyik osztályba tartoznak a kifejthető felületek, a másikba a torzfelületek. Az egyenesvonalú felület kifejthető, ha minden alkotó pontjaihoz tartozó felületi érintősíkok csak alkotóról alkotóra változnak, de ha egy-egy alkotó pontjaihoz tartozó érintősíkok különböző síkok, akkor a felület torzfelület. Itt csak azokkal a torzfelületekkel kívánunk foglalkozni, melyek a technikust közelebbről érdeklik. E felületeket mindig három térgörbe közös transzverzálisaiként állítjuk elő. A térgörbéket a felület vezérgörbéinek nevezzük; természetes, hogy vezérgörbéknek síkgörbéket is választhatunk. Legyenek a felület vezérgörbéi c_1, c_2, c_3, akkor az egyenesvonalú felület egy alkotóját úgy szerkesztjük meg, hogy a c_1 görbén felvett tetszőleges P_1 pontot összekötjük c_2, majd a c_3 minden pontjával. Ilyen módon két koncentrikus kúpfelületet nyerünk, az egyiknek vezérgörbéje a c_2, a másiké a c_3 görbe és mindkét kúp közös csúcspontja a P_1 pont. A koncentrikus kúpok közös alkotókban metszik egymást, minden közös alkotó az egyenesvonalú felület alkotója, mert a három vezérgörbe közös transzverzálisa. A felület alkotójának szerkesztéséből kitűnik, hogy a felület P_1 pontjára annyi alkotó illeszkedik, ahány alkotóban a két kúpfelület metszi egymást. E körülményt úgy fejezzük ki, hogy c_1 görbe a felület többszörös görbéje. A felület alkotóinak szerkesztésénél a vezérgörbék egyenrangú szerepet játszanak, tehát általában a c_2 és c_3 vezérgörbék is a felületnek többszörös görbéi.

Messe a c_1 görbe P_1 pontjára illeszkedő egyik felületi alkotó a c_2 görbét a P_2 és a c_3 görbét a P_3 pontban. A felületi alkotó kitüntetett három pontjában megállapíthatjuk a felület érintősíkját. A P_1 pontbeli érintősík jellemezve van a c_1 görbe P_1 pontbeli t_1 érintőjével és a felületi alkotóval. Hasonlóan megszerkesztve a felület P_2 és P_3 pontjában az érintősíkokat, megállapíthatjuk, hogy a felület az egyenesvonalú felületek mely osztályába tartozik. Ha P_2 pontban c_2 érintője t_2 és P_3 pontban c_3 érintője t_3, akkor kifejthető felület esetében t_1, t_2, t_3 érintők egy síkra, az alkotómenti érintősíkra illeszkedő egyenesek; amennyiben t_1, t_2, t_3 párosával kitérők, akkor a felület torzfelület. Ha az egyenesvonalú felület vezérgörbéit tetszőlegesen vesszük fel, akkor t_1, t_2, t_3 egyenesek kitérők, s így általában tetszőlegesen adott vezérgörbékkel torzfelülethez jutunk.

106. §. Algebrai torzfelület rendszáma. Torzfelület vezérgörbéi lehetnek algebrai görbék, transzcendens görbék vagy vegyesen algebrai és transzcendens görbék. Az első esetben a felület algebrai, minden más esetben transcendens a torzfelület. Algebrai torzfelület rendszámát az algebrai vezérgörbék rendszáma állapítja meg. Egy algebrai torzfelület rendszámát már ismerjük, ez az a felület, melyet három párosával kitérő egyenes közös transzverzálisaiként nyertünk, ennek rendszáma kettő, a felület másodrendű torzfelület, tehát vagy hyperbolikus hyperboloid, vagy hyperbolikus paraboloid.

Legyenek a c_1, c_2, c_3 vezérgörbék rendszámai rendre n_1, n_2, n_3. A felület rendszáma egyenlő a tetszőleges g_1 egyenes és felület közös pontjainak számával. A g_1 egyenes és torzfelület bármely közös pontjára illeszkedő felületi alkotó a g_1, c_1, c_2, c_3 görbék közös transzverzálisa, s így a felület rendszáma egyenlő ama egyenesek számával, melyek a g_1, c_1, c_2, c_3 közös transzverzálisai. De e közös transzverzálisokat úgyis nyerhetjük, hogy meghatározzuk a g_1, c_2, c_3 vezérgörbékkel adott torzfelületet és megszerkesztjük e felületnek c_1 térgörbével való metszéspontjait, akkor utóbbi felületnek egy-egy metszéspontra illeszkedő alkotója szintén a g_1, c_1, c_2, c_3 görbék közös transeverzálisa, vagyis az eredeti torzfelület rendszáma egyenlő c_1 térgörbe és a g_1, c_2, c_3 vezérgörbékkel rendelkező torzfelület közös pontjainak számával. Mivel algebrai görbe és algebrai felület közös pontjainak száma a rendszámok szorzatával egyenlő rekurrens eljárást nyertünk az eredeti torzfelület rendszámának meghatározására. Ha g_1, g_2, g_3 tetszőleges egyenesek és

c_1, c_2, c_3	vezérgörbék	által	meghatározott	torzfelület	rendszáma	N,
g_1, c_2, c_3	«	«	«	«	«	r_1,
g_1, g_2, c_3	«	«	«	«	«	r_2,
g_1, g_2, g_3	«	«	«	«	«	r_3,

akkor $N = n_1 r_1 = n_1 n_2 r_2 = n_1 n_2 n_3 r_3$,

ahol r_3 kettővel egyenlő s így $N = 2n_1 n_2 n_3$.

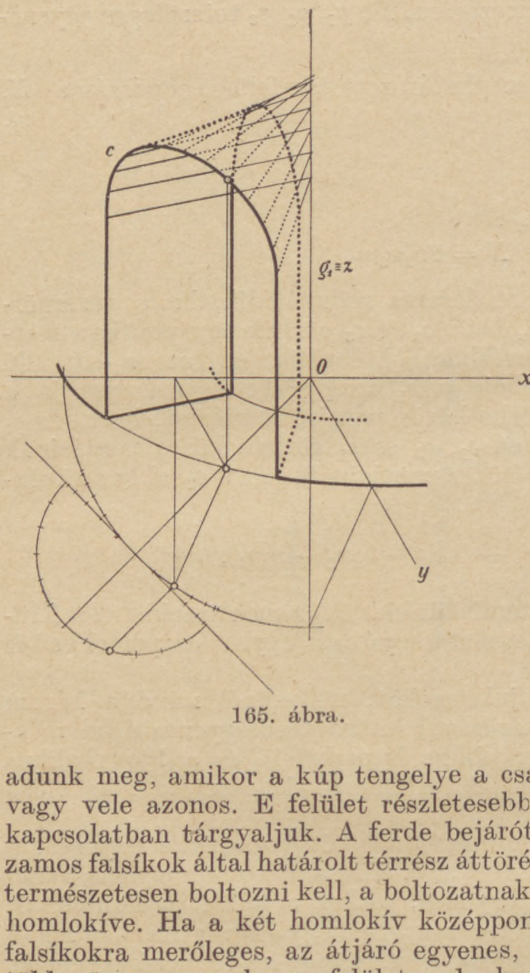
Az algebrai torzfelület rendszáma redukálódik, ha a vezérgörbék metszik egymást. Így pl., ha a c_2 és c_3 görbék egy pontban metszik egymást, akkor a torzfelületből leválik az n_1-edrendű kúpfelület, melynek vezérgörbéje a c_1 vezérgörbe és csúcspontja a második és harmadik vezérgörbe közös pontja. E szerint, ha c_2 és c_3 görbék közös pontjainak száma s_1, c_3 és c_1 görbék közös pontjainak száma s_2, végül c_1 és c_2 görbék közös pontjainak száma s_3, akkor a torzfelület rendszáma :

$$N = 2n_1 n_2 n_3 - (s_1 n_1 + s_2 n_2 + s_3 n_3).$$

107. §. Nevezetesebb torzfelületek. A nevezetesebb torzfelületek ismertetésénél a felületeket egyúttal egyes csoportokba is foglaljuk.

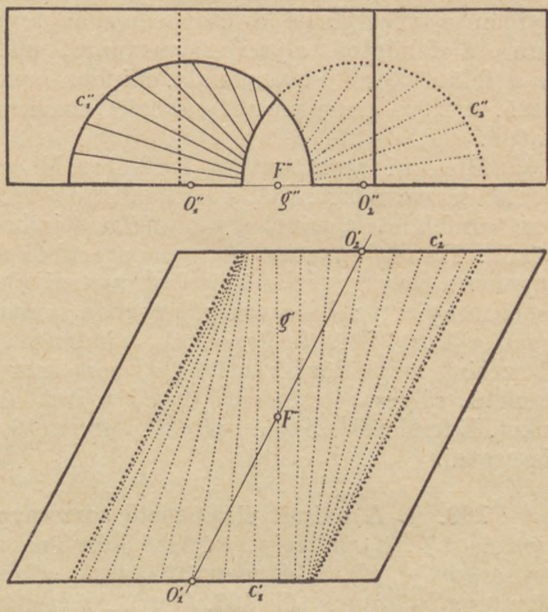
Az első csoportba soroljuk azokat, melyeknél mind a három vezérgörbe egyenes. Három párosaval kitérő vezéregyenes által meghatározott torzfelület a hyperbolikus hyperboloid és a hyperbolikus paraboloid ; ezekkel itt nem kell foglalkoznunk, mert már az előző fejezetekben letárgyaltuk.

A torzfelületek második csoportjánál két vezérgörbe egyenes, a harmadik felületenként változó görbe. Ha a két vezéregyenes közül az egyik végtelenben fekvő egyenes, akkor a felületet konoidnak mondjuk. A végtelenben fekvő vezéregyenest egy sík végtelenben fekvő egyenesével adjuk meg ; ha e sík a végesben fekvő vezéregyenesre merőleges, akkor a torzfelület egyenes konoid. Egyenes konoid a laposmenetű torzcsvarfelület, e felület vezérgörbéje csavarvonal, végesben fekvő vezéregyenese a csavarvonal tengelye és a tengelyre merőleges sík végtelenben fekvő egyenese a másik vezéregyenes. A felület egyes alkotóit az általános esetre adott utasítás szerint megszerkesztve nyerjük a csavarvonal főnormálisainak felületét. A felület tulajdonságainak részletezése a csavarfelületeknél történik. A gyakorlatban még előforduló egyenes konoid a kerek torony bejárójának boltfelülete. Ennél a vezérgörbe a kerek torony külső hengerfelületén a bejáró boltozatának homlokíve, végesben fekvő vezéregyenese a kerek torony tengelyvonala, a másik egyenes a tengelyvonalra merőleges sík végtelenben fekvő egyenese. A 165. ábrában a bejáró boltozati torzfelületét parallel perspektív képében mutajuk be. A torzfelületek e csoportjába tartozik még a körkonoid. Az általános körkonoid egyik vezérgörbéje kör, másik vezérgörbéje végesben fekvő egyenes, harmadik vezérgörbéje végtelenben fekvő egyenes. A gyakorlatban némi szerepet játszó körkonoid egész különleges egyenes körkonoid. E konoid végesben fekvő vezéregyenese a kör síkjával parallel és orthogonális vetülete e síkon a kör egy átmérőjével azonos.



165. ábra.

A torzfelületek egy harmadik csoportját alkotják ama torzfelületek, melyeknél egy vezérgörbe egyenes, a többi pedig tetszőleges két síkgörbe vagy térgörbe. E csoportba tartozó felületekből megemlítjük a zárt élesmenetű torzcsavarfelületet és a ferde bejáró boltozati felületét. A zárt élesmenetű torzcsavarfelület egyik vezérgörbéje csavarvonal, másik vezérgörbéje a csavarvonal tengelye, harmadik vezérgörbéje végtelenben fekvő kúpszelet, melyet egyenes körkúp végtelenben fekvő síkmetszetével adunk meg, amikor a kúp tengelye a csavarvonal tengelyével parallel vagy vele azonos. E felület részletesebben majd a csavarfelületekkel kapcsolatban tárgyaljuk. A ferde bejárót, helyesebben átjárót, párhuzamos falsíkok által határolt térrész áttörésénél alkalmazzuk. Az áttörést természetesen boltozni kell, a boltozatnak mindkét falsíkon van egy-egy homlokíve. Ha a két homlokív középpontjainak összekötő egyenese a falsíkokra merőleges, az átjáró egyenes, a boltozat felülete ekkor legtöbbször egyenes hengerfelület; de ha a homlokívek középpontjainak összekötő egyenese a falsíkokra nem merőleges, akkor az átjáró ferde, melynek boltozásánál alkalmazhatunk ferde hengerfelületet de alkalmazhatunk torzfelületet is. E boltozó torzfelület két vezérgörbéje a két homlokív, harmadik vezérgörbéje egyenes. A vezéregyenes a homlokívek középpontjait összekötő egyenesdarab F felezési pontján átmenő és a falsíkjára merőleges egyenes. A torzfelület egyes alkotóit a legelőnyösebben úgy szerkesztjük meg hogy megállapítjuk a vezéregyenesre illeszkedő tetszőleges síkpak metszéspontjait a homlokívekkel és az így nyert pontokat egyenesekkel összekötjük. Az így szerkesztett egyenesek a torzfelület alkotói, mivel mind a három vezérgörbét metszik (166. ábr).



166. ábra.

A torzfelületek negyedik csoportjába tartoznak ama felületek, melyeknél a vezérgörbék közül egy sem egyenes. E csoportba tartozó felületekkel nem foglalkozunk, mert a gyakorlatban szerephez nem jutnak.

A torzfelületek ábrázolásánál az ábrázolási módszerek mindegyikét alkalmazhatjuk. A torzfelület képkörrajzát általában mint sugárgörbét szerkesztjük meg oly módon, hogy a felületi alkotók képeit állapítjuk meg, ezek burkolják a felület képkörrajzát.

108. §. **A csavarfelületekről általában.** Egyenes, síkgörbe, térgörbe, felület csavarmozgásából származtatott felületek a csavarfelületek. A csavarmozgásnál az alakzat minden pontja egy-egy csavarvonalat ír le, ezek egyenlőértelmű, egyenlő menetmagasságú és koaxiális csavarvonalak. Az egyes csavarvonalak hengerei e szerint koaxiális hengerek, de e hengerek sugarai csavarvonalról csavarvonalra változó távolságok. Mondhatjuk azt is, hogy a különböző hengereken fekvő csavarvonalak egyenlőértelmű és egyenlő parameterű vonalak. A csavarfelület származtatásából következik, hogy a felület minden pontján át megy egy teljes egészében a felületen fekvő csavarvonal. Ebből következik, hogy egy megadott csavarfelület végtelen sok görbe csavarmozgásából származtatható ; a felületen fekvő minden görbe, mely a felületen fekvő összes csavarvonalakat metszi, leírja ugyanazt a csavarfelületet, ha a csavarmogás értelme, parametere és tengelye egyezik a felület eredeti származtatásánál alkalmazott csavarmozgás értelmével, parameterével és tengelyével. Tehát felület csavarmozgásából származtatott csavarfelület, amikor a csavarfelület a mozgást végző felület összes momentán helyzeteinek közös burkoló felülete, szintén síkgörbe vagy térgörbe csavarmozgásából származtatható. Adott görbe vonal csavarmozgásából származtatott

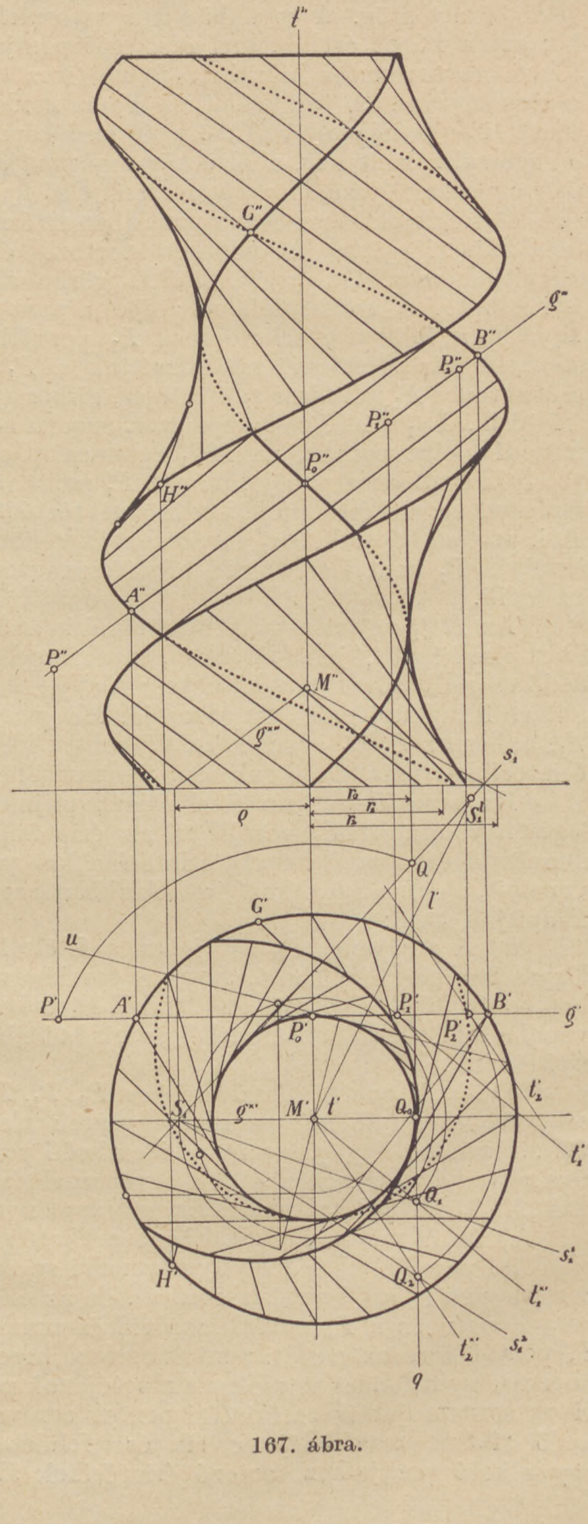
felületnél az adott görbe vonalat vezérgörbének is mondhatjuk, tudniillik az adott görbe vonalra illeszkedő összes felületi csavarvonalak vezérgörbéje. Ha a csavarfelület vezérgörbéje a csavarmozgás tengelyét metszi, akkor a tengely a felületen lévő egyenes, amenynyiben a vezérgörbe a csavarmozgás tengelyét nem metszi, akkor van a felületen olyan csavarvonal, melynek sugara a legkisebb, ez a felület torokcsavarvonala. Minden csavarfelület önmagában eltolható, mert a csavarmozgással leírt csavarvonalak önmagukban eltolhatók.

Műszaki szempontból legfontosabb csavarfelületek az egyenes vonal csavarmozgásából származtatott felületek. E felületek általában torzfelületek, mivel egy alkotó pontjaihoz tartozó érintősíkok különbözők. Ha az egyenes csavarmozgásából származtatott felületnél az egyenes a csavarmozgás tengelyét metszi, akkor a felület zárt, ellenkező esetben nyitott ; ha a mozgó egyenes a csavarmozgás tengelyére merőleges, akkor a felületet laposnak, minden más esetben élesnek mondjuk. E szerint megkülönböztetünk *a)* zárt laposmenetű, *b)* nyitott laposmenetű, *c)* zárt élesmenetű és *d)* nyitott élesmenetű torzcsavarfelületeket. E felületek mind a nyitott élesmenetű torzcsavarfelületnek speciális esetei.

109. §. A nyitott élesmenetű torzcsavarfelület. Legyen a csavarmozgás $t\,(t', t'')$ tengelye az első képsíkra merőleges, a felületet leíró egyenes g (g', g''), a fél menetmagasság g'' és t'' közös pontjának távolsága az $x_{1,2}$ tengelytől (167. ábra). Az adott feltételek mellett a jobbra csavarodó felület ama részét ábrázoltuk, melyet a csavarmozgás tengelyével koaxiális R sugarú henger, az első képsík és az első képsíktól $\frac{29}{24}$ mentemagasságban lévő sík határol. A felület egyes alkotóit egyenletes beosztás mellett tüntettük fel oly módon, hogy egy menetnek *24* alkotóját ábrázoltuk. A g egyenes minden pontja jobbra csavarodó csavarvonalat ír le, melynek tengelye a csavarmozgás tengelye,menetmagassága a csavarmozgás menetmagassága, sugara a leíró pont és tengely távolsága. E szerint, ha a g egyenes az R sugarú hengert A és B pontokban metszi, e pontok által leírt határoló csavarvonalak ábrázolhatók. Ha pedig e csavarvonalak egy menetmagasságához tartozó pontjait A illetve B ponttól kezdődőleg huszonnégyes egyenletes elosztással megszerkesztettük, akkor az egyenlően származott pontok összekötő egyenesei szolgáltatják a g egyenes különböző helyzeteit. A g és t normális transzverzálisának g egyenesen lévő P_0 pontja szintén csavarvonalat ír le, e csavarvonal a felület torokcsavarvonala, melynek első képe kör ; legyen a továbbiakban e kör sugara r_0. Az r_0 sugarú kört a felületi alkotók első képei érintik, miből már is következik, hogy a felvett helyzet mellett a felület első képkörrajza a r_0 sugarú kör.

Az első képsík és a vele parallel határoló sík a felületet egy-egy síkgörbében metszi, melynek egyes pontjai a különböző helyzetű g alkotók és határoló síkok metszéspontjai. A tengelyre merőleges síkmetszet pontjainak szerkesztéséből kitűnik, hogy a síkmetszet mozgó pont pályagörbéje, még pedig oly ponté, mely adott egyenesen egyenletes sebességgel halad, miközben az egyenes egy rája nem illeszkedő pont körül egyenletes sebességgel forog, a pályagörbe hurkolt vagy nyujtott körevolvens. A zárt élesmenetű torzcsavarfelületnél a nyomgörbe Archimedes-féle spirális.

A g egyenes minden pontja csavarvonalat ír le, e csavarvonalak mindegyikéhez tartozik egy-egy kifejthető felület, a csavarvonal érintőinek felülete. A kifejthető csavarfelülettel kapcsolatban bevezettünk egy meghatározott iránykúpot; az iránykúp M csúcspontja a csavarvonal tengelyén az első képsík fölött p távolságban fekvő pont, ahol p a csavarvonal parameterének távolságban kifejezett alakja, ugyanakkor az iránykúp vezérköre az első képsíkban a csavarvonal első képe. Így a g egyenes $P_0, P_1, P_2, \ldots$ pontjai által leírt csavarvonalak kifejthető felületeinek iránykúpjai jellemezve vannak a közös M csúcsponttal és az első képsíkban fekvő vezérkörökkel, melyeknek sugarai rendre r_0, r_1, r_2, ..., ahol e távolságok rendre a P_0', P_1', P_2', ... pontoknak távolsága az M' ponttól. Az általunk ábrázolt torzfelületnek szintén van iránykúpja, melyet a tér tetszőleges pontjára illeszkedő és a felületi alkotókkal parallel egyenesek alkotnak. Mivel a g egyenes csavarmozgásánál az egyenes és tengely szöge nem változik, a torzfelület iránykúpja egyenes körkúp, melynek tengelye a csa-



167. ábra.

varmozgás tengelyével parallel és félnyílása a g egyenes és tengely által bezárt szög. A továbbiakban a torzfelület iránykúpján kizárólag azt a kúpot értjük, melynek csúcspontja, M, azonos a felületen fekvő csavarvonalak kifejthető felületeihez tartozó iránykúpok közös csúcspontjával. A torzfelületnek ilyen módon közelebbről meghatározott iránykúpjának vezérköre az első képsíkban az M' pont körül ϱ sugárral rajzolt kör, ahol e kör egy pontja az M pontra illeszkedő és g egyenessel parallel g^x egyenesnek első nyompontja S_1.

A torzfelület tetszőleges pontjában az érintősíkot a ponton átmenő két felületi görbe a ponthoz tartozó érintőinek összekötésével állapítjuk meg. Az egyik felületi görbe a pontra illeszkedő felületi alkotó, a másik felületi görbe a pont által leírt csavarvonal. Így, ha a felület g alkotójának P_1 pontjában kívánjuk az érintősíkot megszerkeszteni, megállapítjuk a P_1 ponton átmenő felületi csavarvonal P_1 pontbeli t_1 érintőjét, akkor t_1 és g összekötő síkja az érintősík. A t_1 érintő első képe az r_1 sugarú kör érintője P_1' pontjában, második képe parallel az MQ_1 egyenes második képével, ahol a Q_1 az első képsík ama pontja, melyet P_1' pontnak M' körül az óramutató járásával egyező értelmű 90°-os szöggel történt elforgatásával nyertünk. T. i. az első képsíkban r_1 sugárral rajzolt kör ama iránykúp alapköre, amely a P_1 pont által leírt felületi csavarvonal kifejthető felületéhez tartozik.

Az MQ_1 egyenes a szerkesztett érintősík t_1 egyenesével parallel, ezért első képét $t_1^{x\prime}$ jellel láttuk el, ennek megfelelően az M pontra illeszkedő és g alkotóval parallel egyenest g^x jellel láttuk el, ahol g^x a torzfelület iránykúpjának egy alkotója. Ha g^x egyenes első nyompontja S_1, akkor az $S_1\,Q_1$ egyenes az M pontra illeszkedő és a szerkesztett érintősíkkal parallel síknak első nyomvonala, s_1^1.

Ha hasonló szerkesztéssel megállapítjuk a g alkotó P_0 és tetszőlegesen választott P_2 pontjában az érintősíkot, illetve a M pontra illeszkedő és a szerkesztett érintősíkokkal parallel síkok első nyomvonalait, akkor a következő továbbiakban hasznosítandó eredményeket állapítjuk meg:

a) A g egyenes P_0 pontjában a felületi érintősík első vetítősík. Ugyanúgy megállapítható, hogy a torokcsavarvonal minden pontjában az érintősík első vetítősík, miből következik, hogy a torokcsavarvonal a felület első kontúrgörbéje, amit különben már más úton bebizonyítottunk.

b) Az M pontra illeszkedő és a $P_0, P_1, P_2, \ldots$ pontokon átmenő csavarvonal érintőkkel parallel egyensek első nyompontjai, Q_0, Q_1, $Q_2, \ldots$ pontok egy q egyenesre illeszkedő pontok, mert a q egyenest és a rajta fekvő Q_i pontokat a g' egyenesnek és a rajta fekvő P_i' pontoknak M' körül 90°-kal való elforgatásával nyertük.

c) Az M pontra illeszkedő és a g alkotó pontjaihoz tartozó érintő síkokkal parallel síkok első nyomvonalai sugársort alkotnak. E sugársor perspektív a Q_i pontok sorával, de az előzők szerint a Q_i pontok sora kongruens a P_i' pontok sorával és parallel projekció esetében a P_i' pontok sora az eredeti pontok sorával hasonló. Mindezekből következik, hogy a felület tetszőleges alkotójának pontjaihoz tartozó érintősíkok sora projektív az érintési pontok sorával, ha az alkotóra illeszkedő síknak megfelelője e sík és felület érintési pontja. Mivel egy alkotó pontjaihoz tartozó érintősíkok általában különbözők, az egyenesvonalú felület tényleg torzfelület. Ha az M pontra illeszkedő és g alkotóval parallel $g^{\times}$ egyenes első nyompontja a Q_0 ponttal azonos pont volna, akkor a g alkotó különböző pontjaihoz tartozó érintősíkok nem különböznének egymástól, mert ekkor az M pontra illeszkedő és érintősíkokkal parallel síkok egy síkot adnak, melynek első nyomvonala a q egyenes. Mivel ekkor a $g^{\times}$ egyenes az MQ_0 egyenessel azonos egyenes és MQ_0 egyenes a torokcsavarvonal P_0 pontbeli érintőjével parallel, szerkesztéseink alapján kimondhatjuk, hogy egyenes csavarmozgásából származtatott egyenesvonalú felület csak akkor kifejthető, ha az egyenes a torokcsavarvonal érintője, ekkor a származtatott felület a torokcsavarvonal kifejthető felülete.

d) Végül szerkesztéseink utasítást adnak arra vonatkozólag, hogy hogyan kell a g alkotóra illeszkedő és adott l egyenessel parallel sík érintési pontját meghatározni. Felvesszük az M pontra illeszkedő g és l egyenessel parallel síkot, e sík első nyomvonala illeszkedik a g egyenessel parallel $g^{\times}$ egyenes első nyompontjára és illeszkedik az M pontra illeszkedő l irányú egyenes első nyompontjára, ha az így meghatározott sík első nyomvonala s_1, akkor s_1 és q közös Q pontja a keresett P érintési pont első képének pozitív értelmű elforgatottja, ahol az elforgatás M' körül 90°-kal történt. A most demonstrált szerkesztéssel állapítjuk meg a torzfelület l egyenessel parallel érintőhengerének érintési görbéjét, vagyis e szerkesztéssel határozhatjuk meg parallel világítás mellett a felület önárnyékhatárgörbéjét, illetve parallel vetítés mellett a felület kontúrgörbéjét.

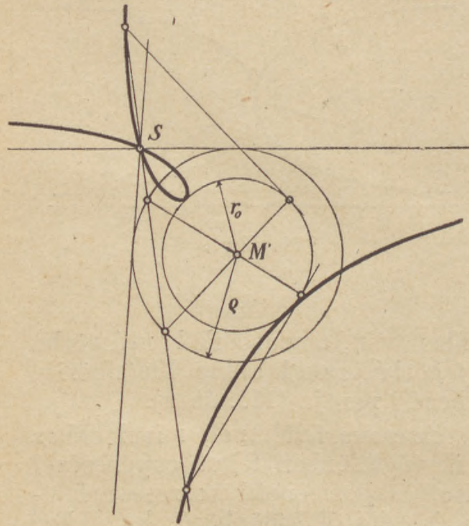
Itt megemlítjük, hogy a g alkotó asymptotikus síkja, vagyis az a sík, mely a felületet a g alkotó végtelenben fekvő pontjában érinti, a g alkotó második vetítősíkja.

110. §. A nyitott élesmenetű torzcsavarfelület második kontúrgörbéje. Mivel a második kontúrgörbe második vetítősugárral parallel érintőhenger érintési görbéje, az érintési görbe pontjait az egyes alkotókon úgy nyerjük, hogy az alkotókra illeszkedő második vetítősík érintési pontját állapítjuk meg. Legyen az alkotó, melyen a második kontúrgörbe pontját szerkeszteni akarjuk GH ($G'H'$, $G''H''$), akkor az előző §-ban nyert utasítások alapján felveszünk az M pontra illeszkedő GH egyenessel parallel egyenest, megállapítjuk ennek első nyompontját, amely a ϱ sugarú körnek egy pontja ; az eltolt alkotó első képe metszi az r_0 sugarú kört két pontban, e pontok közül kiválasztjuk azt a pontot, melynek távolsága az egyenes nyompontjától az $\overline{S_1Q_0}$ távolsággal egyenlő, az így megállapított pontban megrajzoljuk az r_0 sugarú kör érintőjét, ahol a rajzolt u érintő a g egyenessel kapcsolatban nyert q egyenes szerepét tölti be. A felvett alkotóval parallel egyenesre illeszkedő második vetítősík első nyomvonala metszi az u érintőt oly pontban, mely a keresett érintési pont első képének M' körül pozitív értelemben 90°-kal történt elforgatottja, miből az érintési pont első képe, majd felvetítéssel második képe megállapítható. A szerkesztést egyszerűsíthetjük, ha az M pontra illeszkedő és a felvett alkotóval parallel egyenes első képét kezdettől fogva az M' pont körül az óramutató járásával ellenkező értelemben 90°-kal elforgatjuk, de evvel együtt elforgatjuk az egyenesre illesztett második vetítősík első nyomvonalát is, mikor az elforgatott nyomvonal az elforgatott egyenes első nyompontjára illeszkedő és $x_{1,2}$ tengellyel parallel egyenes. Az elforgatott első nyomvonal metszi a felvett eredeti alkotó első képét a keresett érintési pont első képében. *E szerint a GH alkotóra illeszkedő második kontúrpont első képét úgy szerkesztjük meg, hogy megállapítjuk az M' pontra illeszkedő és az alkotó első képére merőleges egyenes és ϱ sugarú kör ama közös pontját, melynek az alkotó első képétől való távolsága egyezik az S_1 pontnak a q egyenestől való távolságával, e ponton átmenő és az $x_{1,2}$ tengellyel parallel egyenes metszi a felvett alkotó első képét a kívánt pontban.* A második kontúrgörbe mindkét képének vannak asymptotái, az asymptoták ama felületi alkotók megfelelő képei, melyek a második képsíkkal párhuzamos helyzetben vannak. A második kontúrgörbe egyszerűsített szerkesztése lehetővé teszi a kontúrgörbe ama pontjainak szerkesztését is, melyek a felület megadott csavarvonalán vannak, e szerkesztés részletezését az olvasóra bízom.

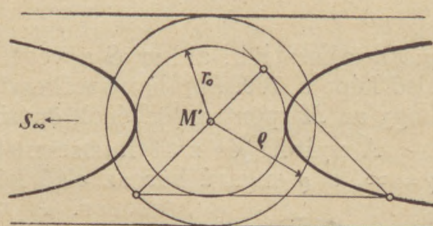
111. §. Torzcsavarfelület körülírt érintőhengerének érintési görbéje. A 109. § *d)* pontjában meghatároztuk a nyitott élesmenetű torzcsavarfelület egy alkotóján ama pontot, mely pontban a felület érintősíkja az adott l egyenessel parallel. Az ottani szerkesztést némileg egyszerűsítjük; az iránykúp csúcspontjára illeszkedő és a felvett alkotóval parallel egyenest, valamint az iránykúp csúcspontjára illeszkedő l egyenessel parallel egyenest a csavarmozgás tengelye körül az óramutató járásával ellenkező értelemben 90°-kal elforgatjuk, akkor utóbbi egyenesek által meghatározott síknak első nyomvonala és az eredetileg felvett alkotó első képének közös pontja már a keresett érintési pont első képe. E szerint, ha a torzfelület iránykúpjának vezérköre az M' pont körül rajzolt ϱ sugarú kör és a felület torokcsavarvonalának első képe az M' körül r_0 sugárral rajzolt kör, továbbá az M pontra illeszkedő és elforgatott l egyenes első nyompontja S, akkor az érintési görbe első képének egy pontját úgy szerkesztjük meg, hogy felvesszük az r_0 sugarú kör tetszőleges érintőjét, amely mindig valamely felületi alkotó első képe, megállapítjuk az érintőre merőleges körátmérő és ϱ sugarú kör egyik metszéspontját, a metszéspontot összekötjük az S ponttal, ez egyenes és a felvett érintő közös pontja a keresett pont. Az érintőre merőleges átmérő a ϱ sugarú kört két pontban metszi, e két pont közül csak az egyik választható. A választást úgy eszközöljük, hogy a torzfelület iránykúpjának a választott pontra illeszkedő alkotója és a torokcsavarvonal kifejthető felületéhez tartozó iránykúpnak az r_0 sugarú kör érintőjének érintési pontjára illeszkedő alkotója oly szöget alkosson, mely nagyságra nézve egyezik ama szöggel, melyet a torokcsavarvonal egy pontjára illeszkedő felületi alkotó a torokcsarvonal e pontjára illeszkedő érintőjével alkot.

Mindezek alapján, ha a bevezetett jelölések eddigi értelmét megtartjuk, mondhatjuk, hogy torzcsavarfelület körülírt érintőhengerének érintési görbéje oly térgörbe, melynek orthogonális projekciója a csavarmozgás tengelyére merőleges síkon a következő módon szerkeszthető síkgörbe : rajzolunk az S ponton átmenő tetszőleges egyenest, ez az egyenes a ϱ sugarú kört két pontban metszi, e pontok közül bármelyiket összekötjük az M' ponttal, utóbbi egyenes az r_0 sugarú kört két pontban metszi, e pontok közül az egyik az adott utasítás szerint kiválasztandó és a nyert pontban megrajzoljuk az r_0 sugarú körhöz az érintőt, ez érintő és az S pontra illesztett egyenes közös pontja az érintési görbe vetületének pontja (168. ábra).

Ha tárgyalásainkban mindig feltesszük, hogy a csavarmozgás tengelye az első képsíkra merőleges, akkor az érintési görbe első képének szerkesztéséből következik, hogy *a)* az S pont a görbe első képének duplapontja, mert ha az S pontból az r_0 sugarú körhöz vont érintőkön keressük a görbe pontjait, mindenkor az S pontot kapjuk ; mivel az S ponton át az r_0 sugarú körnek két érintője megy, a görbe az S ponton kétszer megy keresztül ; *b)* az S ponton átmenő tetszőleges egyenesen az S ponton kívül a görbének további két pontját kapjuk, mert a tetszőleges egyenes a ϱ sugarú kört két pontban metszi. Ezek szerint az érintési görbe első képe legalább egy duplaponttal bíró negyedrendű síkgörbe. De ha pld. a 168. ábrában a ϱ sugarú kör egy pontjának a szerkesztés szerinti társa



168. ábra.

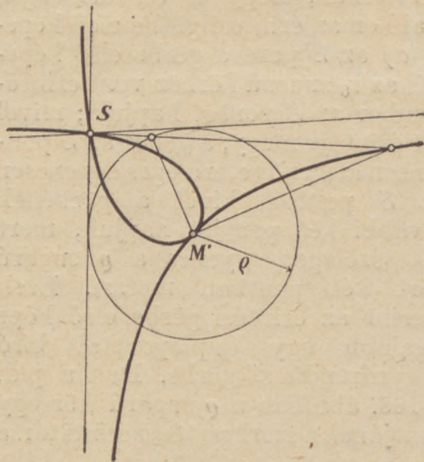


169. ábra.

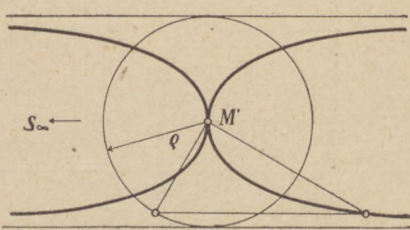
az r_0 sugarú körön a tőle ϱ—r_0 tavolságban fekvő pont lett volna, akkor a képgörbe három duplapontját nyertük volna ; *c)* az S ponton átmenő egyeneseken, melyek a ϱ sugarú kör érintői, a képgörbe pontjai végtelenben fekvő pontok, szóval a képgörbe két pontja végtelenben fekvő pont, asymptotái a ϱ sugarú körnek S pontra illeszkedő érintői. A végtelenben fekvő pontok lehetnek képzetesek is, amikor S a ϱ sugarú kör belső pontja stb.

A torzfelület második kontúrgörbéjének szerkesztésénél a körülírt henger alkotói második vetítősugarak, de akkor az S pont az $x_{1,2}$ tengely végtelenben fekvő pontja. A 169. ábrában e feltétel mellett szerkesztettük meg a második kontúrgörbe első képét. Felvételünk szerint a képgörbe oly negyedrendű síkgörbe, melynek a végtelenben van egy valós duplapontja, másik két duplapontja képzetes.

Eddigi eredményeinket alkalmazhatjuk az összes torzcsavarfelületekre, minden egyes esetben ϱ, illetve r_0 speciális értékeket vesznek fel. Így az élesmenetű zárt torzcsavarfelületnél ϱ véges, és zérótól különböző, míg $r_0=0$. Ekkor az r_0 sugarú kör érintői az M' pontra illeszkedő sugársort alkotnak. Ha ekkor az l egyenes az első képsíkkal szemben általános helyzetű, vagyis S végesben fekvő pont, akkor az érintési görbe első képének az S pont végesben fekvő duplapontja, míg a még lehetséges két duplapont mindig valós, de összeesők, amit úgy szoktunk kifejezni, hogy a görbének önérintkezése van (170. ábra). Ha pedig a zárt élesmenetű torzcsavarfelület második kontúrgörbéjének első képét szerkesztjük, akkor S a végtelenben van, a második kontúrgörbe első képe a 169. ábrában szerkesztett görbétől csak abban különbözik, hogy az M' pont a görbének önérintkezési pontja (171. ábra).

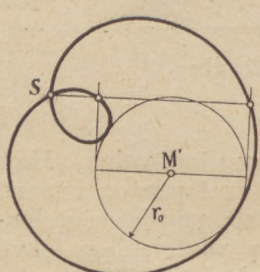


170. ábra.



171. ábra.

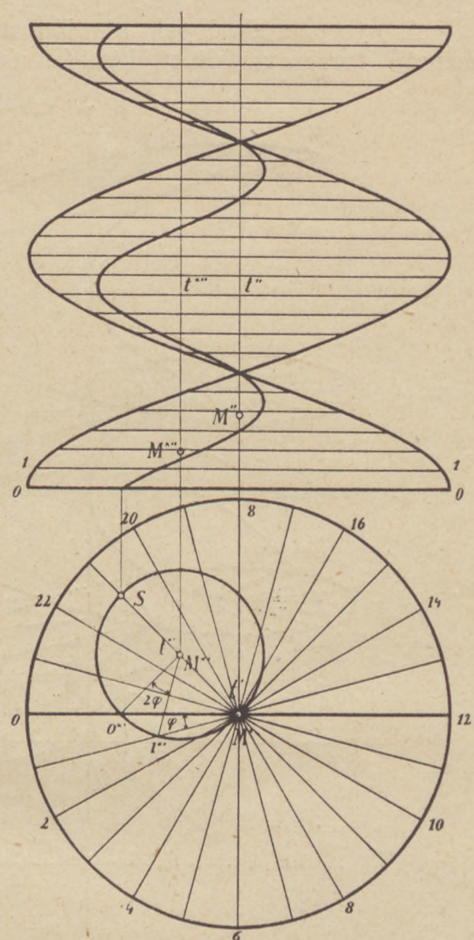
A nyitott és zárt laposmenetű torzcsavarfelületnél, mivel ekkor $\varrho=\infty$, a ϱ sugarú kör az első képsík végtelenben fekvő egyenesével azonos. A nyitott laposmenetű torzcsavarfelületnél r_0 véges és zérótól különböző, ha ekkor az l egyenes az első képsíkkal szemben általános helyzetű, vagyis S végesben fekvő pont, akkor az érintési görbe első képének pontjait úgy szerkesztjük meg, hogy az S pontra illeszkedő tetszőleges egyenesen megállapítjuk ama pontokat, melyekben az r_0 sugarú körnek a felvett egyenesre merőleges érintői metszik (172. ábra). A zárt laposmenetű torzcsavarfelületnél $\varrho=\infty$, $r_0=0$. Ha ekkor az l egyenes az első képsíkkal szemben általános helyzetű, akkor az érintési görbe első képe kör, melynek egy átmérője az $\overline{M'S}$ távolság.



172. ábra.

Még megemlítjük, hogy a nyitott és zárt laposmenetű torzcsavarfelületnél a második kontúrgörbe egyenesekből áll, az egyenesek a torzfelületnek második képsíkra merőleges alkotói. E szerint e felületek második képkörrajzai végtelen sok izolált pontból tevődnek össze.

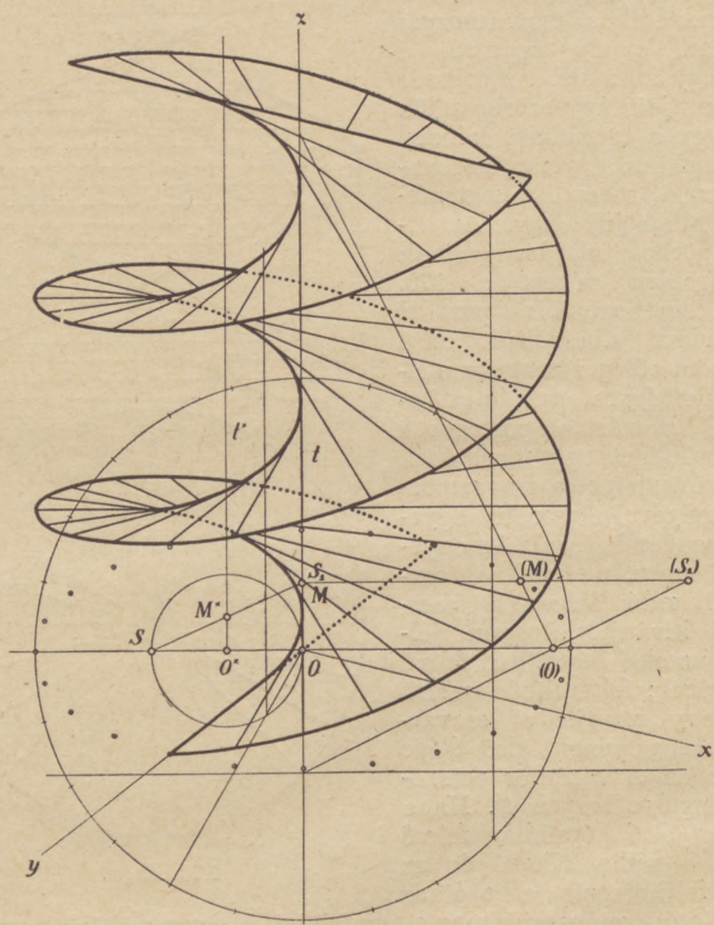
112. §. A zárt laposmenetű torzcsavarfelület. Láttuk, hogy a zárt laposmenetű torzcsavarfelület körülírt érintőhengerének érintési görbéje a felület oly görbéje, melynek merőleges vetülete a csavarmozgás tengelyére merőleges síkon kör, ha a körülírt henger alkotói a csavarmozgás tengelyével szemben általános helyzetben vannak. E szerint az érintési görbe a laposmenetű torzcsavarfelületnek és oly egyenes körhengernek áthatási görbéje, melynek egy alkotója azonos a csavarmozgás tengelyével. Az áthatásnak egyik része a csavarmozgás tengelye, mert a torzfelület minden alkotója illeszkedik a csavarmozgás tengelyére, amely egyúttal a henger egy alkotója. Az áthatás egyéb pontjait úgy szerkesztjük meg, hogy a torzfelület minden alkotójának az egyenes körhengerrel való második metszéspontját állapítjuk meg. Az áthatási görbe tulajdonságainak meghatározása végett a 173. ábrában orthogonális parallel projekcióban ábrázoltuk első képsíkra merőleges tengely mellett huszonnégyes egyenletes beosztással a zárt laposmenetű torzcsavarfelület egy menetének ama részét, melyet a csavarmozgás tengelyével koaxiális egyenes körhenger határol. Az egyenes körhenger, melynek a torzfelülettel való áthatását szerkeszteni kívánjuk,, legyen jellemezve az első képsíkban fekvő vezérkörével; feltételünk szerint e kör egy pontja a csavarmozgás tengelyének első képe t', különben a vezérkör tetszőleges, tengelye legyen t^x. Ha a torzfelület első képsíkban fekvő alkotója a nulla alkotó és az azután feltüntetett alkotó az



173. ábra.

egyes alkotó, szerkesszük meg a torzfelület és egyenes körhengerfelület áthatásának ama pontjait, melyek a nulla és egyes alkotókon vannak, legyenek e pontok 0^x és 1^x. Az áthatás első képéből leolvashatjuk azt, hogy míg a nulla alkotó az egyes alkotóba jut, az alkotó a t tengely körül φ szöggel elfordul, ugyanakkor a 0^x pont az 1^x pontba jut és az egyenes körhenger tengelye körül 2φ szöggel fordul el, mert az alkotó elfordulási szöge és az áthatási pont elfordulási szöge az első projekcióban valódi nagyságban látszik és a henger vezérkörének egy ívéhez tartozó kerületi és középponti szög. Az ábrából egyúttal azt is leolvashatjuk, hogy az alkotó emelkedésével egyenlő az áthatási pont emelkedése. Mindezekből következik, hogy az egyenes körhenger a torzfelületet csavarvonalban metszi, melynek menetmagassága a torzfelület menetmagasságának a fele, mert ha a torzfelület előállításánál alkalmazott csavarmozgás parametere, $p=\frac{z}{\varphi}$, akkor az áthatásként nyert csavarvonal parametere, $p^{\times}=\frac{z}{2\varphi}$.

A nyert eredmények alapján mondhatjuk, hogy a zárt laposmenetű torzcsavarfelület körülírt érintőhengerének érintési görbéje

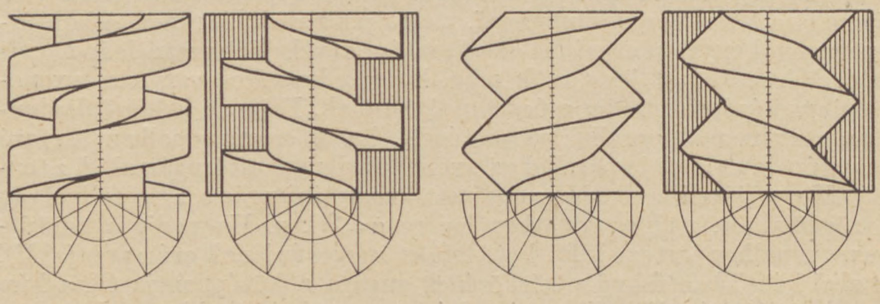


174. ábra.

mindig csavarvonal, ha a henger alkotói nem merőlegesek a csavarmozgás tengelyére. Tehát a zárt laposmenetű torzscsavarfelület axonometrikus kontúrgörbéje, ha a csavarmozgás tengelye valamely koordinátatengellyel azonos, csavarvonal. A 174. ábrában ábrázoltuk a zárt laposmenetű torzcsavarfelület $1\frac{1}{4}$ menetének adott tengelykereszt mellett orthogonális axonometrikus képét. Az ábrázolásnál a csavarmozgás t tengelyét azonosítottuk a z tengellyel és a felületet határoltuk a csavarmozgás tengelyével koaxális hengerrel. Az axonometrikus kontúrgörbe alaprajza a térben kör, melynek egy pontja a koordinátarendszer kezdőpontja O. E kör O pontra illeszkedő átmérőjének másik végpontját úgy szerkesztjük meg, hogy először megállapítjuk a z tengelyen azt az M pontot, melynek tavolsága az alaprajz síkjától a csavarmozgás parameterével egyenlő, az M ponton átmenő axonometrikus vetítősugár metszi az első képsíkot az S_1 pontban, melynek axonometrikus képe az M pont axonometrikus képével azonos, ha az S_1 pontot a z tengely körül 90°-kal az óramutató járásával ellenkező értelemben elforgatjuk, akkor az elforgatott pont, melyet új helyzetében S-sel jelöltünk, a keresett körátmérő másik végpontja. Ha a kontúrcsavarvonal hengerének átmérője $2r$, ahol a rajz szerint $2r=(O)(S_1)$, akkor $2r$ az alaprajz síkjának O pontra illeszkedő első fővonalára közvetlenül felmérhető, mert ezen rövidülés nincs. A kontúrcsavarvonal egyes pontjainak szerkesztése evvel elintézettnek is mondható. Még csak azt jegyezzük meg, hogy a kontúrcsavarvonal axonometrikus képében mindig csúcspontok vannak. Ez csak akkor tulajdonsága csavarvonal parallel vetületének, ha a csavarvonalhoz tartozó iránykúp egy alkotója parallel az axonometrikus vetítősugárral. A z tengely M pontjára illeszkedő axonometrikus vetítősugár a z tengellyel oly μ szöget alkot, melyre vonatkozólag $\operatorname{tg}\mu=2r:p$. Ha pedig a kontúrcsavarvonalhoz tartozó kifejthető felület iránykúpjának csúcspontja $M^\times$, az első képsíkban fekvő vezérkörének sugara r, középpontja $O^\times$, a kúp tengelye $t^\times$, a kúp félnyílása ν és a kúp magassága $p^\times$, akkor a $t^\times$ tengely axonometrikus vetítősíkjában fekvő egyik kúpalkotó az axonometrikus vetítősugárral parallel, mert t és $t^\times$ egyenesek parallel egyenesek és $\operatorname{tg}\nu=r:p^\times$, ahol $2r=(O)(S_1)$, továbbá $2p^\times=p$, tehát $\mu=\nu$, de evvel kimutattuk, hogy a laposmenetű torzcsavarfelület axonometrikus képkörrajza mindig csúcspontokat mutat.

113. §. Csavarok. A zárt laposmenetű és élesmenetű torzcsavarfelületek részei a csavaroknál mint határoló felületek szerepelnek.

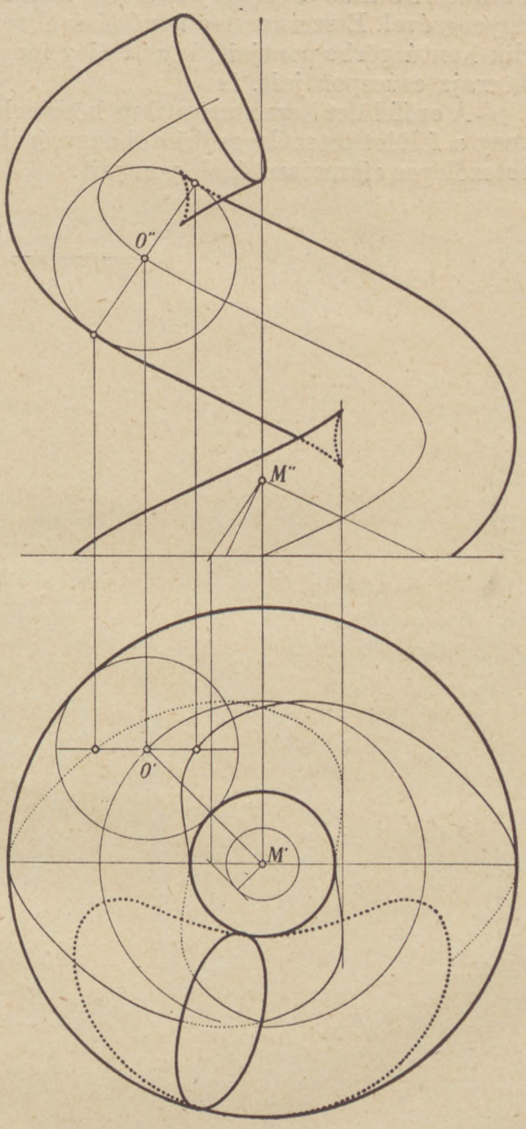
Minden csavar két részből áll, az egyik a csavarorsó vagy röviden csavar, a másik a csavartok vagy csavaranya. A csavarnak van belső hengere, ez a csavar magja, a csavar magja egyenes körhenger. A csavarnak a maghengeren kívüli részét a csavar csavarmenetének mondjuk. A csavart jellemzi a csavar meridiánmetszete, ahol a meridiánmetszet a csavarnak a maghenger tengelyére illeszkedő síkkal való síkmetszete. A meridiánmetszet csavarmozgásából nyerjük a csavar csavarmenetét. Ha a csavarmozgás menetmagassága m, akkor a meridiánmetszetnek ama része, melyet a tengelyre merőleges és egymástól m távolságban lévő egyenesek határolnak, a csavar profilja. Amennyiben a profil egy menetmagasságon belül egy és ugyanazon alakzatnak kétszerese, háromszorosa stb., a csavarmenet kétszeres, háromszoros stb. A legegyszerűbb csavaroknál a csavar profilja részben oly oblongum három oldala, melynek negyedik oldala a maghenger alkotójának része és részben a maghenger alkotójának egy darabja, vagy pedig a profil oly egyenlőszárú háromszög, melynek alapja a maghenger alkotójának egy része stb. Az első esetben a csavart laposnak, a másik esetben élesnek mondjuk. A profil minden pontja csavarvonalat ír le ; ama csavarvonal hengerének átmérője, melynek a profilon lévő megfelelő pontja a csavar tengelyétől maximális tavolságban van, a menetármérő, míg a maghenger átmérője a magátmérő. A két átmérő különbségének fele a menetmélység. Minden csavarorsóhoz megfelelő csavaranya tartozik. A csavaranya csavarmenete a csavarorsó csavarmenetével azonos, a csavaranya mint test határolva van a csavarorsó felületével és a csavar tengelyével koaxiális szabályos hasábbal, melynek egy-egy lapja a csavar tengelyétől a menetátmérő felénél nagyobb tavolságban van, továbbá határolva van a csavar tengelyére merőleges két síkkal. Az utóbbi két síkhatárolás helyett a gyakorlatban sokszor gömbfelületi vagy kúpfelületi határolást alkalmazunk. A 175. és 176. ábrában egy laposmenetű és egy élesmenetű csavarorsót ábrázoltunk és mindkét esetben



175. ábra. 176. ábra.

a megfelelő csavaranyának belsejébe látható részét tüntettük fel. Megjegyzem, hogy az ábrázolt csavarok méretei a szabványosított csavarmenetrendszerek csavarjainak méreteitől teljesen eltérők, ilyeneket fémből nem készítenek.

114. §. Az Archimedes-féle csőfelület. Gömb csavarmozgásával származtatott burkoló felület az Archimedes-féle csőfelület. E felület ábrázolásánál a csavarmozgás tengelyét az első képsíkra merőlegesen vettük fel és megadtuk a gömb középpontja által leírt csavarvonal két képét (177. ábra). Legyen e csavarvonal hengerének sugara R és a gömb sugara r. Ha $R>r$, akkor a csőfelület nyitott, minden más esetben zárt. A csőfelület második képkörrajza körök enveloppgörbéje, ahol az egyes körök a mozgó gömb egyes helyzeteinek megfelelő második képkörrajzai. A csőfelület első képkörrajza szintén körök enveloppgörbéje, még pedig a mozgó gömb első képkörrajzainak burokló görbéje. Mivel a mozgó gömb középpontjának pályagörbéje az első projekcióban kör, a csőfelület első képkörrajza két koncentrikus kör, e körök közös középpontja a csavarmozgás tengelyének első képe, az egyik kör sugara $R-r$ és a másik kör sugara $R+r$. Maga az első kontúrgörbe két koaxiális csavarvonal, e csavarvonalak meghatározó adatai az ábrából közvetlenül leolvashatók. A második kontúrgörbe egyes pontjainak szerkesztésénél felhasználjuk azt a kört, melyben két szomszédos helyzetben lévő gömb metszi egymást. Két gömb áthatásának végesben levő része mindig kör, melynek síkja a centrálisra merőleges. Szomszédos helyzetű gömbök centrálisa a mozgó gömb középpontja által leírt csavarvonal érintője. E szerint két szomszédos gömb közös körének síkját a mozgó gömb adott helyzetében úgy nyerjük, hogy megszerkesztjük a mozgó gömb középpontja által leírt csavarvonal ama normálsíkját, mely a mozgó gömb pillanatnyi helyzetéhez tartozik. E sík a gömböt e helyzetében legnagyobb gömbi körben metszi, e kör a csőfelület ú. n. karakterisztikus görbéje. Tekintetbe véve azt, hogy a csőfelületi pontok az összes szomszédos helyzetű gömbök áthatási görbéire illeszkedő pontoknak az összessége, mondhatjuk azt is, hogy az Archimedes-féle csőfelület oly kör csavarmozgásából származtatott felület, melynek síkja a kör középpontja által leírt csavarvonal normálsíkja. A csőfelületnek a karakterisztikus körrel való származtatása teszi lehetővé a második kontúrgörbe pontjainak szerkesztését. Ha a mozgó gömb momentán középpontja O és a középpont által leírt csavarvonalhoz tartozó kifejthető felület iránykúpjának csúcspontja M, akkor a második kontúrgörbe pontjai a momentán helyzetű gömb második képkörrajzának ama pontjai, melyekben a momentán karakterisztikus kör metszi. E célból megszerkesztjük a karakterisztikus kör síkjának és a gömb második kontúrkör síkjának metszésvonalát. A metszési egyenes a gömb középpontjára illeszkedő



177. ábra.

egyenes, melynek irányát az iránykúp segítésével állapítjuk meg. Ezt megelőzőleg megállapítjuk a középpontok által leírt csavarvonal egy binormálisával parallel és az M pontra illeszkedő egyenes első nyompontját, melynek felhasználásával megrajzoljuk az M pontra illeszkedő és az összes binormálisokkal parallel egyenesek által meghatározott kúp első nyomkörét. E kúp egy-egy érintősíkja a csavarvonal egy-egy normálsíkjával parallel. Ha e kúp ama érintősíkjának első nyomvonalát rajzoljuk, mely az O ponthoz tartozó normálsíkkal parallel, akkor e síknak O pontra illeszkedő második fővonala parallel a momentán karakterisztikus kör síkjának és a momentán normálsíknak közös egyenesével. E szerkesztés ismétlésével rendre megszerkesztve a második kontúrgörbe pontjait, közelítőleg megállapíthatjuk a második képkörrajz csúcspontjait. is

A csőfelület karakterisztikus köreinek felhasználásával szerkesztjük meg a felület tetszőleges érintőhengerének érintési görbéjét és a felület tetszőleges síkmetszetének pontjait.

HARMADIK FEJEZET.

A KÓTÁS PROJEKCIÓ.

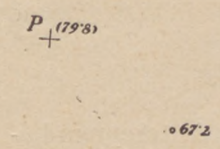
115. §. A kótás projekció. Terepek ábrázolásánál és terepmunkálatok tervezésénél főleg a kótás projekciót alkalmazzuk. *A kótás projekció orthogonális parallel projekció egy képsíkon, melyet mindig horizontális helyzetben veszünk fel. A horizontális* képsíkon kívül a *képsíkkal parallel* síkokat vezetünk be, e *síkok a nívósíkok,* e szerint a nívósíkok parallel síksort alkotnak, melynek tengelye a képsík végtelenben fekvő egyenese. A legfontosabb nívósík a nulla nívósík, ez a gyakorlatban a tenger szintjének a síkja, ez az a sík a kótás projekcióban, melytől a terep és ábrázolandó alakzat minden pontjának tavolságát adjuk meg. Pontnak a nulla nívósíktól való tavolságát mindig méterekben adjuk és általában a kótás projekcióban minden tavolságot a méter hosszegységgel mérünk. A nívósíkok közül kiemelendők az ú. n. főnívósíkok, melyeknek a nulla nívósíktól való tavolsága méterekben kifejezve egész szám. Képsíkul bármely nívósík választható, mert a kótás projekció orthogonális parallel projekció s így térbeli alakzat különböző nívósíkokban lévő képei födésben vannak, tehát a kép előállításánál nem is kell megemlíteni, hogy a képet melyik nívósíkban gondoljuk.

Az alakzat képe mindig bizonyos méretarány szerint készül, a szokásos méretarányok a következők :

térképeknél : *1:75000, 1:50000, 1:25000,*
vasútépítésnél, útépítésnél, vázlatrajzoknál : *1:500,*
tervezéseknél, munkaterveknél : *1:200, 1:100, 1:50,*
részletes munkaterveknél : *1:25, 1:20, 1:10,*
kisebb részletmunkáknál : *1:5, 1:2, 1:1,*
nagyított képeknél : *1:0·5, 1:0·1, 1:0·001.*

Ha a méretarány szó rövidített jelölésére az M betűt használjuk, az $M=1:25$ szerint készített rajz azt jelenti, hogy az eredeti alakzat helyett vele hasonló oly alakzatot ábrázoltunk, melynek minden mérete az eredeti alakzat megfelelő méretének *25*-öd része. Mivel orthogonális parallel projekcióban csak képsíkkal parallel egyenesen lévő tavolság képe mutatkozik valódi nagyságában, a kótás projekcióban csak nívósíkra illeszkedő egyenesen lévő távolságról állapíthatjuk meg közvetlenül a távolság valódi nagyságát, ill. az ismeretes valódi nagyságból a távolság képhosszát. Pl. ha $M=1:8$, a $3\ m$-es távolság képhossza $3\ m : 8 = 0{\cdot}375\ m$, vagyis $375\ mm$; ha pedig ugyanazon méretarány mellett a rajzban egy horizontális hosseúság $9\ mm$, akkor a valódi hossza $9\ mm \times 8 = 72\ mm$.

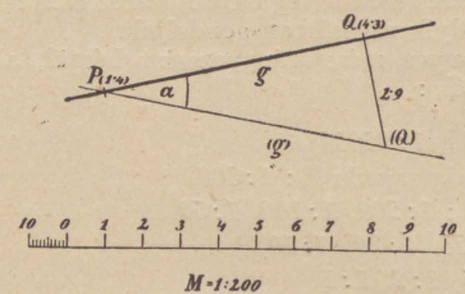
116. §. A pont ábrázolása. A pont egy orthogonális projekciójával nincs meghatározva. Az orthogonális parallel projekcióban két képsíkon a pont a horizontális első képsíkon lévő képéhez megadtuk második képét, ekkor a második rendező megadta a pont távolságát az első képsíktól, ezt a második rendezőt a kótás projekcióban helyettesítjük a második rendező mértékszámával, e mértékszám megmondja, hogy a képével adott pont a nulla nívósíktól hány méter távolságban van, a mértékszám a pont kótája. A kóta pozitív, ha a pont a nulla nívósík fölött van, ellenkező esetben negatív. Mivel a kótás projekcióban a pontnak csak egy képét rajzoljuk, a kép jelzésére szokásos vesszőzést mellőzzük, a pont képéhez az eredeti jelzést írjuk és utána zárjelben feltüntetjük a pont kótáját. Sokszor a pont ábrázolásánál a betűjelzést is elhagyjuk, ekkor a pont képe mellé csak a pont kótáját írjuk a zárójel elhagyásával (178. ábra).



178. ábra.

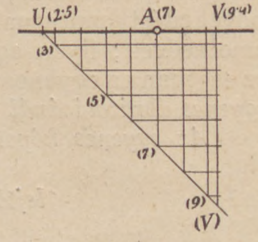
117. **§. Az egyenes ábrázolása.** Az egyenes képe, mint minden centrális projekcióban, a kótás projekcióban is egyenes, továbbá minden az egyenesre illeszkedő pont képe az egyenes képére illeszkedő pont. Az egyenes puszta képével nincs jellemezve, ezért az egyenes ábrázolását kiegészítjük két pontjának kótás ábrázolásával.

Legyen az $M=1:200$ méretarány szerint az egyenes két pontjának képe $P(1{\cdot}4)$, $Q(4{\cdot}3)$ (179. ábra). A két pont által meghatározott tavolság valódi nagyságának szerkesztésénél ugyanúgy járunk el, mint az orthogonális parallel projekcióban, az egyenes vetítősíkját a P ponton átmenő nívósíkban lévő képe körül e nívósíkba forgatjuk. A valódi távolságnak az adott méretarány szerinti redukált nagysága oly derékszögű háromszög átfogója, melynek egyik befogója a pontok képeinek távolsága, másik befogója a két pont redukált kótakülönbsége, vagyis $2{\cdot}9\ m : 200 = 0{\cdot}0145\ m = 14{\cdot}5\ mm$. A valódi távolság a $P(Q)$ tavolság 200-szorosa, e szorzás tényleges elvégzésének elkerülésére skálát, léptéket használunk, melynek segítségével minden horizontális távolság képhossza és megfordítva leolvasható. Még megemlítjük, hogy az egyenes tárgyalt leforgatásával megszerkesztettük az egyenes α képsíkszögét valódi nagyságban, ez az a szög, melyet a leforgatott egyenes képével bezár.



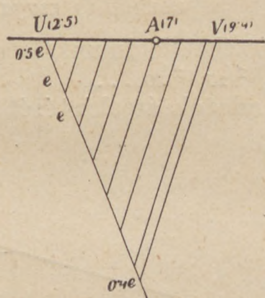
179. ábra.

Legyen $M = 1:300$ méterarány mellett egy további egyenes két pontja $U(2\cdot5)$, $V(9\cdot4)$ (180. ábra). Ha ezen az egyenesen az $A(7)$ pontot kívánjuk megszerkeszteni, akkor az egyenest az U ponton átmenő nívósíkba forgatjuk és megrajzoljuk az egyenes vetítősíkjának a főnívósíkokkal való metszésvonalainak leforgatásait, ezek a leforgatásban az egyenes képével parallel egyenesek, melyeknek egyes pontjait úgy nyerjük, hogy a V (V) egyenesre a V ponttól számítva felmérjük először a $0\cdot5$ m méretarány szerinti képhosszát, majd egymásután az 1 m redukált hosszát. A főnívósíkokkal való metszésvonalak a leforgatásban a leforgatott egyenest rendre oly pontokban metszik, melyek az eredeti egyenes és főnívósíkok metszéspontjainak leforgatottjai, a nyert pontok felállításával nyerjük rendre az egyenes ama pontjainak képeit, melyeknek kótája 3, 4, 5,... A szerkesztésből megállapítható, hogy az UV egyenes képén ama pontokat, mely pontokhoz tartozó kóták 3, 7, 9, úgy szerkesztjük meg, hogy az U és V pontok által meghatározott távolság képhosszát a $0\cdot5:4:2:0\cdot4$ arány szerint osztjuk. E szerint a feladatot megoldhatjuk úgy is, hogy az U pont képén átmenő tetszőleges egyenesre egészen szabadon választott e egységnek először $0\cdot5$-részét, azután magát az egységet egymásután hatszor, végül a választott egységnek $0\cdot4$ részét felmérjük, az utolsó pontot összekötjük a V pont képével és az így nyert egyenessel az egyes osztáspontokon át parallel egyeneseket vezetünk, ezek az egyenesek az UV egyenes képét oly pontokban metszik, mely pontokhoz tartozó kóták egész számok (181. ábra).

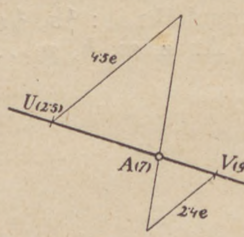


180. ábra.

Az UV egyenessel kapcsolatban a kótás projekció két alapvető feladatát intéztük el. *a)* Egyrészt meghatároztuk az egyenes ama pontjait, mely pontokhoz tartozó kóták egész számok. Amikor az egyenes és főnívósíkok metszéspontjainak képeit tüntetjük fel az egyenes képén, akkor azt mondjuk, hogy az egyenest graduáljuk. Ezentúl ha tetszőleges egyenes ábrázolásáról lesz szó, akkor azt mindig graduálva adjuk meg. *Két szomszédos főnívósík az egyenesen véges távolságot állapít meg, e távolság képhossza a graduált egyenes osztóköze, intervalluma.* *b)* Másrészt meghatároztuk az egyenes oly pontjának képét, melynek kótáját előre megadtuk. Az egyenes $A(7)$ pontjának szerkesztését interpolációnak nevezzük. *Két pontjával adott egyenesen az interpolálandó pont képét úgy szerkesztjük meg, hogy az adott pontok által meghatározott távolság képhosszát oly osztóviszony szerint osztjuk, melynek egyik tagja az egyik adott pont és interpolálandó pont nívókülönbsége, másik tagja a másik adott pont és interpolálandó pont nívókülönbsége* (182. ábra). Az egyenes graduálása és az egyenes



181. ábra.



182. ábra.

valamely pontjának interpolációja mindenkor a rajz méretarányától független.

118. §. Az egyenes lejtője és rézsüje. Az egyenes képsíkszöge, α, az egyenes emelkedési vagy esési szöge. Az egyenes mindig abban az irányban emelkedik, mely irányban az egyenesen fekvő pontok kótái növekedést mutatnak. Csak a képsíkkal parallel egyenesnek nincs emelkedése ; ilyen egyenesre illeszkedő minden pont kótája egyenlő ; ez esetben az egyenes graduálásáról nem beszélhetünk. *Képsíkkal parallel egyenes ábrázolásánál megadjuk az egyenes képét és egy pontjának kótáját.*

Az egyenes képsíkszögének tangense az egyenes lejtője, e szerint a

$$lejtő = \operatorname{tg} \alpha = \frac{vertikális\ magasság}{horizontális\ távolság}.$$

Talaj lejtőjét tizedekben, közút lejtőjét percentben és vasút lejtőjét permilleben adjuk meg. Megállapodás, hogy a tizedeket jelentő számot λ-vel, a századrészeket jelentő számot p-vel és az ezredrészeket jelentő számot e-vel jelöljük s így az egyenes lejtője

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda}{10} = \frac{p}{100} = \frac{e}{1000} = \frac{m}{h}.$$

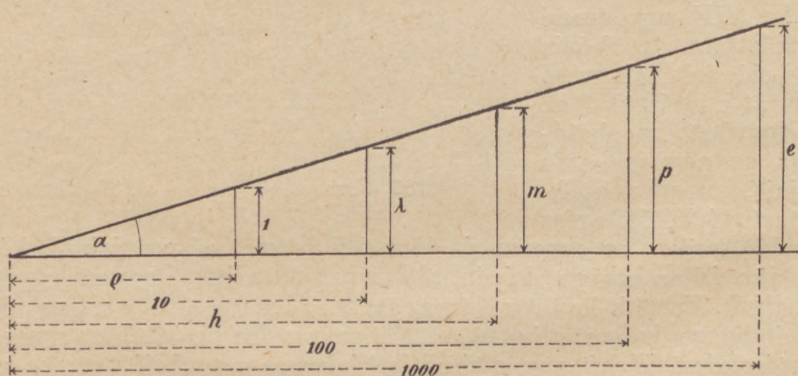
Közutaknál az út minősége szerint a lejtő legfeljebb *5%—8%-os*, míg a vasutaknál *25‰—30‰-es*.

A lejtő reciprok értéke az egyenes rézsüje s így a

$$rézsü = \operatorname{cotg} \alpha = \frac{horizontális\ távolság}{vertikális\ magasság} = \frac{h}{m} = \varrho.$$

A rézsű szokásos értékei földmunkálatoknál : $3/4$, $4/4$, $5/4$, $6/4$, $8/4$; kőmunkáknál : $1/5$, $1/10$, $1/15$, $1/20$,...

Az α, m, h, p,... adatok áttekintését nyujtja a 183. ábra.



183. ábra.

Példák : 1. Vasút egyenes tengelyvonalának emelkedése $20‰$-es, $M = 1 : 500$ méretarány mellett, mekkora az osztóköz?

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{25}{1000} = \frac{1}{40},$$

$$i = 40\ m : 500 = 0{\cdot}08\ m = 8\ cm.$$

2. Közút egyenes tengelyvonalának emelkedése *4%-os*, mekkora az osztóköz, ha $M = 1 : 500$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{100} = \frac{1}{25},\quad i = 25\ m : 500 = 0{\cdot}05\ m = 5\ cm.$$

3. $M = 1 : 500$ méretarány mellett egy egyenesen az osztóköz, $i = 12\ cm$, *ill.* $3\ mm$, az egyenes lejtője hány ezrelékes, ill. hány százalékos?

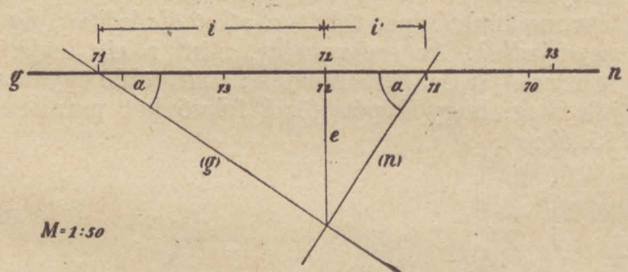
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{0{\cdot}12 \times 500} = \frac{1}{60} = 16{\cdot}6‰,\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{0{\cdot}003 \times 500} = \frac{1}{1{\cdot}5} = \frac{2}{3} = 0{\cdot}66\%.$$

4. Ha $\varrho = \frac{6}{4}$ és $M = 1 : 200$, mekkora az osztóköz?

$$i = \frac{6}{4} : 200 = 1{\cdot}5 : 200 = 0{\cdot}0075,\quad i = 7{\cdot}5\ mm.$$

119. §. Parallel egyenesek. Két párhuzamos egyenes képe parallel, ugyanakkor az osztóközök egyenlők és a graduális értelme mindkét egyenesen egyezik. Ezek alapján adott ponton át, adott egyenessel parallel egyenes ábrázolása közvetlenül elintézhető.

120. §. Adott egyenes vetítősíkjára illeszkedő és az egyenesre merőleges egyenes. Egyenes vetítősíkjára illeszkedő és rája merőleges egyenes szerkesztésénél a merőleges egyenes képe az adott egyenes képével azonos egyenes, s így lényegében csak a merőleges egyenes osztóközét kell megállapitani. Az osztóközt, mindenesetre adott méretarány mellett, szerkesztéssel vagy számítással határozhatjuk meg. Az osztóköz szerkesztésénél az egyenes vetítősíkját beforgatjuk a képsíkba, a leforgatott egyenesnek megállapitjuk azt a pontját, melynek eredetije a képsíknak



184. ábra.

választott nívósíktól *1 m*-nyire van, e ponton át a leforgatásban az adott egyenesre merőleges egyenes ama darabjának képhossza, melyet a két egyenes metszéspontja és a merőleges egyenes nyompontja határol, a merőleges egyenes osztóköze (184. ábra). A merőleges egyenes nyompontjának kótája egyezik a képsíkul választott nívósík kótájával, de az adott egyenes emelkedési irányának képe ellenkezik a merőleges egyenes emelkedési irányának képével.

A szerkesztés szerint, ha az adott egyenes képe g, leforgatottja (g) és az n normális leforgatottja (n), a g, (g), (n) egyenesek derékszögű háromszöget alkotnak, e háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság az egység méretarány szerinti hossza e, míg az átfogón keletkezett két szegmentum közül az egyik az adott egyenes osztóköze, a másik a merőleges egyenes osztóköze. Ha az osztóközök i és i', akkor

$$e^2 = i \, . \, i',$$

vagyis az egység képhossza az osztóközök mértani középarányosa.

Ha az adott egyenes képsíkszöge α és a rája merőleges egyenes képsíkszöge α', akkor, mivel e szögek pótszögek

$$\operatorname{cotg} \alpha' = \frac{1}{\operatorname{cotg} \alpha}, \quad \text{vagyis} \quad \varrho' = \frac{1}{\varrho} \cdot$$

E szerint az adott egyenesre merőleges egyenes rézsüje az adott egyenes rézsüjének reciprok értéke.

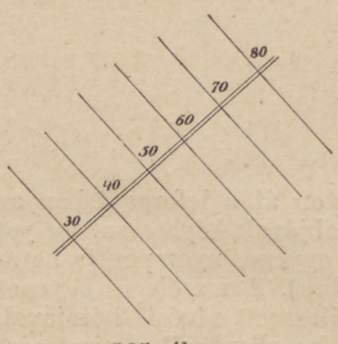
Pld. Legyen $M = 1:50$ méretarány mellett az adott egyenes osztóköze, $i = 30$ mm, mekkora a rája merőleges egyenes osztóköze? Ekkor $e = 20$ mm, s így

$$i' = \frac{1}{i} e^2 = \frac{1}{30} \cdot 400 = 13{\cdot}3 \text{ mm.}$$

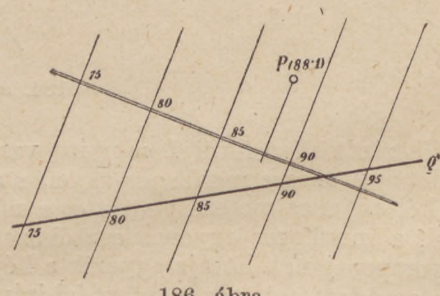
Legyen $M = 1:20$ méretarány mellett az adott egyenes rézsüje, $\varrho = \frac{6}{4}$, mekkora a rája merőleges egyenes rézsüje, ϱ', illetve osztóköze, i'?

$$\varrho' = \tfrac{4}{6} \text{ és } i' = \tfrac{4}{6} : 20 = 0{\cdot}0333 \text{ m} = 33{\cdot}3 \text{ mm.}$$

121. §. Sík ábrázolása. A síkot a főnívósíkok parallel egyenesekben metszik, a sík főnívóvonalaiban. A sík főnívóvonalainak képei egyenlő távolságban lévő parallel egyenesek, ezek jellemzésére elégséges a sík ama egyenesének feltüntetése, melyen a nívóvonalak képeinek távolsága közvetlenül lemérhető, vagyis annak az egyenesnek ábrázolása, melynek képe a nívóvonalak képére merőleges. Ilyen egyenes a sík esésvonalának képe, tehát *a síkot ábrázoltuk, ha a graduált esésvonalát megrajzoltuk.* Az esésvonalat, mint a sík legjellegzetesebb egyenesét, grafikus eljárással kitüntetjük; a sík többi egyeneseitől azzal különböztetjük meg, hogy képét közel fekvő két parallel egyenessel rajzoljuk (185. ábra).



185. ábra.



186. ábra.

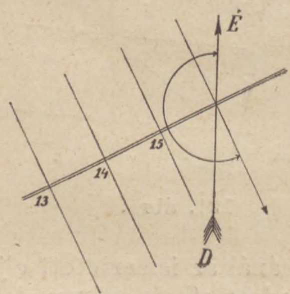
Ábrázolt sík tetszőleges nívóvonalának kótáját úgy állapítjuk meg, hogy meghatározzuk a nívóvonal és graduált esésvonal metszéspontjának kótáját. Síkra illeszkedő pontot a síkra illeszkedő nívóvonallal veszünk fel, amikor a nívóvonal kótája a pont kótájával azonos. Adott síkra illeszkedő egyenest csak képével kell megadni, ugyanakkor az egyenes graduálását a sík főnívóvonalainak képei végzik (186. ábra).

Adott pontra illeszkedő síkot úgy szerkesztünk, hogy a pontra illeszkedő tetszőleges egyenesen átmenő síkot ábrázolunk. Adott egyenesen átmenő síkot pedig úgy ábrázolunk, hogy a graduált egyenes osztáspontjain át a sík főnívóvonalait tetszőleges irányban megrajzoljuk.

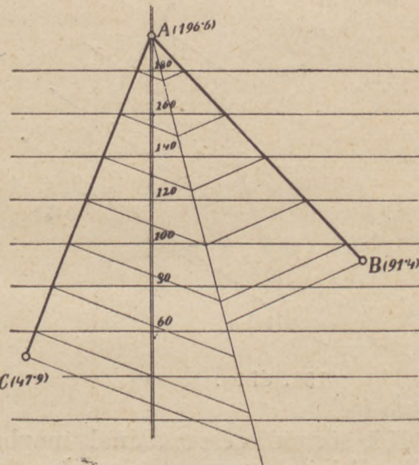
A sík esésvonalának képsíkszöge a sík képsíkszöge, az esésvonal lejtője a sík lejtője és az esésvonal rézsüje a sík rézsüje.

A geológus a kótás projekcióban ábrázolt sík nívóvonalait csapásvonalaknak, a sík hegyesszögű képsíkszögét a sík dőlésszögének mondja. A sík térbeli helyzetének megállapítására a dőlésszögön kívül bevezetjük a csapás irányát és a csapás szögét. A csapás iránya a nívóvonalak által jellemzett két irány közül az az irány, mely az óramutató járásával ellenkező értelmű 90°-kal való elforgatással az esésvonal emelkedési irányába megy át. A csapás szöge pedig az a szög, melyet a dél-északi irány a csapás irányával alkot, de oly értelemben mérve, hogy a dél-északi irány az óramutató járásával ellenkező értelemben forgatva átmenjen a csapás irányába (187. ábra).

Pld. Ábrázoltassék az A (196.6), B (91.4), C (47.9) pontok által meghatározott sík. A síkot



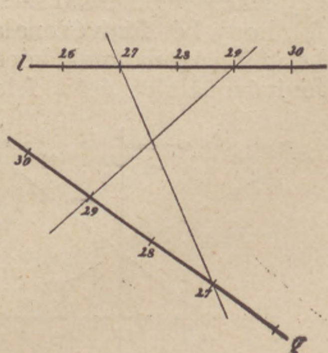
187. ábra.



188. ábra.

ábrázoltuk, ha graduált esésvonalát szerkesztettük. E végett graduáljuk az AB és AC egyenest, akkor ez egyenesek egyenlő kótájú pontjainak összekötő egyenesei már a sík nívóvonalai, s így a graduált esésvonal közvetlenül megrajzolható (188. ábra).

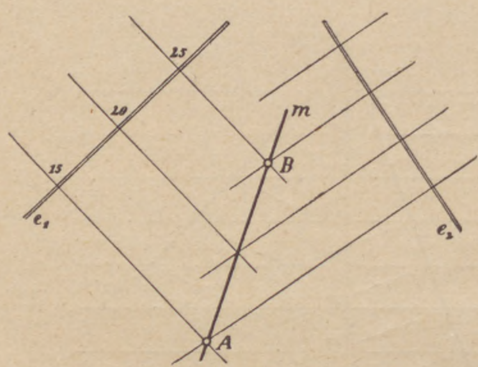
122. §. Illeszkedő és kitérő egyenesek. Vegyünk fel két tetszőleges graduált egyenest, g és l (189. ábra). Illeszkedő egyenesek mindig síkot határoznak meg, melynek nívóvonalai az illeszkedő egyeneseket oly pontokban metszik, melyeknek kótái a nívóvonal kótájával egyenlők. Ennek figyelembevételével könnyen dönthetjük el két egyenes illeszkedő voltát. Ha a két egyenes illeszkedő, akkor az egyenesek egyenlő kótájú pontjainak összekötő egyenesei parallel egyenesek, mert ezek az egyenesek a sík nívóvonalai; amennyiben



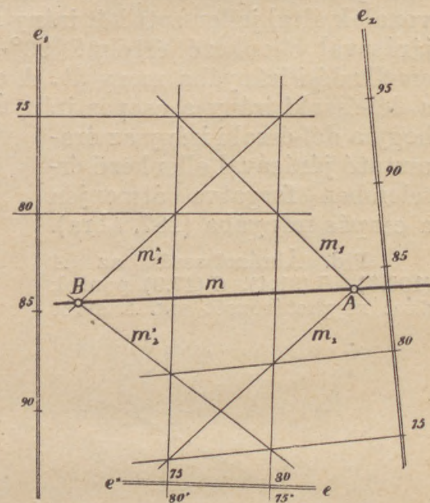
189. ábra.

az adott egyenesek egyenlő kótájú pontjainak összekötő egyenesei nem parallelek, az egyenesek kitérők. A 189. ábrában felvett egyenesek kitérők.

123. §. Két sík metszésvonala. Kótás projekcióban két sík metszésvonalának egyes pontjai az ugyanazon nívósíkra illeszkedő nívóvonalak metszéspontjai. Tehát két adott sík metszésvonalának egy-egy pontját úgy szerkesztjük meg, hogy felveszünk az egyik síkban egy tetszőleges nívóvonalat, megállapítjuk ennek kótáját és ugyanazon kótájú nívóvonalat megrajzoljuk a másik síkban, a két nívóvonal közös pontja a metszésvonal egy pontja (190. ábra).

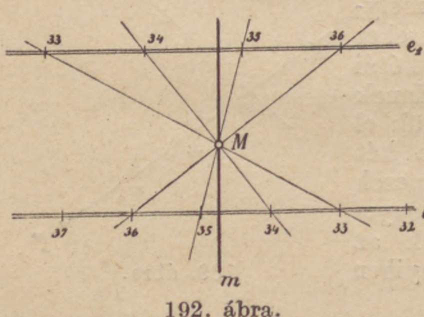


190. ábra.



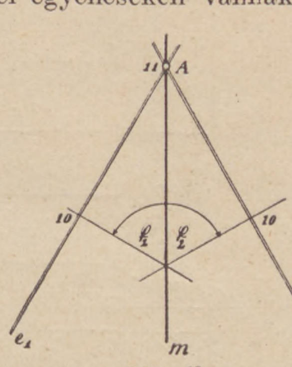
191. ábra.

Két sík metszésvonalának meghatározásánál az ismertetett eljárás grafikus kivitele nem alkalmazható, ha az adott síkok esésvonalainak képei közel parallel, vagy éppen parallel egyenesek. Legyen az $\mathbf{S}_1$ sík graduált esésvonala e_1 és az $\mathbf{S}_2$ síké e_2 (191. ábra). Ekkor megállapítjuk mindkét síknak a tetszőlegesen felvett **S** segédsíkkal, melynek graduált esésvonala e, való metszésvonalát, a nyert m_1 és m_2 egyenesek közös pontja a metszésvonal egy pontja, A. A metszésvonal egy másik pontját egy másik segídsíkkal szerkeszthetjük meg, az $\mathbf{S}^\times$ segédsíkot úgy vettük fel, hogy két főnívóvonalának képe azonos legyen az **S** sík már rajzolt két főnívóvonalának képével és a szerkesztés egyszerűsítése végett a főnívóvonalak kótáit felcseréltük. E síknak az adott síkokkal való metszésvonalai $m_1^\times$ és $m_2^\times$, közös pontjuk, B, a keresett metszésvonal egy másik pontja.



192. ábra.

Ugyanazt az eljárást alkalmazhatjuk akkor is, ha a metszősíkok esésvonalainak képei parallel egyenesek, de ekkor a metszésvonal meghatározására még egyszerűbb szerkesztés áll rendelkezésünkre (192. ábra). Ha az adott síkok graduált esésvonalai e_1 és e_2 és ezeknek egyenlő kótájú pontjait egyenesekkel összekötjük, a nyert egyenesek a térben kitérő egyenesek, de valamennyi képe a képsík ugyanazon *M* pontjára illeszkedik, mert a kótázott pontok egyenlő arányú szegmentumok végpontjai, ha az esésvonalak képein ama pontokat tekintjük megfelelőknek, melyeknek kótái egyenlők. Mivel az egyenlő arányú szegmentumok parallel egyeneseken vannak, kell, hogy a megfelelő pontok összekötő egyenesei egy pontra illeszkedő egyenesek legyenek. Jelen esetben a síkok metszésvonala a két sík közös nívóvonala, tehát szintén az esésvonalak két megfelelő pontjának összekötő egyenese, vagyis az *M* pontra illeszkedő közös nívó egyenes.



193. ábra.

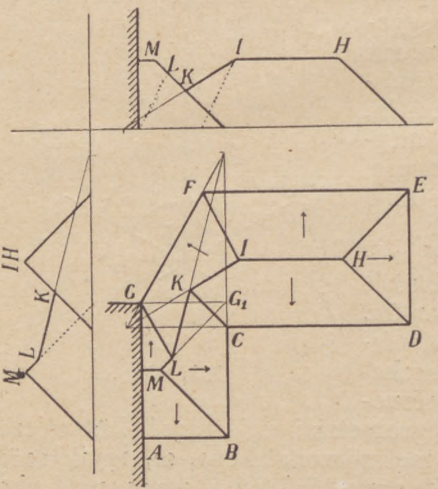
Tegyük fel, hogy az S_1, S_2 metszősíkok lejtője egyenlő, akkor mindkét esésvonalon az osztóközök is egyenlők. Ha ekkor a megszerkesztett metszésvonal tetszőleges *A* pontjára illeszkedően vesszük fel az adott síkok esésvonalait, a metszésvonal képének geometriai sajátságai közvetlenül leolvashatók. Azt nyerjük, hogy a metszésvonal képe, *m*, egyik szögfelezője ama szögnek, melyet két egyenlő kótájú nívóvonal alkot (193. ábra).

Ha pedig az egyenlő lejtőjű és nem parallel síkok esésvonalainak képei parallel egyenesek, akkor a metszésvonal képe felező egyenese ama parallel síksávnak, melyet két egyenlő kótájú nívóvonal határol.

124. §. Födélidomok. Házainkat az idő viszontagságaival szemben a háztető védi. A tető felülről határolva van síkfelületek és görbe felületek részeivel, e felületrészek áthatásaikkal együtt adják a födélidomot. Mivel a födélidomban metszések és áthatások szerepelnek, ezeket rendre meg kell szerkeszteni. A födélidom szerkesztésénél meg kell adni az ereszvonalakból álló alakzatot, mely fölé a födélidomot felépítjük, továbbá megadjuk házsorba beékeltháznál a szomszédos házak tűzfalainak helyét, továbbá tudnunk kell, hogy milyen felületrészekből kívánjuk a födélidomot kialakítani. Síkrészekből álló födélidomoknál a legegyszerűbb esetekben megkívánjuk azt, hogy az összes födélsíkok a horizontális síkkal ugyanazt a szöget alkossák és az ereszvonalak ugyanazon horizontális síkra illeszkedő egyenesek legyenek, tehát nincsenek süllyesztett vagy emelt ereszvonalak. Még megjegyezhető, hogy adott ereszvonalakkal a födélidom nincs egyértelműen meghatározva, sokszor a feladat többféleképpen oldható meg, minden alkalommal azonban ügyeljünk arra, hogy födélsík ne lejtsen tűzfal felé, mert ekkor az eső és hó átáztatja a tűzfalat ; ne legyenek a födélidomnak oly helyei, ahol az esővíz lefolyása biztosítva nincs. Végül figyeljünk arra is, hogy az egész födélidom kellemes esztétikus benyomást keltsen.

Síkrészekből álló födélidom szerkesztésénél előnyösen alkalmaz uk a kótás projekciót, ekkor egy-egy ereszvonal egy-egy födélsík nívóvonala, ha pedig feltesszük, hogy az összes födélsíkok képsíkszöge egyenlő, akkor a födélidom szerkesztésénél az esésvonalak ábrázolása mellőzhető.

Példaképpen vegyük fel az *ABCDEFG* eres vonalakból álló idomot és tegyük fel, hogy a *GA* egyenes tűzfal egyenese és az összes ereszvonalak ugyanazon horizontális síkra illeszkedő egyenesek. A födélidom szerkesztésénél induljunk ki a *CD* és *DE* ereszvonalakra illeszkedő födélsíkokból (194. ábra). Ha az összes födélsíkok egyenlő hajlásúak, akkor a két sík metszésvonalának képe a *CD* és *DE* nívóvonalak szögét felezi, a nyert egyenes a födélidom egy éle. Általában két födélsík metszésvonala a födélidom éle, ha az ereszvonalak által bezárt szög 180°-nál kisebb. A *DE* és *EF* ereszvonalakon átmenő födélsíkok szintén élben metszik egymást és ugyanúgy nyerjük, mint előbb a *DH* élt. A *H* pont három födélsík közös pontja, e pontra illeszkedik a *CD* és *EF* ereszvonalakon átmenő síkok közös egyenese. Mivel a *CD* és *EF*

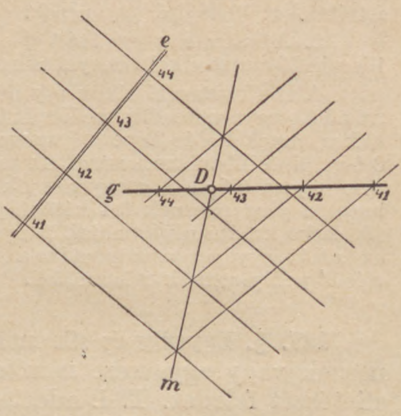


194. ábra.

egyeneseken átmenő síkok nívóvonalai parallel egyenesek, a metszésvonal képe az ereszvonalak által határolt síksav felező egyenese, maga az egyenes a födélidom gerincvonala, ez a jelen esetben vízszintes egyenes. A *H* pont két él és a gerincvonal közös pontja, ilyen pont a födélidom kontypontja. Az *EF* és *FG* ereszvonalakon átmenő síkok ugyancsak élben metszik egymást, képe a két ereszvonal szögét felezi, végpontja, *I*, az *IH* gerincvonalon van. Az *FG* egyenesen átmenő sík a *CD* egyenesen átmenő födélsíkot is metszi, a metszésvonal képe a két ereszvonal szögét felezi. A felvétel szerint e metszésvonalnak csak *K* pontig lévő része érvényesül tényleges metszésként. A *K* pont szintén három sík közös pontja, a harmadik sík a *CB* ereszvonalra illeszkedő sík. A három sík párosával három metszésvonalat állapít meg, ezekből egyelőre *IK* ismeretes, a hiányzó egyenesek közül az egyik az *FG* és *CB* ereszvonalakra illeszkedő fedélsíkok metszésvonala, melynek képe a két ereszvonal szögfelezője, melynek csak *K*—*L*-ig lévő része érvényesül, a másik a *CB* és *CD* ereszvonalakon átmenő síkok metszésvonala, e metszésvonal képe megint az ereszvonalak szögét felezi, de érvényesülő része 180°-nál nagyobb szög szögfelezője. Az ilyen egyenes a födélidom vápája, a vápa különben mindig levezetője a födélidomra esett csapadék egy részének és éppen ezért a vápa mentén a födélidom borítása alatt bádogcsatornát alkalmazunk. A födélidom további szerkesztésénél a *GA* tűzfal miatt beiktatunk új ereszvonalat, ezt a GG_1 ereszvonalat úgy választjuk, hogy a rajta átmenő födélsík a tűzfal síkjára merőleges legyen; e sík, továbbá a *CB* és *FG* ereszvonalra illeszkedő födélsík közös pontja *L*. A *GL* egyenes a födélidomnak megint egy vápája.

A födélidom még hiányzó metszésvonalainak szerkesztése az ábrából közvetlenül leolvasható. Az ábrában jobb áttekinthetőség kedvéért a födélidom második és harmadik képét is feltüntettük. A második és harmadik kép szerkesztésénél azonban meg kell még adni a födélsíkok közös képsíkszögét, ez rajzunkban 45°.

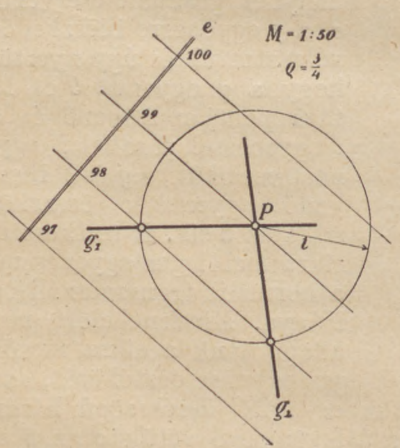
125. §. Egyenes és sík metszéspontja. Egyenes és sík metszéspontjának szerkesztésénél ugyanazt az utasítást követjük, mint az orthogonális parallel projekcióban két képsíkon. A g egyenesen átmenő tetszőleges sík és adott sík m metszésvonalának az adott egyenessel való illeszkedési pontja, D, a keresett metszéspont (195. ábra).

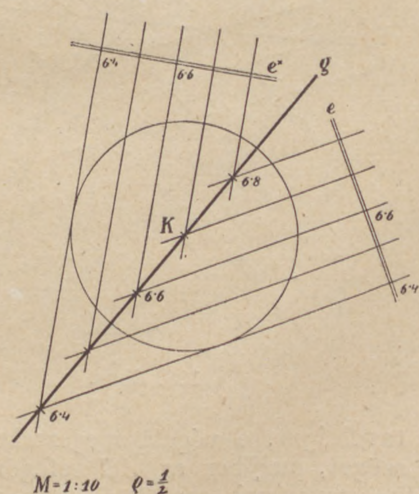


195. ábra.

126. §. A düléskúp. A tér adott pontjára illeszkedő egyenlő lejtésű vagy egyenlő rézsüjű egyenesek oly forgáskúp alkotói, melynek tengelye a képsíkra merőleges; e kúpokat a kótás projekcióban düléskúpoknak mondjuk. A főnívósíkok a düléskúpot körökben metszik, e körök a düléskúp főnívóvonalai. A düléskúp főnívóvonalainak képei koncentrikus körök, a közös középpont egyúttal a kúp csúcsának képe. Ha a düléskúp csúcspontját úgy választjuk, hogy kótája egész szám, vagyis valamely főnívósíkra illeszkedik, akkor a csúcsponttól *egy, két, három,*... méternyi tavolságban lévő nívósíkban a düléskúp vezérkörének sugara rendre ϱ, 2ϱ, 3ϱ,..., ahol ϱ a düléskúp alkotójának rézsüje.

Megoldott feladatok: 1. Adva van az **S** sík graduált e esésvonalával. Szerkesztessék a síkban a sík adott P pontjára illeszkedő ama egyenes, melynek rézsüje, $\varrho = \frac{3}{4}$. $M = 1 : 50$ (196. ábra).





196. ábra.

197. ábra.

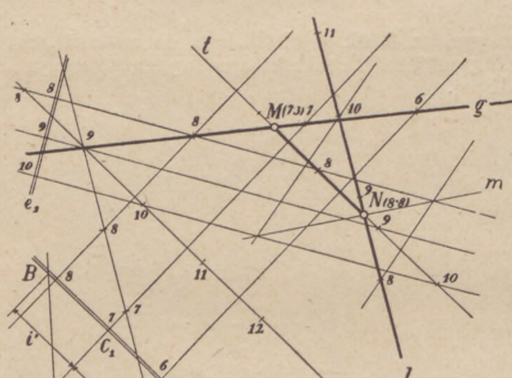
Adott rézsüjű és P pontra illeszkedő egyenesek düléskúpot adnak, melynek csúcspontja P és vezérkörének sugara a 98-as nívósíkban ϱ. Az adott sík a szerkesztett kúpot két alkotóban metszi, ezek g_1 és g_2, melyek egyúttal a kívánt feltételeket kielégítő egyenesek.

2. Adva van a graduált g egyenes. Szerkesztessenek az adott egyenesre illeszkedő ama sílkok, meyeknek rézsüje, $\varrho = \frac{1}{2}$. $M = 1:10$ (971. ábra).

A szerkesztendő síkok oly düléskúp érintősíkjai, melynek csúcspontja egy az adott egyenesre illeszkedő pont. Ha a düléskúp csúcspontja a K (6·7) pont, akkor ennek kótás képe a kúp vezérkörének középpontja. A kúp vezérkörét a 6·4-es nívósíkban szerkesztettük meg. Mivel a kúp magassága 0·3 m, vezérkörének sugara 0·3ϱ.. A g egyenesnek a 6·4-es nívósíkon lévő nyompontjára, mely maga a g egyenesnek 6·4 kótájú pontja, illeszkedő vezérkör érintők a keresett síkok 6·4 kótájú nívóvonalai. A nyert nívóvonalakkal parallel egyenesek, melyek az adott egyenes osztópontjaira illeszkednek, a keresett síkok főnívóvonalai, e és e' pedig e síkok esésvonalai.

127. §. Egyenes és sík merőleges helyzetben. Síkra merőleges egyenesnek vagy egyenesre merőleges síknak szerkesztése tulajdonképpen elintézett feladat. T. i. adott síkra merőleges egyenesnek képe, mivel orth. parallel projekcióról van szó, mindig egyúttal az adott sík egy esésvonalának is képe. E szerint a síkra merőleges egyenes szerkesztésénél oly egyenest kell szerkeszteni, mely az adott sík egy esésvonaálnak vetítősíkjában van és az esésvonalra merőleges, ezt a feladatot pedig a 120. §-ban részletesen elintéztük. Ha pedig adott egyenesre merőleges síkot kell szerkeszteni, akkor az adott egyenes vetítősíkjában kell az adott egyenesre merőleges egyenest meghatározni, a nyert egyenes ekkor az egyenesre normál sík esésvonala.

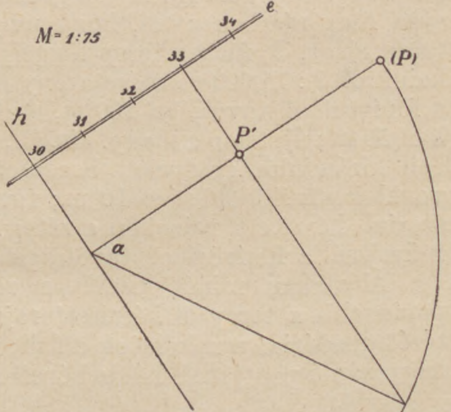
128. §. Két kitérő egyenes normális transzverzálisa. Legyenek adva a g és l kitérő egyenesek (198. ábra). A két kitérő egyenes normális transzverzálisának szerkesztésénél először meghatározzuk azt a síkot, mely parallel az adott egyenesekkel. Ezt az **S** síkot, melynek graduált esésvonala e, a g egyenesre illeszkedően választottuk és úgy nyertük, hogy a g egyenes *9*-es kótájú pontján átmenő és az l egyenessel parallel $l^{\times}$ egyenest vezettük, a g és $l^{\times}$ illeszkedő egyenesek összekötő síkja az **S** sík. E szerkesztett síkra merőleges egyenes már a normális transzverzálisnak iránya. Mindenekelőtt megállapítottuk a síkra merőleges egyenes osztóközét, az i' tavolságot, e végett megszerkesztettük az ABC derékszögű háromszöget, melyben az AC befogónak az átfogón lévő vetülete az **S** sík esésvonalának osztóköze i és az átfogóhoz tartozó magasság az $1m$ méretarány szerinti képhossza. A háromszög BC befogójának vetülete az átfogón az **S** síkra merőleges n egyenes osztóköze, i'. Ezek után



198. ábra.

megszerkesztettük a g egyenesre illeszkedő és az **S** síkra merőleges $\mathbf{S}_1$ síkot, ezért a g egyenes ugyancsak a *9*-es kótájú pontján vezettük az n egyenest, az n és g egyenesek összekötő síkja az $\mathbf{S}_1$ sík, melynek graduált esésvonala e_1. Az $\mathbf{S}_1$ sík és l egyenes N metszéspontja a normális transzverzális egy pontja, e ponton átmenő és az **S** síkra merőleges t egyenes a normális transzverzális, melynek g egyenessel való metszéspontja M. Megjegyzendő, hogy a transzverzális az $\mathbf{S}_1$ síkra illeszkedő egyenes, tehát a transzverzális graduálását az $\mathbf{S}_1$ sík főnívóvonalai intézik el.

129. §. Sík lefordítása és felállítása. A sík lefordításának problémáját elintéztük, ha a sík tetszőleges pontját leforgattuk. Ha az adott **S** síkot tetszőlegesen választott nívóegyenese körül a választott nívóegyenesre illeszkedő nívósíkba forgatjuk, akkor a sík minden pontja kört ír le, a kör sugara oly derékszögű háromszög átfogója, melynek egyik befogója a pont képének távolsága a forgatás tengelyétől, másik befogója a pontnak azon nívósíktól való távolsága, melybe a síkot forgatni kívánjuk. Maga a leforgatott pont a forgatás tengelyétől a meghatározott körsugárral egyenlő távolságban van a sík ama esésvonalának képén, mely a forgatott pontra illeszkedik (199. ábra).



199. ábra.

Természetesen itt is síkalakzat kótás képe és leforgatottja axiális affin vonatkozásban lévő alakzatok, az affinitás tengelye a sík ama nívóegyenese, mely körül a síkot forgattuk, az affinitás megfelelő pontpárja a sík tetszőleges pontjának képe és e pont leforgatottja.

Miután a kótás projekcióban általános helyzetű síkot is tanultunk leforgatni, megszereztük ama ismereteket, melyeknek segítségével a térelemekre vonatkozó minden feladatot a kótás projekcióban kivitelezhetünk.

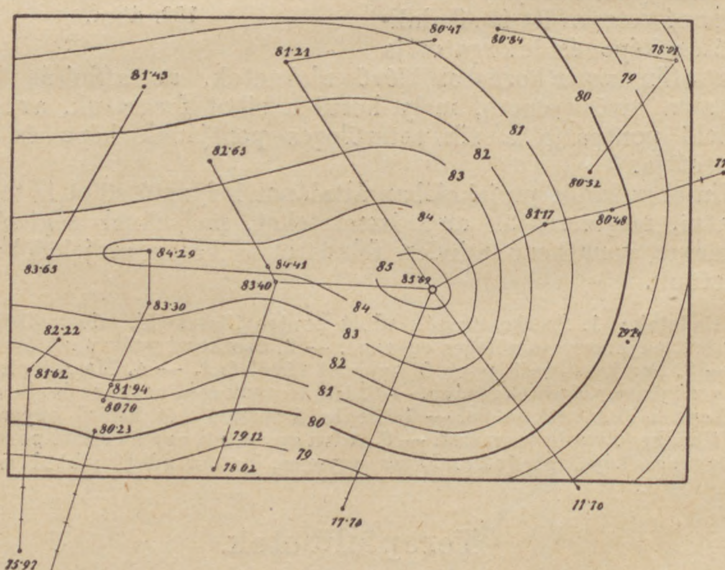
Feladatok: 1. Szerkesztessék adott pontra illeszkedő, adott síkkal parallel és adott egyenesre merőleges egyenes. — 2. Szerkesztessék pont és sík távolsága. — 3. Szerkesztessék pont és egyenes távolsága. — 4. Megállapítandó két egyenes szögének valódi nagysága. — 5. Határozzuk meg egyenes és sík szögét. — 6. Szerkesztendő két sík szöge. — 7. Meghatározandó két kitérő egyenes adott pontra illeszkedő transzverzálisa. — 8. Adva egy pont, egy az adott pontra illeszkedő egyenes képe, graduálandó az egyenes, ha az adott síkkal adott szöget alkot stb.

Terepfelületek.

130. §. Terepfelületek. Földünk egy alapul választott vízszintes síkkal szemben kisebb-nagyobb eltéréseket mutat. Földfelületünknek pontjai összességükben a természetes földfelületet adják. A természetes földfelületet terepfelületnek vagy topográfikus felületnek mondjuk. Ha függélyes földfalaktól és előreugró sziklatömegektől, valamint barlangoktól eltekintünk, minden projiciáló sugár a terepfelületet egy és csakis egy pontban, továbbá minden nívósík a terepfelületet egy-egy görbe vonalban, nívóvonalban vagy rétegvonalban metszi. Különböző síkokban fekvő rétegvonalak képei általában nem metszik egymást, mert egy ilyen metszéspont azt jelentené, hogy e pontra illeszkedő vetítősugár a terepfelületet két pontban metszi, amit eleve kizártunk.

131. §. Tereprajzok, tereptérképek. Földünk egy részéről ábrázoló geometriai rajzot úgy készítünk, hogy megállapítjuk a terepnek a főnívósíkokkal való metszésvonalait és a nyert rétegvonalakat a kótás projekció törvényei szerint ábrázoljuk. Mivel a rétegvonalak síkjai a képsíkkal parallel síkok, a rétegvonalak képei az eredeti rétegvonalakkal kongruens görbék. A rétegvonalak síkjainak egymástól való távolsága függ részben attól, hogy milyen méretarány szerint készítjük a tereprajzot, de függ a terep függélyes tagoltságától is. Így hegyes vidékeinkről 1 : 75,000-es méretarány szerint készített katonai térképeken a főnívósíkok tavolsága 100 m, lapályosabb részekről készített térképeken 50 m ; újabban a magy. kir. áll. térképészeti intézet 1 : 37,500 méretben kiránduló térképeket bocsátott ki ; ezeken a felsüntetett rétegvonalak nívókülönbsége 10 m ; továbbá 1 : 1000 és 1 : 500 méretarány szerint készített rajzokon a rétegvonalak nívókülönbsége 1 m, öntöző műveknél a főnívósíkok tavolsága 0·25 m, sőt sokszor ennél is kisebb.

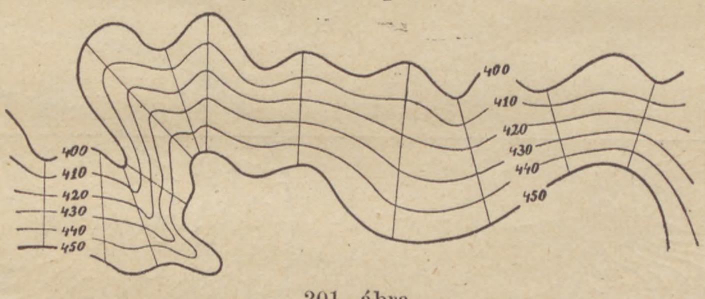
Általában minél kisebb a rétegvonalak nívókülönbsége, annál pontosabb a terepről készített rajz. Terep rétegvonalainak szerkesztését geodéziai munkálatok előzik meg, melyeknek segítésével a terep nagyszámú pontjának kótás képeit állapítjuk meg. Így egy ponthálózat



200. ábra.

felett rendelkezünk, melynek pontjait oly sűrűn kell választani, hogy két szomszédságban lévő pont összekötő egyenesének a pontok által határolt véges részére illeszkedő minden pontja terepfelületi pontnak legyen minősíthető. Evvel az érdekelt terepet beborítottuk egyenes vonaldarabokból álló hálózattal, ahol minden egyenes vonaldarab kezdő- és végpontjának kótáját ismerjük ; de akkor interpolációval megállapíthatjuk a vonaldarab ama pontjainak képeit, melyek főnívósíkra illeszkedő pontok. Ha már most az ugyanazon főnívósíkra illeszkedő pontok képeit egy folytonos görbe vonallal összekötjük, akkor megrajzoltuk a terep egyik rétegvonalát. A rétegvonalak szerkesztéséből már megállapítható, hogy minden tereprajz a terepnek csak megközelítő képe, éppen ezért a rétegvonalak kihúzásánál kiegyenlítéseket alkalmazunk, a kiegyenlítés abban áll, hogy a rétegvonalak apró hullámzásait elnyomjuk. A rétegvonalak szerkesztését a 200. ábrában mutatjuk be, ez annak a tereprajznak kis részlete, melyet műegyetemünk út-vasútépítési tanszéke készített a pozsonyi St. Genois telkekről, melyekre az egyik terv szerint a pozsonyi m. kir. tud. egyetemet kellett volna elhelyezni.

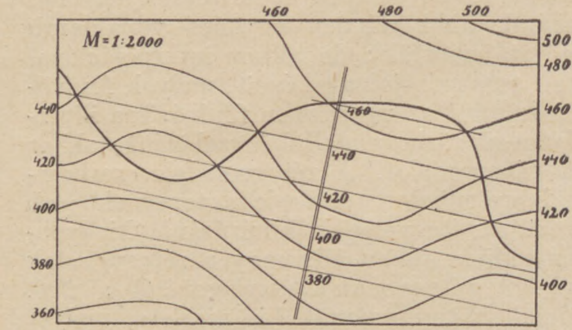
132. §. Terepvonalak beiktatása. Rétegvonalaival adott terepnél sokszor kívánatos a rétegvonalak sűrűsítése. Például ha az adott rétegvonalak nívókülönbsége 50 m és rajzban fel akarjuk tüntetni 10 m-es nívókülönbséggel a rétegvonalakat, akkor újabb helyszíni adatok nélkül a nívóvonalak sűrűsítését úgy végezzük, hogy az ismeretes két szomszédos rétegvonal egyikén felveszünk egy pontot, e ponton át a rajzban oly egyenest vezetünk, mely a két szomszédos adott nívóvonalat közel derékszög alatt metszi, ha a metszéspontok közti tavolságot öt egyenlő részre osztjuk, akkor a nyert osztáspontok a szerkesztendő új réteg-



201. ábra.

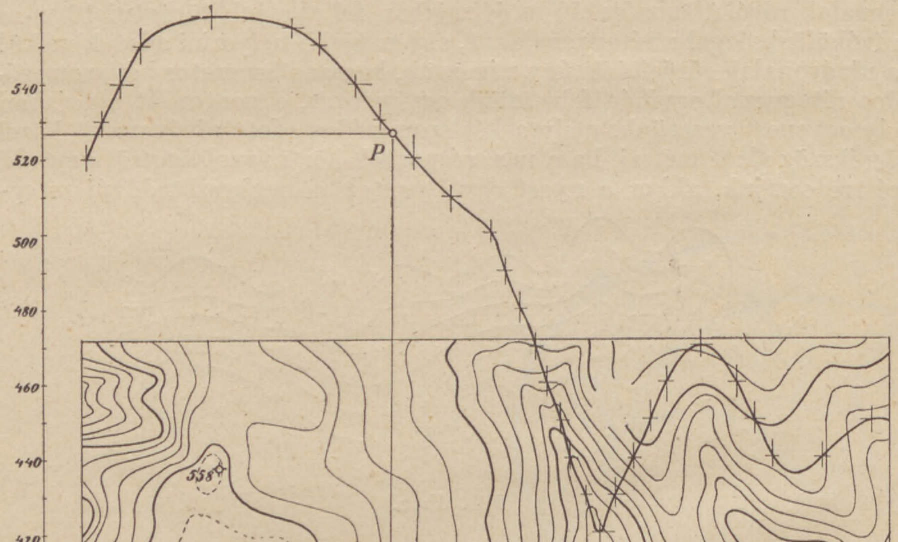
vonalak pontjai. A nyujtott szerkesztés többszöri alkalmazásával kapjuk egy-egy beiktatandó rétegvonal annyi pontját, hogy az végül megrajzolható. A beiktatás e módja csak akkor helyes, ha feltehető, hogy a terep azon a helyen, ahol az egyenes vonaldarabot felosztás végett felvettük, egyenesszerűen lejt, tehát a szerkesztés alkalmazhatósága mindig mérlegelést igényel. Új rétegvonalak beiktatását a 201. ábra mutatja.

133. §. Terepfelület síkmetszete. Rétegvonalaival adott terepfelületnek adott síkkal való síkmetszetét úgy szerkeszt ük meg, hogy rendre megállapítjuk a sík nívóvonalainak és a terep rétegvonalainak metszéspontjait és ezeket folytonos görbével összekötjük. Sík nívóvonalának és rétegvonal egy-egy metszéspontját ott nyerjük, ahol a kiválasztott nívóvonal a nívóegyenesre illeszkedő nívósíkban fekvő rétegvonalat metszi (202. ábra). Terepfelület és sík metszetét szintén graduálhatjuk, a graduálást a terepfelület rétegvonalai vagy a metszősík fővonalai intézik el.



202. ábra.

Képsíkra merőleges síkmetszet a terepfelület keresztmetszete, profilja. A keresztmetszet képe a vetítősík nyomvonala, valódi alakját csak akkor nyerjük, ha a vetítősíkot valamely nívósíkba forgatjuk ; a beforgatott metszet a tulajdonképpeni profil (203. ábra). A profilmetszet különösen új rétegvonalak beiktatásánál alkalmazható olymódon, hogy ott, ahol új rétegvonalat kívánunk beiktatni, profilmetszetet készítünk és a nyert ábrából könnyűszerrel megállapíthatjuk a profilmetszet ama pontjainak képeit, mely pontok-

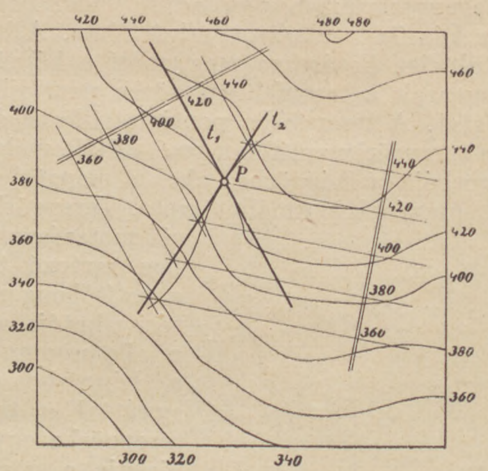


203. ábra.

hoz tartozó kóták előre megadott számok. A beiktatás most említett módja sokkal pontosabb, mint az előző §-ban tárgyalt beiktatás.

Adott egyenes és terepfelület metszéspontjai az egyenesre illeszkedő tetszőleges síkkal való síkmetszetnek az adott egyenesen lévő pontjai.

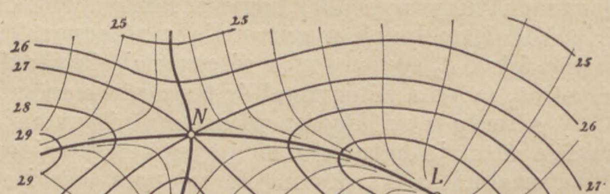
134. §. Terepfelület érintősíkja. Terepfelület P pontjában az érintősíkot úgy szerkesztjük meg, hogy a ponton át vezetünk két síkot, megállapítjuk e síkok és terepfelület síkmetszeteit, meghatározzuk a síkmetszetek felvett közös pontjában az érintőket, akkor az érintők összekötő síkja a keresett érintősík. A ponton átmenő egyik síkmetszet síkjául a ponton átmenő rétegvonal síkját választjuk, úgyhogy az érintősíkra illeszkedő egyik érintő a rétegvonal érintője a kérdéses pontban, ugyanez az érintő az érintősík egyik nívóvonala, t_1 (204. ábra). A másik metszősík választásánál felveszünk az adott érintési pontra illeszkedő tetszőleges horizontális egyenest, melyre merőlegesen tetszőleges graduálással felvesszük a sík esésvonalát. A síkmetszet érintője a felvett P érintési pontban, t_2, az érintősíkra illeszkedő másik érintő, Utóbbi egyenesen a graduálást a metszősíkon lévő főnívóvonalak végziks így a t_2 egyenesen a nyert osztáspontokon átmenő és t_1 érintővel parallel egyenesek a meghatározandó érintősík főnívóvonalai.



204. ábra.

Terepfelület egy pontjában az érintősík rézsüje egyúttal a terepfelületnek is rézsüje az érintési pontban.

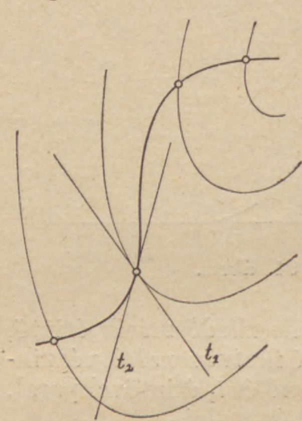
135. §. Csúcspont, medencepont, szorospont vagy vízválasztópont. Terepfelület egyes pontjaiban az érintősík horizontális sík is lehet, e pontok mindegyike a terepfelületnek egy-egy fontosabb pontja. Ilyen pont a terepnek hol csúcspontja, hol medencepontja, hol vízválasztópontja. Csúcspont a terepnek oly pontja, melynek kótája az összes környe-



205. ábra.

zeti pontok kótáinál nagyobb; a medencepont kótája az összes környezeti pontok kótáinál kisebb; a vízválasztó, — vagyis a szorosponton átmenő rétegvonal e pontban önmagát metszi, e pont a rétegvonalnak duplapontja, a szorospont véges környezetében a terepfelületnek nyereg alakja van, azért sok esetben nyeregpontnak is mondjuk. A 205. ábrában az L terepfelületi pont csúcspont, M medencepont, N pedig nyeregpont.

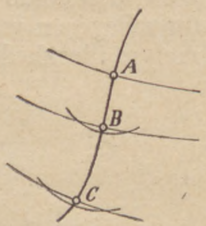
136. §. Terepfelületi görbék. A terepfelületen fekvő görbét legegyszerűbben úgy adjuk meg, hogy megrajzoluk a görbe képét a képsíkul választott nívósíkban. A kép a terepfelületi görbét egyértelműen határozza meg, mert a képgörbe pontjaira illeszkedő vetítősugarak a terepfelületi görbe pontjaiban metszik az adott terepfelületet. A terepgörbe pontjaira illeszkedő vetítősugarak összességükben a terepgörbe vetítőhengerét adják, melynek legegyszerűbb síkbeli vezérgörbéje a képgörbe, ahol a képgörbe egyúttal terepgörbe vetítőhengerének normálmetszete. Terepgörbe egy pontjában az érintő két sík metszésvonala, az egyik sík az adott ponthoz tartozó terepfelületi érintősík, a másik a vetítőhenger ama érintősíkja, melynek érintési alkotója az adott ponton keresztül megy, e sík nyomvonala az adott pont képében a képgörbe érintője, ugyanez az egyenes egyúttal a terepgörbe érintőjének képe. A terepgörbe egy pontjában a görbe lejtője, ill. rézsüje a görbe e pontjához tartozó érintő lejtőjével, ill rézsüjével azonos.



206. ábra.

Tetszőlegesen felvett terepgörbe a rétegvonalakkal különböző szögeket alkot. Adott rétegvonal és terepgörbe szögén értjük azt a szöget, melyet a két görbe közös pontjához tartozó két érintő alkot (206. ábra). Ha a közös pontban a rétegvonal érintője t_1 és a terepgöbe érintője t_2, akkor e szög valódi nagyságát úgy nyerjük, hogy a közös ponthoz tartozó terepfelületi érintősíkot, melynek nyomvonala a rétegvonal síkján t_1, a t_1 körül a benne fekvő t_2 egyenessel a rétegvonal síkjába forgatjuk, t_1 és a leforgatott t_2 szöge a rétegvonal és terepgörbe szöge.

A terep tetszőlegesen választott rétegvonalán felvett A pontjából sokféle úton juthatunk a megrajzolt szomszédos rétegvonalhoz. Mivel ilyen utaknál a kezdőpont és végpont közti nívókülönbség állandó, ez utak közül az lesz a legrövidebb, melynek vetülete a legkisebb. A szerkesztést úgy végezzük, hogy a képsíkban az A pont képe körül kört rajzolunk, e kör a következő rétegvonal képét két pontban metszi, ha a kör sugarát megfelelően választjuk. A kör sugarának megválasztásánál arra is kell ügyelnünk, hogy a két metszéspont viszonylagosan közel kerüljön egymáshoz. A két metszéspont a rétegvonal kis véges darabját jelöli ki, az ívdarab B felezési pontja a szomszédos rétegvonal ama pontjának képe, mely a kiindulási A ponthoz legközelebb van. B pontból az azután következő rétegvonal legközelebbi pontjához hasonló módon juthatunk, ekkor nyerjük a C pontot, s i. t. Ha az így nyert A, B, C, ... pontokat folytonos görbe vonallal összekötjük, oly görbe vonalat nyerünk, mely az egymás-után következő rétegvonalakat a projekcióban és a térben merőlegesen metszi. E görbe tehát oly terepgörbe képe, mely a terepfelületen az összes rétegvonalakat derékszög alatt metszi, a nyert terepgörbe a terepfelület egy esésvonala (207. ábra).



207. ábra.

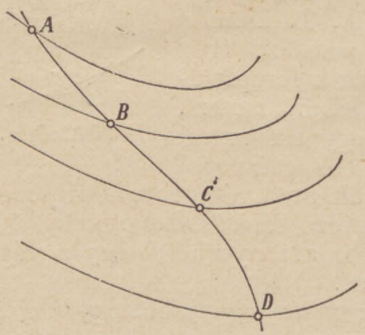
A terepfelület adott pontján át általában egy esésvonal halad, csúcspontban, ill. medencepontban végtelen sok esésvonal találkozik. T. i. ha a csúcsponthoz tartozó érintősíkkal parallel, igen közel fekvő síkot veszünk, akkor e sík a terepfelületet önmagába visszatérő rétegvonalban metszi, melynek minden pontján át megy egy esésvonal, szóval ezt a rétegvonalat végtelen sok esésvonal metszi. Ha okoskodásunkat ismételjük ama rétegvonalakra, melyekhez tartozó síkok a csúcsponthoz tartozó érintősíktól mindig kisebb és kisebb távolságban vannak, végül is azt nyerjük, hogy a végtelen sok esésvonal a csúcspontban összefut.

Ha terepfelület valamely rétegvonalán nagyjából egyenlő távolságokban pontokat jelölünk ki és e pontokon átmenő esésvonalakat megrajzoljuk, akkor azt tapasztaljuk, hogy sűrűsödési helyeket mutatnak, vagyis az esésvonalak meghatározott esésvonalakhoz asymptotikusan közelednek, illetve azokból elágaznak. A sűrűsödési helyként nyert terepvonal a terep gerincvonla ,ha az esésvonalon lefelé haladva azt tapasztaljuk, hogy a többi esésvonal tőle elágazik ; ha pedig az esésvonalon lefelé haladva azt tapasztaljuk, hogy a környezetében lévő esésvonalak hozzásímulnak, akkor az esésvonalat völgyfenékvonalnak nevezzük.

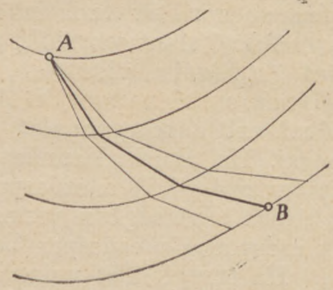
Terepfelületi nyeregpontban általában két esésvonal találkozik. Az egyik esésvonal gerincvonal, melynek legalacsonyabb pontja a nyeregpont ; a másik esésvonal völgyfenékvonal, melynek legmagasabban fekvő pontja ugyancsak a nyeregpont (l. 205. ábra).

Terepgörbe, melynek minden pontjában a lejtő vagy a rézsü ugyanaz, állandó esésű terepvonal. Az állandó esésű terepgörbék a műszaki emberre nézve fontos görbék, mert állandó esésű terepgörbékhez lehetőleg közel választjuk útvonalak, csatornák tengelyvonalait, hogy az úttest, csatorna minél kevesebb földmunkával legyen megépíthető. Rétegvonalaival adott terepen állandó esésű terepgörbét csak közelítőleg szerkeszthetünk meg. Ha a terepgörbe főnívóvonalra eső kezdő pontja A és állandó rézsüje ϱ, akkor mindenekelőtt megállapítjuk oly egyenes i intervallumát, melynek rézsüje ϱ az i távolsággal a projekcióban az A pont körül kört rajzolunk, e kör a szomszédos rétegvonal képét több pontban metszi, ezek egyike legyen B ; a B pont körül megint úgy rajzoljunk kört, mint előbb az A pont körül, a kör és következő rétegvonal egyik metszéspontja legyen C, és így tovább. Ha a rétegvonalakon nyert pontokat folytonos görbe vonnallal összekötjük, akkor a terepfelületen állandó esésű terepgörbét rajzoltunk. A szerkesztésből azt is látjuk, hogy a feladatnak csak akkor van megoldása, ha a ϱ rézsüjű egyenes osztóköze mindig nagyobb, mint két szomszédos rétegvonal által határolt felületsáv vetületének szélessége a terepgörbe lefutásának környezetében (208. ábra).

Terepfelület állandó esésű görbéjénél megadhatjuk a kezdőpontot és a végpontot, de akkor a terpgörbe osztóköze meghatározott nagyságú. A feladatot itt is közelítő szerkesztéssel oldjuk meg. Az *A* kezdőponttal állandó esésű terepgörnét szerkesztünk, melynek *i* osztóközét tetszőlegesen vettük fel és megállapítjuk végpontját ama rétegvonalon, melyre illeszkedően az eredeti végpontot felvettük (209. ábra). A nyert



208. ábra.



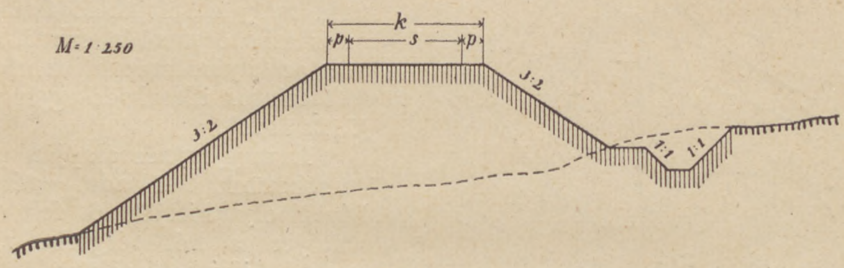
209. ábra.

végpont és az előre kitűzött végpont általában nem lesznek azonos pontok, ez azt jelenti, hogy a tetszőleges *i* osztóközt vagy túlnagyra, vagy túlkicsire választottuk. Az *i* osztóközt folytonos változtatásával a szerkesztést addig ismételjük, míg az állandó esésű terepgörbe a kitűzött végponton keresztül megy.

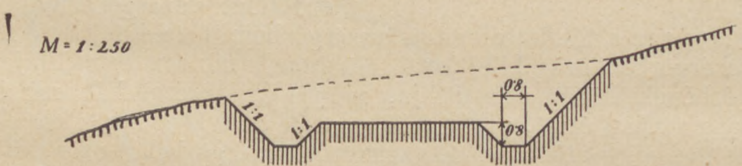
137. §. Terepgörbe hosszszelvénye. Említettük, hogy minden terepgörbéhez tartozik a terepgörbe vetítőhengere. A vetítőhenger vezérgörbéjének ilyenkor a terepgörbe képgörbéjét választjuk, e görbe egyúttal a vetítőhenger normálmetszete. Terepgörbe hosszszelvényén értjük azt a görbe vonalat, melybe a terepgörbe átmegy, ha vetítőhengerének palástjával kifejtjük. A kifejtést a terepgörbe orth. projekciójával kezdjük, ennek kifejtése egyenes vonal lesz, melyre merőlegesek a kifejtett hengeralkotók. A kifejtett hengeralkotók közül azokat rajzoljuk meg, melyeknek vetülete egy-egy rajzolt rétegvonalra esik és az egyes hengeralkotókra felmérjük a normálmetszet kifejtésétől számítva azt a távolságot, melyet rajta a terepgörbe pontja és a normálmetszet pontja megállapít.

Terepgörbe hosszszelvényének meghatározásából közvetlenül nyerjük azt, hogy az állandó esésű terepgörbék hosszszelvénye egyenes vonal. Megjegyzendő még, hogy a gyakorlatban terepgörbe hosszszelvényének szerkesztésénél a kifejtett tereppontokat nem kötjük össze folytonos görbe vonallal, hanem két-két szomszédos szerkesztett pontot egyenes vonallal kötünk össze, vagyis a kifejtett görbét a görbébe írt poligonnal helyettesítjük. Továbbá megemlíthetjük, hogy igen hosszú terepvonal hosszszelvényének készítésénél a normálmetszet kifejtésénél alkalmazott méretarány különbözik az alkotókra mért magasságok méretarányától. Pl. vasútvonalak tervezésénél a terep hosszszelvényének készítésénél hosszirányban a méretarány 1 : 10,000, míg a magasságok irányában a méretarány 1 : 1000.

138. §. Műutak. Műút pályafelülete általában különbözik attól a terepfelülettől, melyen a műutat vezetjük. A pályafelület szintje hol a terepfelület fölött, hol alatta van. Ebből következik, hogy műút készítésénél ott, ahol a tervezett járófelület a terep fölött vezet, a terepet feltöltjük, ha pedig a terep alatt vezet, ott a terepet bevágjuk. Műút jellemzésére megadjuk a pályafelület középvonalát, ez a pálya tengelyvonala, röviden tengelye, és a koronaszélességet, ez az út teljes szélessége. A koronaszélessége, $k = s + 2p$, ahol s a tulajdonképpeni járófelület szélessége és p a járófelülettől jobbra és balra eső úgynevezett padoknak a szélessége. Az egész pályafelületet a pálya tengelyével parallel két vonal határolja, e vonalak a koronaszélesség végpontjainak mértani helyei, röviden koronavonalak. Azt a földtestet, melyet felülről az egész pályafelület, jobbról, balról a koronavonalak vetítőhengerei, alulról pedig a terepfelület határol, úttestnek mondjuk. A feltöltéssel épített úttestet az összeomlás ellen megvédjük rézsü-



210. ábra.

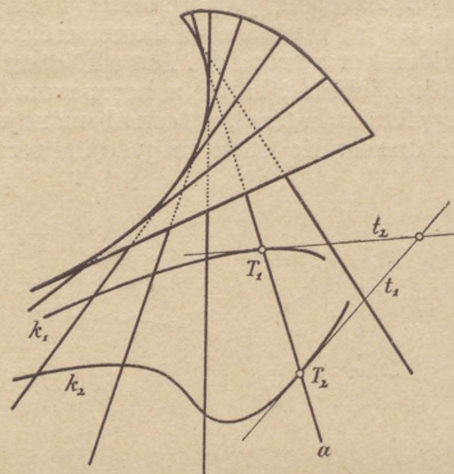


211. ábra.

testekkel; a rézsütest határolva van a koronavonal vetítőhengerével, alulról a terepfelülettel és az úgynevezett rézsüvel. A rézsü oly felület, melyet a következő §-ban fogunk részletesen tárgyalni. Megjegyzendő még, hogyha a rézsüfelület és a terepfelület a két felület metszésvonala felé lejt, akkor a rézsütestet az esővíz alámoshatja; ez ellen a rézsütestet vízlevezető árokkal védjük. Bevágással épített úttestet először jobbról és balról vízlevezető árkokkal védjük és magának a terepnek a bevágását rézsüfelület mentén végezzük. Az út védelmét szolgáló műveket a 210. és 211. ábra mutatja, az egyik a műút keresztmetszete töltéses helyen, a másik bevágásos hely keresztmetszetét mutatja, ahol út keresztmetszetén oly síkmetszetet értünk, melynek síkja az út tengelyvonalára merőleges.

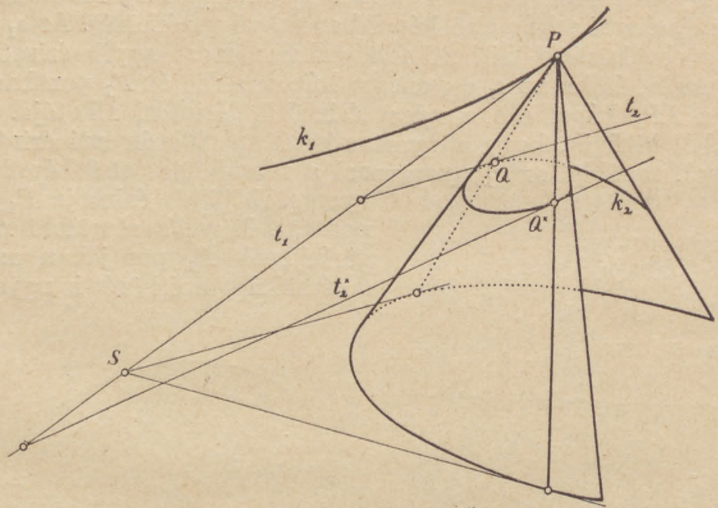
Minden úttervhez két rajzot készítünk, egy helyszínrajzot, mely feltünteti az útvonal és a terep kótás képét és az általános hosszszelvényt, ez feltünteti az út tengelyvonalának és annak a terepgörbének hosszszelvényét, mely terepgörbének vetítőhengere azonos az út tengelyvonalának vetítőhengerével. Úgy a helyszínrajzot, mint a hosszszelvényt oly jelek beiktatásával egészítjük ki, melyeknek részletezése e könyv keretébe már nem tartozik.

139. §. Rézsüfelületek. A rézsüfelületek speciális kifejthető felületek. Kifejthető felületet úgy származtattunk, hogy adott térgörbe érintőinek összességét alkottuk. Ha ilyen módon származtatott kifejthető felületen két tetszőleges görbét felveszünk, akkor a kifejthető felület minden alkotója általában a felvett térgörbéket pontokban metszi. Tegyük fel, hogy a tetszőlegesen választott a alkotó a kifejthető felületen felvett k_1 térgörbét a T_1 pontban és a k_2 görbét a T_2 pontban metszi, akkor T_1 és T_2 pontokban a görbék érintői, t_1 és t_2, abban az érintősíkban vannak, mely a kifejthető felületet az a alkotó mentén érinti, szóval az ilyen módon szerkesztett érintők illeszkedő egyenesek (212. ábra).



212. ábra.

E megjegyzés alapján szerkeszthetünk két adott térgörbével oly kifejthető felületet, amelyen a két térgörbe rajta van. A kifejthető felület e származtatásánál az adott görbéket a felület vezérgörbéinek mondjuk, míg maga a felület az adott vezérgörbék közös kifejthető felülete. Két vezérgörbe közös kifejthető felületének minden érintősíkja a két vezérgörbének közös érintősíkja, melyet a vezérgörbék mindegyike egy-egy pontban érint, az érintési pontok összekötő egyenese a kifejthető felület egy alkotója. E szerint a vezérgörbék közös kifejthető felületének szerkesztésénél meg kell szerkeszteni a vezérgörbék közös érintősíkjait. Ha a vezérgörbék algebrai görbék, úgy e görbék tetszőlegesen választott pontjára a közös kifejthető felületnek véges számú érintősíkja és ugyanannyi alkotója illeszkedik. Legyen a k_1 vezérgörbe tetszőleges pontja P, akkor a két térgörbe közös kifejthető felületének P pontra illeszkedő érintősíkja a k_1 görbét P pontban érinti, ez azt jelenti, hogy ez az érintősík keresztül megy a k_1 görbe P pontjához tartozó t_1 érintőn. A t_1 érintőre illeszkedő összes érintősíkok közül azokat kell kiválasztani, melyek a k_2 görbe egy-egy érintőjét tartalmazzák. De a k_2 görbe érintőire és a P pontra illeszkedő síkok érintősíkjai annak a kúpnak, melynek csúcspontja P és vezérgörbéje k_2. Tehát a vezérgörbék közös kifejthető felületének P pontra illeszkedő érintősíkját úgy szerkesztjük meg, hogy megszerkesztjük a k_1 görbe P pontjában a t_1 érintőt és meghatározzuk a k_2 görbe projiciáló kúpját a P pontból, a projiciáló kúpnak t_1 egyenesre illeszkedő érintősíkjai a közös kifejthető felületnek érintősíkjai, továbbá a projiciáló kúp érintési alkotói a kifejthető felületnek alkotói (213. ábra). A P pontra illeszkedő felületi alkotóknak száma mutatja, hogy a közös kifejthető felület önmamagát a k_1 görbe mentén hányszor metszi, a k_1 és ugyanúgy a k_2 vezérgörbe a két görbe közös kifejthető felületének többszörös görbéje. Eddig két térgörbe közös kifejthető felületét tárgyaltuk, de az egész tárgyalás alkalmazható különböző síkokra illeszkedő síkgörbékre is, sőt lehet az egyik vezérgörbe térgörbe, a másik síkgörbe. Ugyanazon síkra

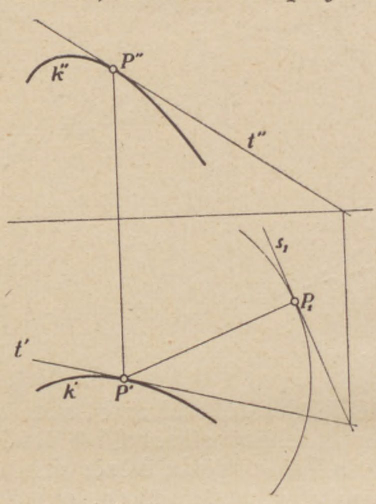


213. ábra.

illeszkedő két síkgörbe közös kifejthető felületéről csak azért nem tárgyalunk, mert ekkor a közös kifejthető felület síksorokból tevődik össze, ahol egy-egy síksornak tengelye a két síkgörbe közös érintője.

A rézsüfelület is két görbe közös kifejthető felülete, ekkor az egyik vezérgörbe feltöltéseknél a koronavonal, bevágásoknál az árok egyik padjának szélső vonala, a másik vezérgörbe a végtelenben fekvő sík ama kúpszelete, melynek projiciáló kúpja minden végesben fekvő pontból forgási kúp, a kúp forgási tengelye a kótás projekció képsíkjára merőleges egyenes és minden alkotójának rézsüje az adott ϱ, szóval a másik vezérgörbe kongruens rézsükúpokkal van definiálva.

Vegyünk fel tetszőleges térgörbét, e k görbe helyettesítse valamely úttest koronavonalát. Szerkesszük meg az adott koronavonalhoz tartozó rézsüfelületet, ha a rézsü $\varrho = \frac{5}{4}$. A koronavonalat orthogonális parallel projekcióban két képsíkon adjuk meg és feltesszük, hogy az első képsík a kótás projekció képsíkja, s így a nivósíkok az első képsíkkal parallel síkok. Mondottuk, hogy a rézsüfelület két görbe közös kifejthető felülete. Jelen esetben az egyik görbe az adott koronavonal, a másik görbe a végtelenben fekvő sík ama kúpszelete, melyet részükúp definiál. Szerkesztéseinkben minden rézsükúp alkotójának és érintősíkjának rézsüje $\varrho = \frac{5}{4}$. A két görbe közös kifejthető felületének a koronavonal P pontjára illeszkedő érintősíjkának és alkotójának meghatározása végett a rézsükúpot úgy veszzük fel, hogy csúcspontja azonos legyen a P ponttal (214. ábra). E kúp első képsíkban fekvő vezérkörének középpontja a P pont első képe P', sugarát pedig meghatározza az a körülmény, hogy a kúpalkotó első képsíkszögének cotangense $\frac{5}{4}$, vagyis a kúp magasságának $\frac{5}{4}$-szerese. A nyert kúp minden érintősíkja és minden érintősíkjának végtelenben fekvő nyomvonala érinti a végtelenben fekvő kúpszeletet és illeszkedik a k koronavonal P pontjára. A kúp érintősíkjai közül azt kell kiválasztani, mely a k koronavonal P pontjához tartozó t érintőre illeszkedik. Ilyen síknak első nyomvonala s_1 átmegy a t érintő első nyompontján és érinti a kúp első képsíkban fekvő vezérkörét. Az s_1 egyenes a két görbe közös kifejthető felületéhez tartozó egyik érintősík első nyomvonala, és ha az s_1 egyenes a kúp vezérkörét P_1 pontban érinti, akkor a PP_1 kúpalkotó a nyert érintősík érintési alkotója. A szerkesztésből kitűnik, hogy a nyert alkotó az alkotómenti érintősíkban esésvonal, továbbá az s_1 nyomvonal a rézsüfelület első képsíkon lévő nyomgörbéjének érintője P_1 érintési ponttal. Mivel a rézsüfelület nyomgörbéjének P_1 pontjában az érintő a rézsükúp vezérkörét is ugyanabban



214. ábra.

215. ábra.

a pontban érinti, a nyomgörbe szerkesztését még oly módon is végezhetjük, hogy a koronavonal minden pontjához tartozó rézsükúp nyomkörét állapítjuk meg az első képsíkban és megrajzoljuk azt a görbe vonalat, mely az összes nyomköröket érinti. A nyomkörök egyméretű sokaságának van burkoló görbéje (enveloppe-ja), ez a burkoló görbe a rézsüfelület nyomgörbéje. E szerint a gyakorlatban a rézsüfelület rétegvonalát adott nívósíkban úgy szerkesztjük meg, hogy megrajzoljuk az adott nívósíkban ama rézsükúpok nyomköreit, mely kúpok csúcspontjai a koronavonalnak főnívósíkokra illeszkedő pontjai és a nyomköröket síkgörbével burkoljuk. Így szerkesztettük meg a 215. ábrában kótás projekcióban adott koronavonalhoz tartozó rézsüfelület rétegvonalait.

A rézsüfelület geometriai szerkesztéséből a felület következő tulajdonságait állapíthatjuk meg:

a) *a rézsüfelület kifejthető felület,*

b) *állandó esésű felület,*

c) *esésvonalai egyenes vonalak,*

d) *rézsüfelület rétegvonalainak kótás képei parallel görbék.* Megjegyzendő, hogy a felsorolt tuljadonságok közül egyesek magukban véve elégségesek arra, hogy a rézsüfelületek definícióját nyujtsák.

140. §. A gyakorlatban szereplő rézsüfelületek. Mint láttuk, a rézsüfelületet elsősorban a koronavonal határozza meg. A gyakorlatban koronavonalként szerepelhet 1. horizontális egyenes, 2. lejtéssel bíró egyenes, 3. kör horizontális síkban, 4. csavarvonal.

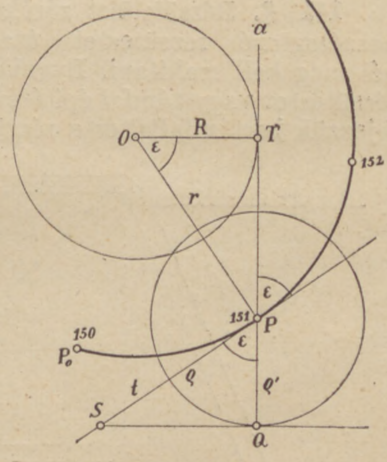
1. Horizontális egyenesre illeszkedő rézsüfelület két síkból tevődik össze, melynek egy egyenese az adott horizontális egyenes és rézsüje a rézsüfelület rézsüje.

2. Lejtős egyenesre illeszkedő rézsüfelület szintén két síkból áll, az adott egyenesre illeszkedő ama síkokból, melyeknek rézsüje a rézsüfelület rézsüje. Ilyen síkokat szerkesztettünk a 126. §-ban (197. ábra).

3. Horizontális síkban fekvő körhöz tartozó rézsüfelület két rézsükúpból áll és mindkettő közös vezérköre az adott kör.

4. Útvonal tengelyvonala lehetőleg egyenes vonal, de kanyarulatokban oly görbe vonal, melynek kótás képe egy vagy több körívből áll. Ha ugyanakkor az út tengelyvonala egyenletesen emelkedik vagy esik, akkor a tengelyvonal és evvel együtt a két koronavonal a térben csavarvonalak, e csavarvonalak közös tengelye a horizontális képsíkra merőleges egyenes.

Bebizonyítjuk, hogy képsíkra merőleges tengelyű csavarvonalhoz tartozó rézsüfelület kifejthető csavarfelület. Vegyünk fel az r sugarú hengeren oly csavarvonalat, melynek emelkedése a csavarvonal ϱ rézsüjével van megadva és szerkesszük meg a csavarvonalhoz tartozó rézsüfelületnek a csavarvonal tetszőleges P pontjára illeszkedő alkotóját, ha a rézsüfelület rézsüje az adott ϱ'. Az ismeretes utasítást követve megállapítjuk a csavarvonal P pontjában a t érintőt és azt a rézsükúpot, melynek csúcspontja P, a rézsükúp t érintőre illeszkedő érintősíkjának érintési alkotója a rézsüfelület P pontra illeszkedő a alkotója (216. ábra). Ha ugyanezt a szerkesztést a csavarvonal más P_1 pontjára elvégezzük, akkor közvetlenül megállapíthatjuk a rézsüfelület új alkotójára nézve azt, hogy az a_1 új felületi alkotót úgy is nyerhetjük, hogy a már szerkesztett a alkotóra a csavarvonal által jellemzett csavarmozgást alkalmazzuk, mivel az elcsavart érintő az elcsavart P pont érintőjébe és az elcsavart rézsükúp az elcsavart pont rézsükúpjába megy át. Tehát mondhatjuk, hogy csavarvonalhoz tartozó rézsüfelület egyenes csavarmozgása által származtatható felület, de mint rézsüfelület kifejthető, tehát e felület a kifejthető csavarfelület. Kifejthető csavarfelület tengelyére merőleges síkmetszete mindig közönséges körevolvens, amiből következik, hogy képsíkra merőleges tengelyű csavarvonalhoz tartozó rézsüfelület rétegvonalai közönséges körevolvensek.



216. ábra.

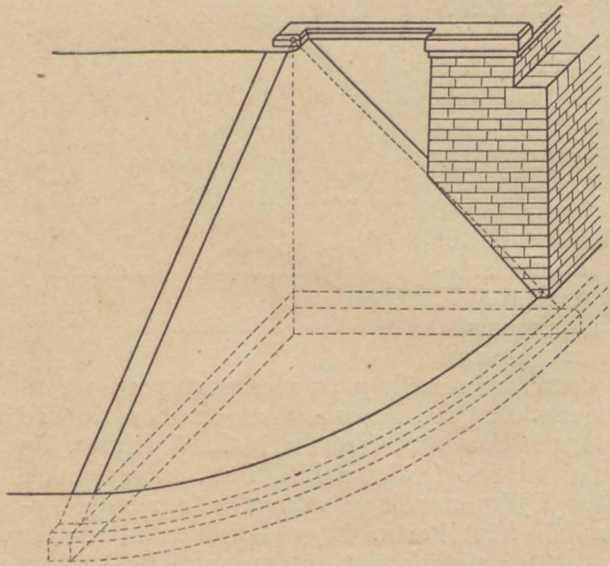
A csavarvonalhoz tartozó rézsüfelület a alkotójának szerkesztéséből kaphatjuk annak a csavarvonalnak meghatározó adatait, melynek kifejthető felülete a rézsüfelület. A kifejthető csavarfelület a alkotójának kótás képe a koronavonal kótás képét mindig ugyanazon ε szög alatt metszi, e szögre vonatkozólag

$$\cos\varepsilon = \frac{\varrho'}{\varrho}$$

az SPQ derékszögű háromszögben, ahol a koronavonal P pontjához tartozó érintő nyompontja S az egy méterrel mélyebben fekvő nívósíkon van és $\overline{SP}$ távolság a $\widehat{P_0P}$ köiív távolsággal egyenlő. Amikor kimutattuk, hogy a rézsüfelület kifejthető csavarfelület, említettük, hogy a felület egy alkotójának csavarmozgásából származtatható, ahol a csavarmozgást maga a koronavonal jellemzi. Ebből következik, hogy a kifejthető csavarfelület visszatérő görbéje oly csavarvonal, melynek tengelye a koronavonal tengelyével azonos és menetmagassága a koronavonal menetmagasságával egyenlő. A keresett csavarvonal hengerének sugara pedig a szerkesztett a alkotó képének távolsága a tengely pontszerű képétől, mert a csavarvonal tengelyére merőleges képsíkon a kifejthető csavarfelület alkotójának képe mindig érinti azt a kört, mely kör vezérköre a visszatérő göıbe hengerének. E kör sugara R, ki is számítható, t. i. POT háromszögből

$$R = r\cos\varepsilon = r\frac{\varrho'}{\varrho}.$$

141. §. Rézsüfelület zárókúpja. Feltöltéssel épített úttestet és a hozzátartozó rézsütestet útaluljáróknál, vízáteresztőknél, hídfőknél meg kell szakítani. Ilyenkoı a megszakítás helyén az úttestet és rézsütestet vagy támfal építésével biztosíthatjuk, vagy csak az úttestet fejezzük be támfallal és a rézsütestet kúpfelülettel zárjuk. E zárókúpfelület általában nem rézsükúpnak, hanem általános másodrendű kúpfelületnek egy része. A zárókúp csúcspontja legtöbbször a koronavonal egy pontja, vezérgörbéje valamely adott nívósíkban ellipszis, melynek középpontja a csúcspontból a vezérgörbe síkjára bocsátott merőleges talppontja, nagytengelyének végpontja a vezérgörbe síkjának és a kúp csúcspontjára illeszkedő rézsüfelületi esésvonalnak metszéspontja, kistengelyének végpontja pedig e ponton átmenő



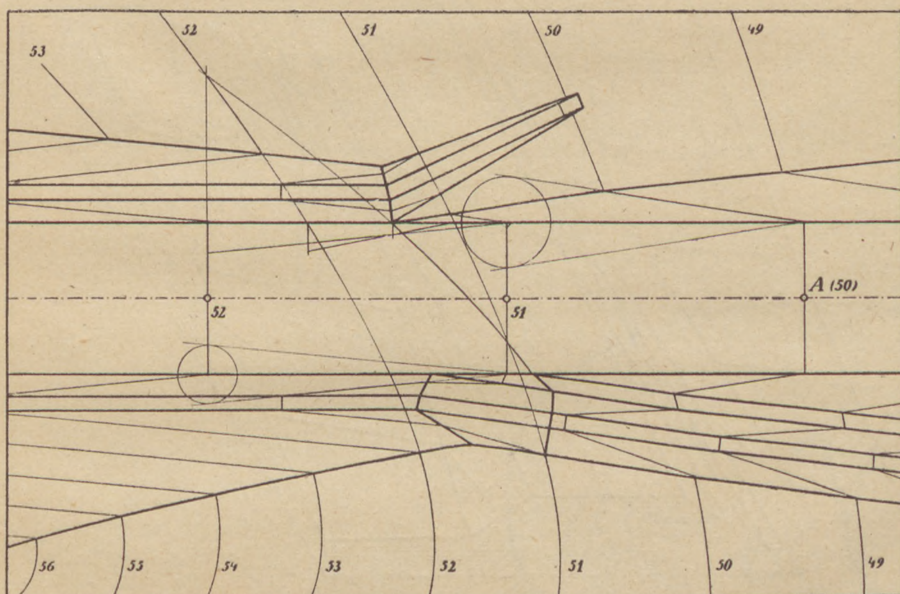
217. ábra.

kúpalkotó adott rézsüjével van meghatározva, ahol ez a rézsü természetesen kisebb a rézsüfelület rézsüjénél.

A zárókúp vezérellipszisét konjugált átmérőpárral adjuk meg, ha az úttest elvágásánál alkalmazott sík nívóvonalai a tengelyvonallal nem alkotnak derékszöget. Ekkor a vezérellipszis egyik átmérőjének iránya egyezik az előbb említett sík nívóvonalainak irányával és a másik jóval kisebb átmérőnek iránya követi a tengelyvonal képének irányát. Mivel a zárókúp, mint test, a rézsütest védelmét szolgálja, tartósságát fokozottabb mértékben azáltal biztosítjuk, hogy felületét kő- vagy betonburkolattal látjuk el.

Úttest és rézsütest megszakítását kavallier perspektívában a 217. ábra mutatja, a felvétel nagyjából a tiszaughi híd egyik hídfőjéről készült.

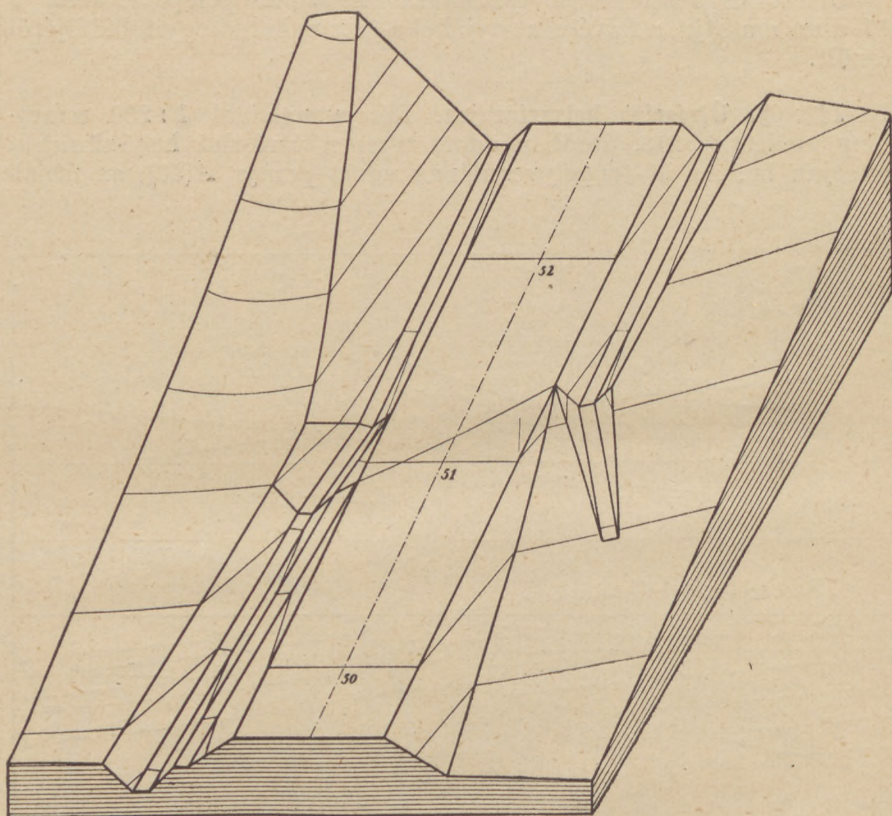
142. §. Útrészlet helyszínrajza. Rétegvonalaival 1 : 250 méretarány mellett a 218. ábrában adott terepen útrészlet helyszínrajzát mutatjuk be. Az út tengelyvonalának adott pontja A(50), az útnak



218. ábra.

nyugat felé 10%-os emelkedése van, koronaszélessége 5 m. Feltöltéseknél a rézsü, $\varrho_1 = \frac{3}{2}$, bevágásoknál a rézsü, $\varrho_2 = 1$. A bevágásban az út mindkét oldalán árok vezet, itt a fenéksík tengelyvonala az út tengelyvonalával párhuzamos és ezt az irányt követi addig, míg a bevágásból a töltéshez ér, innen kezdve az árkok elhajlanak, az északi oldalon a terep esésvonalának irányát követi, a déli oldalon a töltés alsó szélével parallel, ahol az árok és töltés között $^1/_2$ m-es padot iktattunk be. Az árok mélysége mindenütt $^3/_4$ m mélységű és $^1/_2$ m fenékszélességű.

A helyszínrajz szerkesztésénél emelkedésének megfelelően graduáltuk az út tengelyvonalát, megrajzoltuk a síkszerű útfelület nívóvonalait és koronavonalait. Majd meghatároztuk az útfelület és terepfelület metszési vonalát, az úgynevezett semleges vonalat. A rajzban a semleges vonal három pontjának szerkesztését tüntettük fel, az egyik pont az útfelület és terepfelület 52-es nívóvonalainak metszéspontja, a másik pont az 51-es nívóvonalak metszéspontja, a harmadik pont az út északi koronavonalára illeszkedő pont. E pontot úgy határoztuk meg, hogy a koronavonal vetítősíkját a benne fekvő koronavonallal és a vetítősík



220. ábra.

által kimetszett terepfelületi görbével együtt az 51-es nívósíkba forgattuk. A koronavonalak és semleges vonal közös pontjainál kezdődik a feltöltés, illetve a bevágás. Ezek után meghatároztuk a koronavonalakhoz tartozó rézsüsíkokat, még pedig oly módon, hogy megszerkesztettük e síkok főnívóvonalait. Így a feltöltés északi oldalán az 50-es nívóvonal egy pontja a koronavonal 50-es pontja, különben pedig érintője ama rézsükúp 50-es nívósíkban fekvő nyomkörének, melynek csúcspontja a koronavonal 51-es pontja. A helyszínrajz egyéb részleteinek szerkesztése a kész ábrából közvetlenül leolvasható.

A 219. ábrában az előbbi helyszínrajz szerkesztési eredményeit a jobb áttekinthetőség kedvéért klinogonális axonometrikus képben mutatjuk be.

Még megjegyezzük, hogy színes helyszínrajzok készítésénél az út tengelyvonalát folytonos piros vonallal rajzoljuk, feltöltéseknél a rézsüfelületet zöld, bevágásoknál barna festékréteggel vonjuk be.

A centrális projekció.

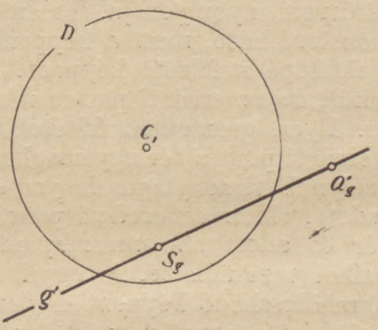
143. §. A centrális projekció. Az I. kötetben az elemi ábrázoló geometriai módszerek felsorolásánál a centrális projekcióról annyit említettünk meg, hogy végesben fekvő képsík mellett a vetítési középpontot is a végesben vesszük fel. A vetítési középpontra illeszkedő minden sugár vetítősugár, és e pontra illeszkedő minden sík vetítősík. Legyen a vetítési középpont, röviden centrum, állandó jele : C.

144. §. Képsíkra, végtelenben fekvő síkra illeszkedő pontok képei. A tér tetszőleges pontjának képe a pontra illeszkedő egyetlen vetítősugár és képsík metszéspontja, a vetítősugár nyompontja. Valamely pont képéből az eredeti pont nem rekonstruálható, mert a képpontra illeszkedő vetítősugár minden pontjának képe a felvett képpont. Az eredeti pont e határozatlansága megszűnik, ha az eredeti pontra nézve valamely geometriai feltétel ismeretes. Ilyen geometriai feltételként bevezetjük azt a körülményt, hogy az eredeti pont a tér egy meghatározott síkjára illeszkedik, oly síkra, melynek viszonylagos helyzete a képsíkkal és a centrummal szemben adott, ekkor az eredeti pont az adott képpontra illeszkedő vetítősugár és adott sík metszéspontja. A centrális projekcióban két ilyen fix síkot vezetünk be. Az egyik sík a képsíkkal azonos sík, ekkor a képsíkra illeszkedő képpont eredetije a képponttal azonos pont ; a másik sík a tér egyetlen végtelenben fekvő síkja, ekkor valamely képpont eredetije a képpontra illeszkedő vetítősugár egyetlen végtelenben fekvő pontja. Megállapodunk abban, hogy képsíkra illeszkedő pont képét mindig az eredeti pont jelével látjuk el, e jel legtöbbször S ; a végtelenben fekvő síkra illeszkedő pont képének állandó jele Q', a különböző végtelenben fekvő pontok képeit a Q' jelhez írt különböző indexekkel jelöljük.

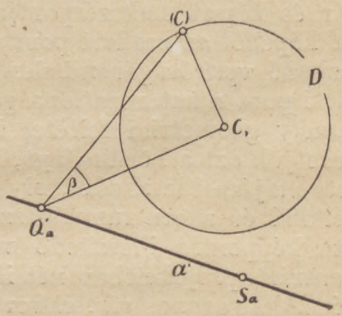
145. §. Centrum, képsík és a konstrukciók síkja. Alakzat centrális képének szerkesztésénél a konstrukciók síkját azonosítjuk a képsíkkal, utóbbiról pedig általában azt tesszük fel, hogy a térben függélyes helyzetű és átlátszó. Centrum és képsík viszonylagos helyzetét megadjuk a centrum orthogonális projekciójával, állandó jele C_1, e pont a rajz síkjának főpontja, továbbá a centrum és képsík távolságával, a distanccal, jele : d. A distancot a rajz síkjában megadjuk egy vonaldarabbal, de legtöbbször megadjuk a distanckörrel, jele : D. A distanckör oly kör, melynek középpontja a főpont és sugara a distanc. Főpont és distanc, illetve distanckör nem állapítja meg egyértelműen centrum és képsík viszonylagos helyzetét, a centrum lehet a képsík előtt vagy mögött. Megállapodunk abban, hogy a centrum a képsík és végtelenben fekvő sík által keletkezett azon térrészben van, mely térrészben a konstrukciókat végző szeme van, röviden a centrumot a képsík előtt gondoljuk.

146. §. Egyenes centrális képe. Mivel két fix síkpontjait már tudjuk ábrázolni, áttérhetünk az egyenes centrális képének szerkesztésére. Általános helyzetű egyenes a két fix síkot általában két különböző pontban metszi, e két pont meghatározza az egyenest, e pontok képeinek összekötő egyenese az egyenes centrális képe, mert tudjuk, hogy egyenes képe egyenes és egyenesre illeszkedő pont képe az egyenes képére illeszkedő pont.

Legyen az ábrázolandó adott egyenes g, a g egyenes metszi a képsíkot az S_g pontban, a végtelenben fekvő síkot a Q_g pontban, az S_g pont képe önmaga, az egyenes végtelenben fekvő pontjának képe a centrumra illeszkedő és g egyenessel parallel egyenes nyompontja, Q'_g, a nyert pontok összekötő egyenese az egyenes centrális képe, g'. Az S_g pont az egyenes nyompontja, Q'_g az egyenes iránypontja (220. ábra). Nyompontjával és iránypontjával adott egyenes rekonstrukciója úgy történik, hogy az egyenes iránypontját összekötjük a centrummal, ez a vetítő-



220. ábra.



221. ábra.

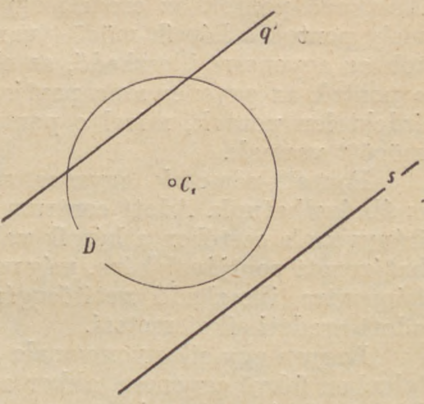
sugár az egyenes iránya, e vetítősugárral parallel és nyompontra illeszkedő egyenes az eredeti egyenes.

Vetítősugár képének szerkesztésénél a nyompont és iránypont két azonos pont, e szerint a képsíkban a két azonos pontra illeszkedő minden egyenes a két azonos pontra illeszkedő vetítősugárnak képe. De ha egyenes képén az egyenesre illeszkedő pontok képeinek összességét értjük és a vetítősugár pontjaiból kikapcsoljuk a centrumot, akkor a vetítősugár képe, mint a parallel projekcióban, pont.

Adott főpont és distanc mellett legyen az a egyenes képe a', nyompontja S_a, iránypontja Q'_a, ezentúl röviden $a(S_a, Q'_a)$ (221. ábra). Ekkor az a egyenessel parallel vetítősugár egyik pontja Q'_a, másik pontja a centrum. E vetítősugár képsíkszöge egyenlő az a egyenes képsíkszögével. A vetítősugár képsíkszögét oly derékszögű háromszög egyik hegyesszöge, melynek egyik befogója $\overline{Q'_aC_1}$ távolság, másik befogója a distanc, e háromszögben a distanccal szemközt fekvő szög nemcsak a vetítősugár képsíkszöge, hanem az eredeti a egyenesé is. Az egyenes képsíkszögének szerkesztéséből közvetlenül megállapíthatjuk azt, hogy minden olyan egyenes képsíkszöge, melynek iránypontja a distanckör belsejében van, 45°-nál nagyobb, ha az egyenes iránypontja a distanckör egy pontja, akkor a képsíkszög 45°, ha pedig az iránypont a distanckörön kívül fekvő pont, akkor az egyenes képsíkszöge 45°-nál kisebb.

Az egyenes ábrázolásából önként adódik, de külön kiemeljük, hogy a centrális projekcióban parallel egyenesek képei általában konvergáló egyenesek, parallel egyenesek iránypontja közös. A képsíkra merőleges egyenesek közös iránypontja a főpont, C_1.

147. §. A sík ábrázolása. A síkot a síkra illeszkedő két egyenesével ábrázoljuk. A síkra illeszkedő egyenesek közül kiemeljük a sík nyomvonalát, azt az egyenest, melyben a sík a képsíkot metszi, állandó jele: *s*. Erre az egyenesre illeszkedik minden a síkra illeszkedő egyenes nyompontja. A sík egy másik fontos egyenese a sík végtelenben fekvő egyenese, ez egyenes képe az adott síkkal parallel vetítősík nyomvonala, állandó jele: q'. A sík végtelenben fekvő egyenesének képe a sík irányvonala, a sík irányvonalára illeszkedik minden a síkra illeszkedő egyenes iránypontja. A síknyomvonala és irányvonala parallel, mert a képsík a síkot és a vele parallel vetítősíkot parallel egyenesekben metszi. Nyomvonalával és irányvonalával adott sík eredetijét úgy nyerjük, hogy az irányvonal és centrum által meghatározott vetítősíkkal parallel síkot vezetünk a sík nyomvonalára illeszkedően (222. ábra).

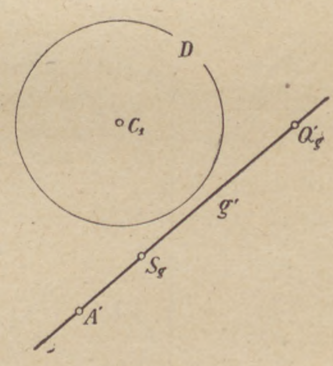


222. ábra.

Vetítősík ábrázolásánál a sík nyomvonala és irányvonala két azonos egyenes, ez az egyenes a vetítősík képe, ha a sík pontjaiból a centrumot kikapcsoljuk.

A sík ábrázolásából következik, hogy parallel síkok nyomvonalai parallel egyenesek, de irányvonaluk közös.

148. §. A pont ábrázolása. Pontot egy a pontra illeszkedő egyenes segítségével ábrázolunk, felvesszük az egyenes képét nyompontjával, iránypontjával és az egyenes képére illeszkedően a pont képét. A 223. ábrában felvettük a *g* egyenes képét nyompontjával és iránypontjával és azon tetszőlegesen az *A* pont képét, az *A'* pontot. Az eredeti *A* pontot úgy nyerjük, hogy megállapítjuk az adott centrum felhasználásával az eredeti *g* egyenest, az *A'* pontra illeszkedő vetítősugár metszi az eredeti *g* egyenest az eredeti *A* pontban.



223. ábra.

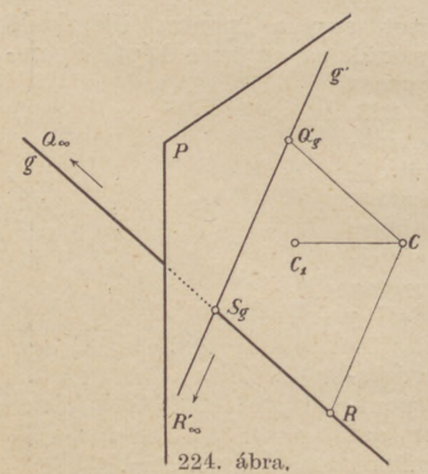
Az egyenes képének van egy végtelenben fekvő pontja, R'_∞, ha ennek a pontnak eredetijét megállapítjuk, akkor azt találjuk, hogy e pont annak a vetítősíknak egy pontja, mely vetítősík a képsíkkal parallel, e sík minden pontjának képe a képsík végtelenben fekvő egyenesére illeszkedik, e vetítősík irányvonalával azonos nyomvonala a képsík végtelenben fekvő egyenese. A képsíkkal parallel vetítősíkra illeszkedő pontok képei a szerkesztőre nézve mintegy eltűnnek, azért ezt a vetítősíkot a centrális projekció eltűnési síkjának mondjuk ; az egyenes képének végtelenben fekvő pontja az eredeti egyenes eltűnési pontjának képe.

Valamely egyenes képén a nyompont, az iránypont és a kép végtelenben fekvő pontja az egyenes képét három szakaszra bontja, e szakaszok $R'_\infty S$, SQ', $Q'R'_\infty$. Az első szakaszban fekvő pontok eredeti pontjai az eltűnési sík és képsík között vannak, a második szakaszra illeszkedő pontok az eredeti egyenesre illeszkedő ama pontok képei, mely pontok a képsík mögött vannak ; a harmadik szakaszra eső pontok az egyenesre illeszkedő, az eltűnési sík előtt fekvő pontok képei, e pontok az egyenes ama pontjai, melyek a gyakorlat szempontjából érdektelen pontok, mivel e pontok a centrumba elhelyezett szemlélő mögött vannak.

Pontot nemcsak egyenes segítségével, hanem sík segítségével is ábrázolhatunk. Adott centrum és tetszőleges sík adott nyomvonala, irányvonala esetében a képsík valamely pontja mindig a tér egy meghatározott pontjának képe, még pedig ama pont képe, melyben a felvett képpontra illeszkedő vetítősugár a nyomvonalával, irányvonalával adott eredeti síkot metszi.

Legyen egy sík nyomvonala s, irányvonala q' és r'_∞ a képsík végtelenben fekvő egyenese, akkor a képsík e három egyenese a képsíkot három síkrészre bontja, az r_∞, s egyenesekkel határolt végtelen síkrészre az eredeti sík ama pontjainak képei esnek, melyek a képsík és eltűnési sík között vannak, az s, q' egyenesekkel határolt síkrészre az eredeti sík ama pontjainak képei esnek, mely pontok a képsík mögött vannak, a harmadik síkrészre ama pontok képei esnek, melyek az eltűnési sík előtt vannak. Az r'_∞, a képsík végtelenben fekvő egyenese, a sík r eltűnési vonalának képe.

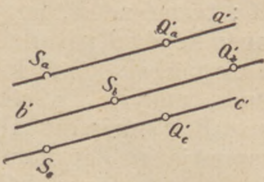
149. §. Speciális helyzetű térelemek ábrázolása. Vegyünk fel parallel perspektív képben centrumot, képsíkot, az eredeti g egyenest és ennek képét, a g' egyenest (224. ábra). Az egyenes centrális projekcióban lévő ábrázolásából következik, hogy C, R, S, Q' pontok a térben egy parallelogramma csúcspontjai, ha R az egyenes eltűnési pontja, S a nyompont és Q' az egyenes képén az iránypont. Fenti parallelogramma alapján mondhatjuk, hogy nyompontjával és iránypontjával adott egyenes az eltűnési síkot oly pontban metszi, melynek távolsága a vetítési középponttól az $\overline{SQ'}$ távolsággal egyenlő és a $\overline{CR}$ iránya egyezik a $Q'S$ iránnyal. Mindezekből következik, hogy az eltűnési sík egy és ugyanazon pontjára illesz-



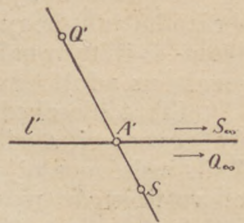
224. ábra.

kedő egyenesek képei parallel egyenesek és ezeken a nyompont és iránypont által meghatározott távolság nagyságra és irányra nézve egyező. A 225. ábrában feltüntetett *a*, *b*, *c* egyenesek az eltűnési sík ugyanazon pontjára illeszkedő egyenesek.

Képsíkkal parallel egyenes képén a nyompont és iránypont a kép egyetlen végtelenben fekvő pontja, e képpont az eredeti egyenest nem határozza meg. Képsíkkal parallel egyenest úgy ábrázolunk, hogy az egyenes egy végesben fekvő pontját ábrázoljuk úgy, amint pontot ábrázolni tanultunk és e pont képére illeszkedően az eredeti egyenessel parallel egyenes a kérdéses egyenes képe (226. ábra).



225. ábra.



226. ábra.

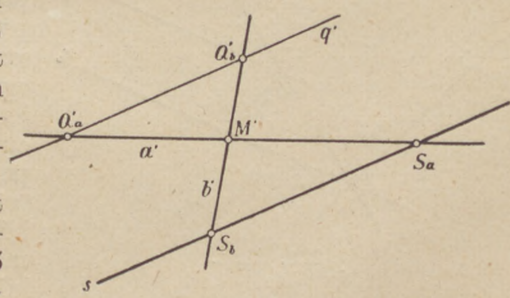
Képsíkkal parallel egyenesek között szerepelnek az eltűnési síkban fekvő egyenesek is, ilyen egyenest egy az egyenesre illeszkedő síkkal ábrázolunk. Az eltűnési síkban fekvő egyenesre illeszkedő sík nyom- és irányvonalának távolsága az egyenes és centrum távolságával egyenlő.

Képsíkkal parallel síkot úgy ábrázolunk, hogy egy a síkra illeszkedő pont képét tüntetjük fel.

150. §. Illeszkedő térelemek. Síkra illeszkedő egyenes nyompontja a sík nyomvonalára, iránypontja a sík irányvonalára illeszkedő pont. E tétel szerint utasításunk van arra, hogy hogyan kell adott síkra illeszkedő egyenest felvenni, illetőleg hogyan kell adott egyenesre illeszkedő síkot ábrázolni.

Ha adott egyenes iránypontja nem illeszkedik az adott sík irányvonalára, de nyompontja a sík nyomvonalán lévő pont, akkor az egyenes metszi a síkot, a metszéspont az egyenes nyompontja; ha pedig sík és egyenes esetében iránypont és irányvonal illeszkedők és nyompont meg nyomvonal nem illeszkedők, akkor az egyenes a síkkal parallel, mert ekkor az egyenes végtelenben fekvő pontja a sík végtelenben fekvő egyenesére illeszkedő pont.

Egy síkra illeszkedő két egyenes mindig metszi egymást, e szerint illeszkedő egyenesekre vonazkotó következő kritériumot nyerjük: Két egyenes iileszkedő, ha a nyompontok összekötő egyenese parallel az iránypontok összekötő egyenesével. Ha az egyenesek nyompontjainak összekötő egyenese nem parallel az iránypontok összekötő egyenesével, akkor a két egyenes kitérő. A 227. ábrában *a* és *b* egyenesek illeszkedő egyenesek, az egyenesek képeinek közös pontja a metszéspont képe.

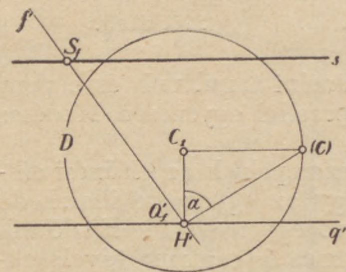


227. ábra.

Egyenesek illeszkedési kritériuma alapján eldönthetjük azt is konstruktív úton, hogy pont és egyenes, illetve pont és sík mikor illeszkedők, ennek részletezését az olvasóra bízom.

Itt megemlítjük, hogy a képsíkkal parallel egyenest még úgy is ábrázolhatjuk, hogy képén kívül megadjuk az egyenesre illeszkedő sík nyom- és irányvonalát; természetes, hogy ekkor a sík nyom- és irányvonala az adott egyenes képével parallel.

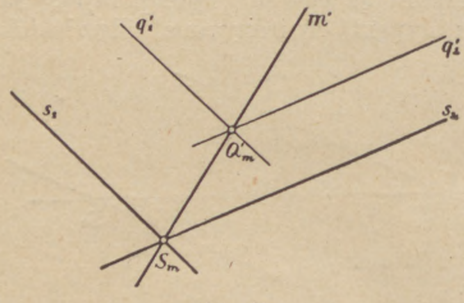
Síkra illeszkedő egyenesek közül kiemelendők a sík esésvonalai. oly egyenesei a síknak, melyek a sík nyomvonalára merőlegesek, A sík esésévonalai parallel sugársort alkotnak, e sugarakkal parallel vetítősugár nyompontja a képsíkon az a pont, mely pontban a főpontból a sík irányvonalára bocsátott merőleges egyenes az irányvonalat metszi, e pont a sík esésvonalainak közös iránypontja, rendesen H betűvel fogjuk jelölni (228. ábra).



228. ábra.

Mivel a sík képsíkszöge esésvonalának képsíkszögével egyenlő, mondhatjuk, hogy a sík képsíkszöge 45°-nál nagyobb, ha irányvonala két különböző valós pontban metszi a distanckört; ha a sík irányvonala érinti a distanckört, akkor a sík képszöge 45°; a képsíkszög 45°-nál kisebb, ha a sík irányvonala a distanckört képzetes pontokban metszi. Oly sík, melynek irányvonala a főpontra illeszkedik, a képsíkra merőleges sík. A gyakorlat szempontjából fontos síkok a függélyes helyzetben gondolt képsík mellett a horizintális sík, ilyen sík irányvonala a főpontra illeszkedő horizontális egyenes, röviden horizont, nyomvonala a horizonttal parallel egyenes.

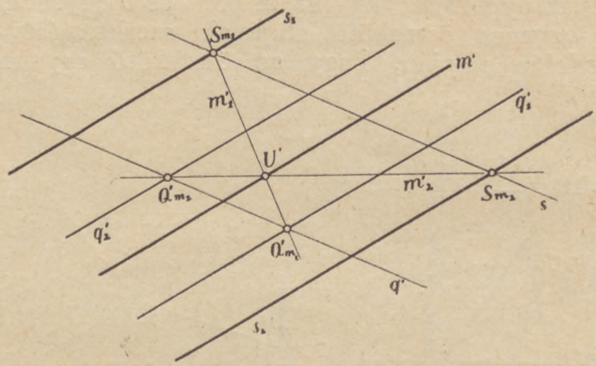
151. §. Illeszkedési feladatok. *a) Két sík metszésvonala.* Adva van két sík, $\mathbf{S}_1$ (s_1, q'_2), $\mathbf{S}_2$ (s_2, q'_2) (229. ábra). A két nyomvonal közös pontja a metszésvonal nyompontja, az irányvonalak közös pontja a metszésvonal iránypontja. Ha az adott síkok nyomvonalai és irányvonalai parallel egyenesek, akkor a metszésvonaluk a nyomvonalakkal parallel egyenes, a közös egyenes egy pontját úgy nyerjük, hogy egy tetszőleges segédsíknak mindkét síkkal való metszésvonalát megszerkesztjük, a metszésvonalak közös pontja az eredetileg keresett metszésvonal egy pontja (230. ábra).



229. ábra.

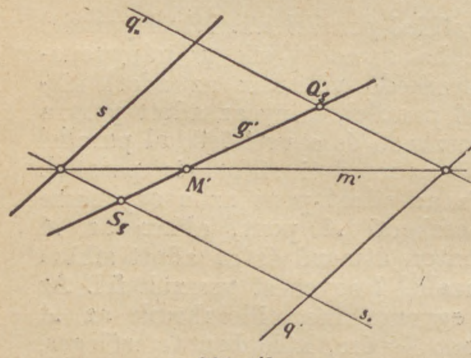
b) *Egyenes és sík metszéspontja.* Adva van a g (S_g, Q'_g) egyenes és az $\mathbf{S}$ (s, q') sík (231. ábra). Megszerkesztjük a g egyenesre illesztett tetszőleges sík és adott sík m metszésvonalát, az m és g egyenesek illeszkedési pontja, M, a keresett metszéspont.

c) *Pont és egyenes összekötő síkja.* Adva van az A pont az a (S'_a, Q_a) egyenesen és a g (S_g, Q'_g) egyenes (232. ábra). Szerkesztessék meg az adott elemek összekötő síkja. A feladatot két metsző egyenes összekötő síkjára vezetjük vissza. Mindenekelőtt szerkesztünk az A pontra és a g egyenesre illeszkedő egyenest, ezek az egyenesek sugársort alkotnak, e sugársor sugarai közül kettőt szerkeszthetünk meg közvetlenül, az egyik az az egyenes, mely az adott egyenes nyompontjára illeszkedik, a másik pedig az az egyenes, mely az adott egyenessel parallel. Legyen

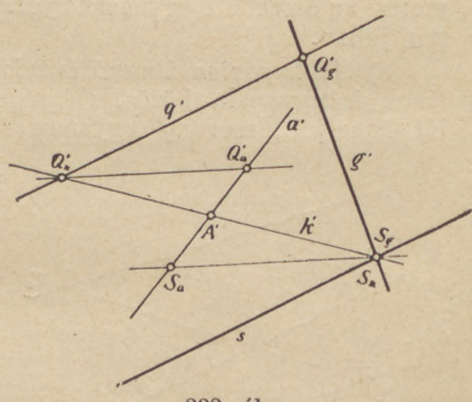


230. ábra.

az első egyenes k, ennek nyompontja az adott egyenes nyompontja, mivel k és a egyenesek illeszkedők, ez egyenesek összekötő síkjának nyomvonala, az S_g és S_a pontok összekötő egyenese, ez egyenessel parallel a sík irányvonala, mely különben az ismeretes Q'_a pontra illeszkedik, e feltételekből szerkesztett irányvonal a k egyenes képén kimetszi



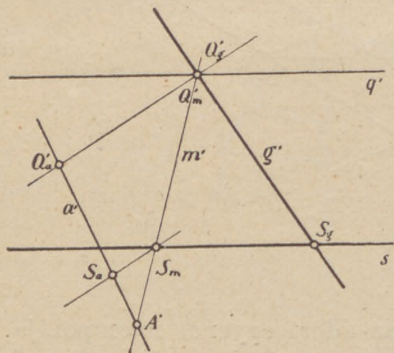
231. ábra.



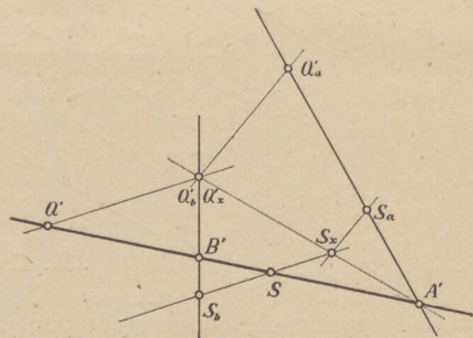
232. ábra.

annak iránypontját, a Q'_k pontot. Ezek után az adott pont és adott egyenes összekötő síkjának irányvonala a Q'_k és Q'_g pontok összekötő egyenese, a nyomvonal pedig a g egyenes nyompontjára illeszkedő és a megszerkesztett irányvonallal parallel egyenes. Legyen a pont és egyenes a 233. ábrában ugyanúgy megadva, mint előbb és legyen a g egyenessel parallel egyenes, mellyel az adott pont és egyenes összekötő síkját akarjuk megszerkeszteni, m. Ekkor az m egyenes iránypontja $Q'_m = Q'_g$. Az m egyenes nyompontját az m és a egyenesek illeszkedéséből nyerjük. A nyert S_m az S_g ponttal megállapítja az eredetileg keresett sík nyomvonalát, utóbbival parallel és Q'_g pontra illeszkedő egyenes a megállapítandó összekötő sík irányvonala.

d) *Két pont összekötő egyenese.* Adott két pont összekötő egyenesének képe a képpontok összekötő egyenese. Ha az egyik adott pont A, mint az a egyenes egy pontja, a másik adott pont B, mint a b egyenes egy pontja van adva, akkor e pontok összekötő egyenesének nyom- és iránypontját vagy az A pont és b egyenes, vagy a B pont és a egyenes összekötő síkjának szerkesztésével nyerjük ama meggondolás alapján, hogy az összekötő egyenes e síkok



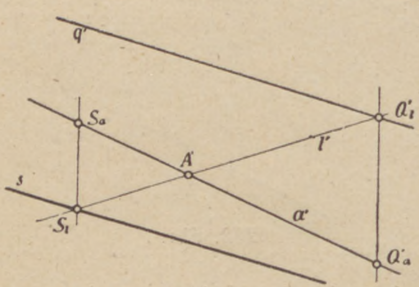
233. ábra.



234. ábra.

mindegyikére illeszkedő egyenes. A 234. ábrában az $[A, b]$ nyomvonala metszi az összekötő egyenest nyompontjában, irányvonala pedig iránypontjában.

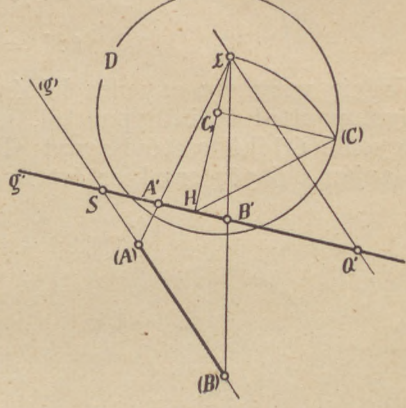
e) *Adott ponton átmenő és adott síkkal parallel sík.* Mivel parallel síkok irányvonala közös, elégséges, ha az adott sík q' irányvonalát ismerjük, mert q' egyenesre illeszkedő vetítősík az adott síkkal parallel, s így az adott pontra illeszkedő és a vetítősíkkal parallel sík az eredeti síkkal is parallel. Ha az adott pont az a egyenesre illeszkedő A pont, akkor az A ponton átmenő és az adott síkkal parallel l egyenest vesszük fel. Az l egyenes képe illeszkedik az A pont képére, különben tetszőleges, iránypontja az adott sík irányvonalára illeszkedő pont, Q'_l (235. ábra). Az a és l egyenesek, mint az A pontra illeszkedő egyenesek, síkot határoznak meg, e sík irányvonala Q'_l és Q'_a pontok összekötő egyenese. A nyert irányvonallal parallel és az a egyenes nyompontjára illeszkedik a két egyenes összekötő síkjának nyomvonala, e nyomvonal metszi az l egyenes képét az l egyenes nyompontjában. Az l egyenes nyompontján átmenő és az adott sík irányvonalával parallel egyenes a keresett sík nyomvonala.



235. ábra.

A tárgyalt illeszkedési feladatok alapján a centrális projekcióban az összes illeszkedési feladatok megoldhatók. Még megjegyezzük, hogy az illeszkedési feladatok megoldásánál a vetítési középpont ismeretére nincs szükségünk.

152. §. Két pont távolsága. Adott vetítési középpont mellett legyen adva a $g(g', S, Q')$ egyenesen két pont $A(A')$, $B(B')$ (236. ábra). A két pont által meghatározott távolság valódi nagyságát úgy szerkesztjük meg, hogy a g egyenes vetítősíkját nyomvonala körül e síkra illeszkedő elemekkel együtt a képsíkba forgatjuk. A leforgatott pontok távolsága a keresett távolság. Az egyenes vetítősíkjának nyomvonala a g egyenes centrális képe, g'. Mindenekelőtt a vetítősíkra illeszkedő vetítési középpontot forgatjuk a képsíkba. A leforgatást úgy végezzük, mint az orth. parallel projekcióban. A leforgatott középpont orth. projekcióján átmenő és a forgatás tengelyére merőleges egyenesen van, tehát szerkesztünk a C_1 ponton átmenő és a g' egyenesre merőleges egyenest, ez egyenesen a leforgatott középpont távolsága a g' egyenestől ama derékszög háromszög átfogója, melynek egyik befogója C_1 és g' elemek távolsága, másik befogója a centrum és képsík távolsága, d. A derékszögű háromszög szerkesztését úgy rendezzük be, mintha a háromszöget a képsíkban lévő befogója körül a képsíkba forgattuk volna, ekkor a háromszög derékszögének csúcspontja C_1, egyik hegyesszögének csúcspontja a vetítősík esésvonalainak közös iránypontja, H, a harmadik csúcspont a centrum egy leforgatottja, (C). Ezek után a $\overline{H(C)}$ távolságot a HC_1 egyenesre a H ponttól számítva felmérjük, az így nyert pont a vetítési középpont keresett leforgatottja, állandó jele : $\angle$.



236. ábra.

A térben C és Q' pontok összekötő egyenese a g egyenessel parallel vetítősugár, e vetítősugár leforgatottja $\angle$, Q_1 pontok összekötő egyenese és mivel egy síkra illeszkedő parallel egyenesek leforgatottjai is parallel egyenesek, tehát a g egyenes leforgatottjai az S pontra, a forgatásnál helybenmaradó pontra illeszkedik és $\angle Q'$ egyenessel parallel, jele (g). Az A és B pontokra illeszkedő vetítősugarak leforgatottjai a $\angle A'$, ill. $\angle B'$ egyenesek, e leforgatott vetítősugarak metszik a leforgatott g egyenest a keresett leforgatott pontokban, ezek (A) és (B), e pontok által meghatározott távolság az A és B pontok távolságának valódi nagysága.

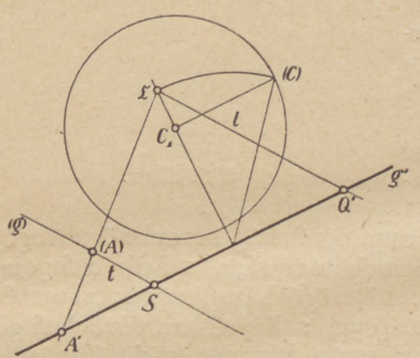
153. §. Az osztókör. Adott vetítési középpont mellett legyen adva a $g(g', S, Q')$ egyenes és rajta $A(A')$ pont. E pont az egyenes nyompontjával meghatároz egy távolságot, ha e távolság valódi nagyságát az előzők szerint megszerkesztjük (237. ábra), akkor az ábrából leolvashatjuk, hogy

$$\overline{S(A)} : \overline{Q\mathcal{L}'} = \overline{SA'} : \overline{Q'A'},$$

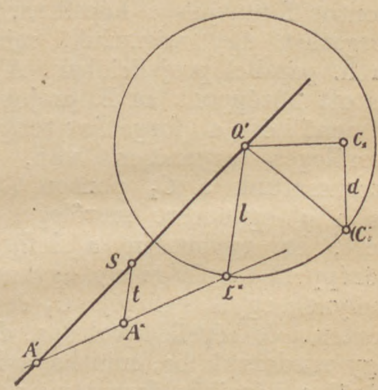
ahol $S(A) = t$ az egyenesre illeszkedő A pontnak az egyenes nyompontjától mért távolságnak valódi nagysága, $\overline{Q'\mathcal{L}'} = l$ az egyenes iránypontjának távolsága a vetítési középponttól, utóbbi távolságot röviden az egyenes hosszának is mondjuk, e hossz az eredeti egyenesen ama távolság, melyet rajta az eltűnési sík és képsík határol, e szerint az előbbi aránylatot így írhatjuk:

$$t : l = \overline{SA'} : \overline{Q'A'}.$$

Vagyis valamely egyenes képén felvett képpont, mint osztópont, a nyomponttal és iránnyponttal, mint alappontokkal, a $t : l$ viszonnyal egyenlő értékű osztóviszonyt állapít meg. A megállapított eredmény alapján előnyös szerkesztést nyerünk adott egyenesre illeszkedő oly



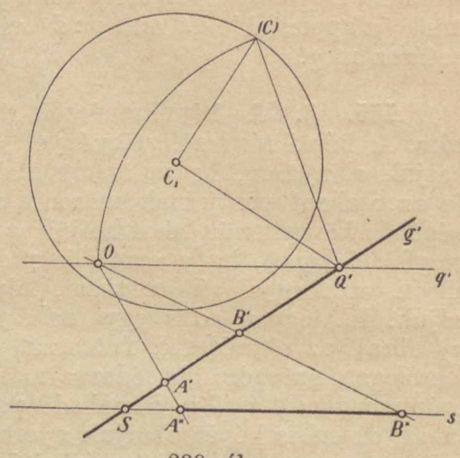
237. ábra.



238. ábra.

pont képének meghatározására, mely pontnak az egyenes nyompontjától való távolsága adott. A szerkesztést a 238. ábrában külön mutatjuk be. Előre bocsátjuk a $\overline{Q'\mathcal{L}'} = \overline{QC}$ távolság valódi nagyságának megállapítását. Az orth. parallel projekció törvényei szerint mondhatjuk, hogy e távolság ama derékszögű háromszögű átfogója, melynek egyik befogója $\overline{Q'C_1}$. másik befogója a disztanc, d. Ha e háromszög átfogójával, az l távolsággal, mint sugárral, az egyenes iránypontja körül, mint középpont körül, kört rajzolunk, az egyenes ú. n. osztókörét és az osztókör tetszőleges $\mathcal{L}^x$ pontját összekötjük az egyenes iránypontjával, majd az így nyert egyenessel parallel egyenest vezetünk az egyenes nyompontjára illeszkedően és utóbbira az S ponttól számítva felmérjük az $\overline{SA} = t$ távolság valódi nagyságát és e távolság A^x végpontját összeköjük $\mathcal{L}^x$ ponttal, akkor ez az egyenes metszi az adott egyenes képét a keresett A' pontban. Úgy amint az osztókör $\mathcal{L}^x$ pontját alkalmaztuk a szerkesztésnél, ugyanúgy felhasználható az osztókör minden pontja, az osztókör minden pontja az egyenes osztópontja. Természetesen a t távolságot az SA^x egyenesen kétféle értelemben rakhatjuk fel az S ponttól számítva; az egyik esetben az egyenesre illeszkedő pont a képsík előtt, a másik esetben a pont a képsík mögött van. Ha mindkét pontot megszerkesztjük, akkor az S pont a térben a két pont által meghatározott távolságnak felezési pontja, ugyanakkor azonban az S pont a távolság képének nem felezési pontja.

Az egyenes osztóköre alapján az egyenes képén adott A' és B' pontok által megadott képtávolság valódi nagyságát úgy szerkesztjük meg (239. ábra), hogy az egyenes nyom- és iránypontjára illeszkedő parallel egyeneseket vezetünk, ezek az egyenesek az egyenesre illeszkedő tetszőleges síknak s nyomvonala és q' irányvonala, megállapítjuk az osztókör és irányvonal egyik O metszéspontját és e pontból az s egyenesre vetítjük az A' és B' pontokat, az így nyert $\overline{A^{\times}B^{\times}}$ távolság a képtávolság valódi nagysága. Mert az előzők szerint:



239. ábra.

$$\overline{SA'} \text{ valódi nagysága } \overline{SA^{\times}} = \overline{SA}$$
$$\overline{SB'} \quad « \quad « \quad \overline{SB^{\times}} = \overline{SB}$$
$$\overline{SB'} - \overline{SA'} = \overline{A'B'} \quad « \quad « \quad \overline{SB^{\times}} - \overline{SA^{\times}} = \overline{A^{\times}B^{\times}} = \overline{AB}.$$

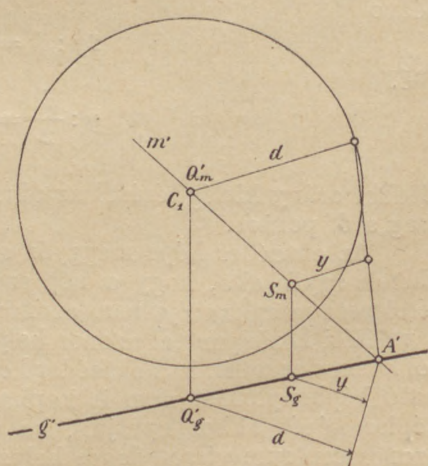
A szerkesztés menetének megfordításával utasítást nyerünk arra nézve, hogy mikép kell adott egyenes képén adott távolság képét megszerkeszteni.

154. §. A képsíkrendezők törvénye. Vegyünk fel a képsíkra merőleges m egyenesen oly A pontot, melynek az m egyenes nyompontjától való távolsága y (240. ábra). Ekkor az iránypont és centrum távolsága a distanc és y az A pont távolsága a képsíktól, y a pont képsíkrendezője. A tanult szerkesztés szerint

$$y : d = \overline{S_m A'} : \overline{Q'_m A'}.$$

Ha a megállapított A pontra illeszkedő tetszőleges g egyenest szerkesztünk, akkor az A pont a g egyenesnek oly pontja, melynek képsíkrendezője az adott y. Az A pontra illeszkedő g egyenes szerkesztéséből közvetlenül nyerjük, hogy

$$y : d = \overline{S_g A'} : \overline{Q'_g A'}.$$



240. ábra.

E szerint, ha tetszőéleges g egyenesen oly A pontot kívánunk szerkeszteni, melynek képsíkrendezője y, akkor az egyenes képén oly pontot kell megállapítani, mely az egyenes nyom- és iránypontjával, mint alappontokkal, az $y : d$ viszonnyal egyenlő osztóviszonyt határoz meg.

155. §. A képsíkrendezők törvényének gyakorlati alkalmazása. A képsíkrendezők törvényét a gyakorlatban akkor alkalmazhatjuk előnyösen, ha valamely alakzatnak ismerjük második képét és az alakzat pontjainak második rendezőit. Ilyen alakzat második képéből közvetlenül készíthetjük a centrális projekció törvényeinek megfelelő képet, ha a centrális projekció képsíkját a második képsíkkal azonosítjuk és centrum, képsík viszonylagos helyzetét megadjuk. Pl. legyen adva egy szabályos oktaéder második képe (241. *a)* ábra), az oktaéderről feltesszük azt, hogy diagonálisa a képsíkra merőleges, az egész oktaéder a második képsík mögött van és az *1* csúcspontja a képsíkra illeszkedő pont. Ha az oktaéder *5* csúcspontjának centrális képét akarjuk nyerni, akkor e pontra illeszlkedő tetszőleges egyenes centrális projekcióját kell ismerni, ez egyenesek közül közvetlenül a pontra illeszkedő és képsíkra merőleges egyenes képe megrajzolható, mivel ez egyenes iránypontja a főpont, nyompontja $5''$. Az így ábrázolt képsíkra merőleges egyenesen az *5* pont centrális képét nyerjük, ha az $5''$ és $1''$ pontok összekötő egyenesével a főpontra illeszkedően parallel egyenest vezetünk és erre felmérjük a főponttól számítva a distancot, majd a distanc végpontját összekötjük az $1''$ ponttal, utóbbi egyenes kimetszi az $5''$ és C_1 pontok összekötő egyenesén az *5* centrális képét, az $5'$ pontot, mivel az *5* pont képsíkrendezője az $\overline{5''1''}$ távolsággal egyenlő. Az ábrában láthatósági viszonyokat is tüntettünk fel a centrumban elhelyezett szemlélőre nézve.

Még megemlítjük, hogy az oktaéder *6*-os csúcspontjának képét hogyan szerkesztettük meg. Ha az oktaéder középpontjának képsíkrendezője y, akkor a *6*-os ponton átmenő képsíkra merőleges egyenes képén, a $6''C_1$ egyenesen oly pontot kell meghatározni, melyre nézve

$$2y : d = \overline{6''6'} : \overline{C_1 6'}$$

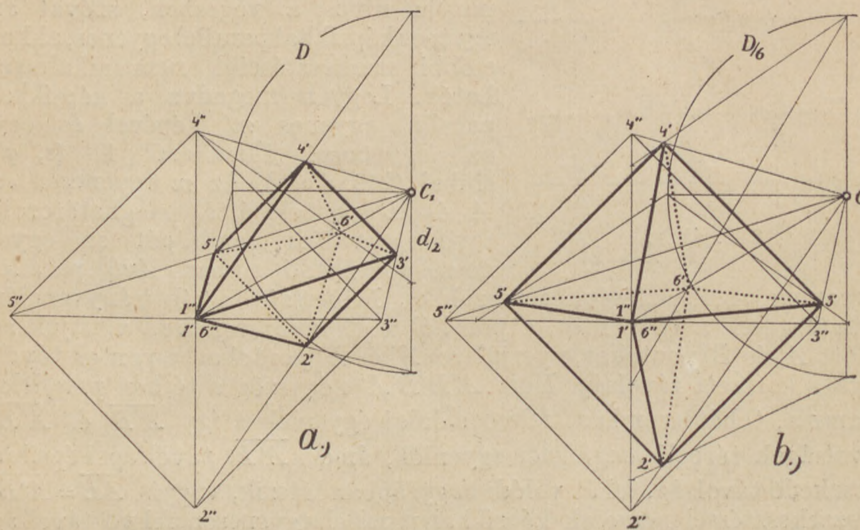
vagy

$$y : \frac{d}{2} = \overline{6''6'} : \overline{C_1 6'}.$$

Utóbbi arány kielégítésével az ábrából leolvasható módon állapítottuk meg a $6'$ pontot.

Az oktaéder képe meggyőz arról, hogy a nyert kép nem képies. Ennek egyik oka, hogy a kép szemlélésénél a szemlélő pontnak feltételezett szemlencséje nem azonos a vetítési középponttal; ha pedig a vetítési középponttal azonos helyzetben van, akkor oly kis távolságról kellene szemlélni az oktaéder képét, ahonnan normális szem elfogadható képbenyomást nem is kaphat. A centrális projekcióban alakzat képies képét akkor nyerjük, ha alakzat, képsík és a szemlencsével azonos centrum viszonylagos helyzete a tisztánlátás követelményeinek megfelel. A tisztánlátás feltételeinek tárgyalásánál bevezetjük a tiszta látás kúpját, e forgási kúp tengelye a CC_1 egyenes és félnyílása 30°. Alakzat képies képének szerkesztésénél az alakzatot úgy kell elhelyezni, hogy minden pontja a tiszta látás kúpjának belső pontja legyen; továbbá centrum és képsík távolságát úgy kell megválasztani, hogy az 20—25 cm-nél nagyobb legyen.

A tisztánlátás feltételeinek kielégítésével a 241. *b)* ábrában megszerkesztettük a 241. *a)* ábrában szereplő oktaédernek újabb centrális képét, ahol képsík, oktaéder és főpont viszonylagos helyzetén nem változtattunk, csak a distancot hatszor akkorának vettük fel, mint



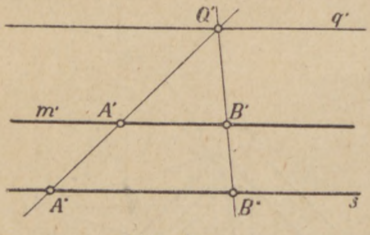
241. ábra.

eredetileg volt. Az oktaéder csúcspontok centrális képeinek szerkesztésénél a képsíkrendezők törvényét némileg módosítani kell, mert egy-egy pont meghatározásánál a főponton átmenő egyenesre a főponttól számítva a distancot kellene felmérni és az így megállapított végpont rendesen a rajz síkjából kieső pont. Ezért ilyenkor a képsíkrendezők törvényének $\frac{y}{n} : \frac{d}{n} = \overline{SA'} : \overline{Q'A'}$ alakját alkalmazzuk. A 241. *b)* ábrában a kivitelezésnél a distanc hatodrészével operáltunk, természetesen ennek megfelelően szerkesztéseinkben az oktaéder csúcspontok képsíkrendezőinek hatodrészei szerepelnek.

Az *a)* és *b)* ábrában két egyenlő nagyságú okatéder képét szerkesztettük meg és mégis a kép méreteiben lényeges különbséget tapasztalunk. Általában képsík mögött fekvő alakzat centrális képének képkörrajza által határolt terület a képsíkon nagyobb, ha a vetítési középpont a képsíktól távolabb fekszik, és minél távolabb vesszük fel a vetítési középpontot, annál jobban közelíti meg az alakzat képmérete az alakzat orth. projekciójának képméretét. De képsík előtt lévő alakzat képmérete mindig nagyobb, mint orth. projekciójának képmérete, és képmérete annál nagyobb, minél közelebb vesszük fel a vetítési középpontot a képsíkhoz.

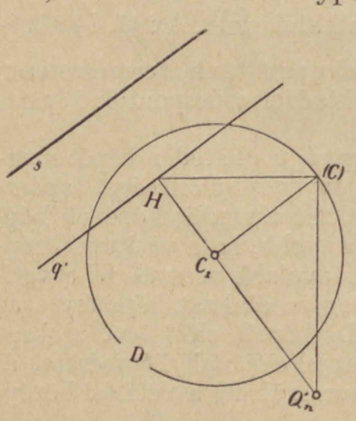
Ha centrális projekcióban valamely alakzat centrális képének szerkesztésénél a tisztánlátás feltételeit kielégítjük, akkor azt mondjuk, hogy a kép az alakzat centrális perspektívája. Tehát míg a centrális perspektivában aránylag nagy distanccal dolgozunk, addig a centrális projekcióban tetszőleges distanccal operálunk.

156. §. Távolság képsíkkal parallel helyzetű egyenesen. Eddig egyenesen fekvő távolság valódi nagyságát, ill. képével adott egyenesen adott távolság képét csak akkor szerkeszthettük meg, ha az egyenes, melyen a távolság van, végesben fekvő nyomponttal rendelkezik. De ha az egyenes nyompontja nincs a végesben, szóval az egyenes képsíkkal parallel egyenes, akkor előbbi szerkesztéseink nem alkalmazhatók. Legyen megadva a képsíkkal parallel egyenes m' képével és egy az egyenesre illeszkedő **S** (s, q') síkkal (242. ábra). Az m egyenesen az A és B pontok által meghatározott távolság valódi nagyságát az egyenesre illeszkedő síkban lévő parallelogramma szerkesztésével intézzük el. Felvesszük a sík irányvonalán tetszőlegesen a Q' pontot, e pontból a sík nyomvonalára vetítjük az adott A' és B' pontokat, nyerjük az $A^{\times}$ és $B^{\times}$ pontokat, e pontok távolsága a keresett távolság. Mert $A^{\times}B^{\times}B'A'$ négyszög a térben parallelogramma, tehát szemközt fekvő oldalai egyenlők s így $\overline{A'B'}$ és $\overline{A^{\times}B^{\times}}$ távolságok térbeli megfelelői egyenlők, ámde $\overline{A^{\times}B^{\times}}$ távolság képsíkra illeszkedő távolság, tehát valódi nagyságban látszik, vagyis $\overline{AB}=\overline{A^{\times}B^{\times}}$ E szerkesztéssel nemcsak képsíkkal parallel egyenesen fekvő távolság valódi nagyságát tanultuk szerkeszteni, hanem azt is, hogy mikép kell képsíkkal párhuzamos egyenesre annak adott pontjától számítva adott távolságot felmérni.



242. ábra.

157. §. Egyenes és sík merőleges helyzetben. Adott vetítési középpont mellett legyen adva az **S** sík, nyomvonala s, irányvonala q' (243. ábra). A síkra merőleges egyenesek parallel egyenesek, ha ezek közös iránypontja Q'_n, akkor a centrumból a Q'_n felé haladó vetítősugár és a főpont meghatároz a képsíkra merőleges vetítősíkot, e vetítősík az adott sík irányvonalát a H pontban metszi. H, C, Q'_n pontok a térben oly derékszögű háromszög csúcspontjai, melynek átfogója a képsíkra és a főpontra illeszkedik, továbbá ugyanaz az átfogó az adott sík irányvonalára merőleges. A HCQ'_n háromszöget a beforgatásban közvetlenül megrajzolhatjuk, ha síkját a háromszög átfogója körül a képsíkba forgatjuk, ekkor a háromszög átfogója a C_1 ponton átmenő és adott sík irányvonalára merőleges egyenesen van, ez egyenes és irány-



243. ábra.

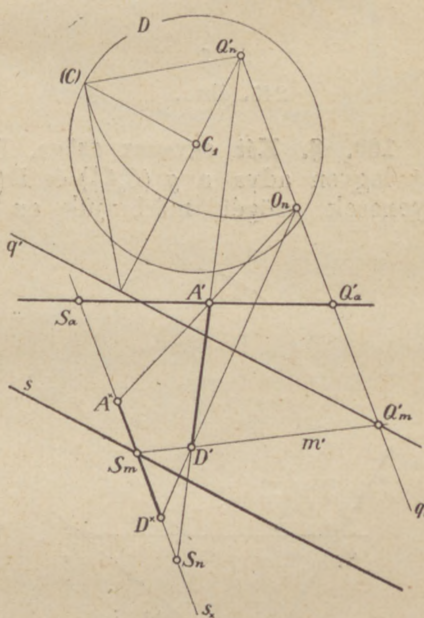
vonal közös pontja H; a főpontra illeszkedő és irányvonallal parallel egyenesre felmért distanc végpontja a beforgatott centrum (C), a (C) és H pontok összekötő egyenesére a (C) pontban emelt merőleges metszi a háromszög átfogóját a keresett Q'_n pontban. Mivel

$$\overline{C_1(C)}^2 = d^2 = \overline{HC_1} \cdot \overline{C_1Q'_n},$$

ebből következik, hogy az adott síkra merőleges egyenesek közös iránypontja, Q'_n, a distanckör külső, a distanckörön fekvő, illetve a disztanckör belső pontja, ha az adott sík irányvonala a disztanckört valós pontokban metszi, a disztanckört érinti, illetve a disztanckört képzetes pontokban metszi.

Síkra merőleges egyenesek közös iránypontjának szerkesztéséből utasítást nyertünk arra is, hogy hogyan kell adott egyenesre merőleges síkok közös irányvonalát meghatározni.

158. §. Pont és sík távolsága. Adott vetési középpont mellett (244. ábra) szerkesztessék meg az **S** $(s,\ q')$ sík és az a egyenesen felvett $A\,(A',\ S_a,\ Q'_a)$ pont távolsága. A síkra merőleges egyenesek közös iránypontját, a Q'_n pontot, összekötjük az A pont képével, evvel nyertük az adott síkra merőleges és az adott pontra illeszkedő n egyenes képét, iránypontja Q'_n; az n egyenes nyompontja az a és n egyenes illeszkedéséből nyerhető. E két egyenes $\mathbf{S}_\times\,(s_\times,\ q'_\times)$ összekötő síkjának nyomvonala metszi az n egyenes képét S_n nyompontjában. Azután megszerkesztjük nyom- és iránypontjával ismeretes n egyenes és **S** sík metszéspontját. A metszéspont meghatározása végett az egyenesre segédsíkot illesztünk, legyen e segédsík az $\mathbf{S}_\times$ sík. Az **S** és $\mathbf{S}^\times$ sík közös m egyenese metszi az n egyenest a keresett D döféspontban. Az $\overline{AD}$ távolság valódi nagyságának meghatározására megrajzoltuk az n egyenes osztókörét; az n egyenes osztópontjául azt a pontot választottuk, melyben az osztókör az $\mathbf{S}^\times$ sík irányvonalát metszi, e pont O_n. Az $\overline{A'D'}$ képtávolság vetülete az O_n pontból az $\mathbf{S}_\times$ sík $s_\times$ nyomvonalára, $A_\times D_\times$, a távolság valódi nagysága.

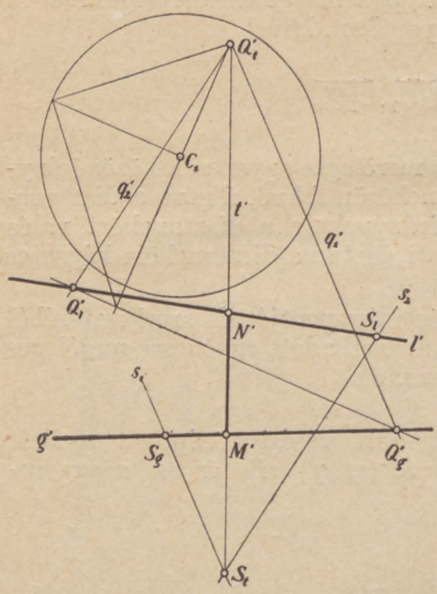


244. ábra.

159. §. Két kitérő egyenes normális transzverzálisa. Legyen adva a g és l kitérő egyenesek, mindkettő nyom- és iránypontjával (245. ábra). A transzverzális irányának meghatározására szerkesztünk a kitérő egyenesekkel parallel síkot. Ilyen sík az a vetítősík, melynek nyomvonala az adott egyenesek iránypontjainak összekötő egyenese, q', ha g és l a felvett kitérő egyenesek. E vetítősíkra merőleges egyenesek közös iránypontja, Q_t', a keresett transzverzálisnak is iránypontja. További feladatunk a kitérő egyenesek ama transzverzálisának szerkesztése, melynek végtelenben fekvő pontja Q_t. E transzverzálist ugyanúgy szerkesztjük, mint a parallel projekcióban, e szerint a transzverzális

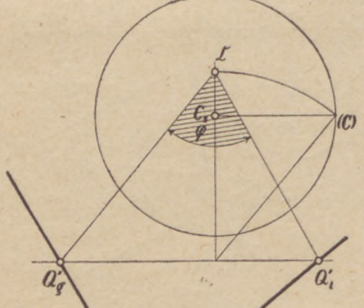
$$t = |[Q_t g][Q_t l]| = \\ = |[s_1 q_1'][s_2 q_2']| = |\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2|,$$

ahol az s_1 és s_2 nyomvonalak metszéspontja a keresett transzverzális nyompontja, S_t. A transzverzális a g egyenest az M pontban, az l egyenest az N pontban metszi.



245. ábra.

160. §. Két egyenes szöge. Ismeretes vetítési középpont mellett legyen adva a g ($S_g Q_g'$) és l ($S_l Q_l'$) egyenes (246. ábra. A kitérő egyenesek szögét mérhetjük az egyenesekkel parallel vetítősugarak szögével. Az egyik vetítősugár képe Q_g', a másiké Q_l'. A két vetítősugár összekötő síkja vetítősík, nyomvonala az adott egyenesek iránypontjainak összekötő egyenese, q'. Ha a vetítési középpontot a meghatározott vetítősík nyomvonala közül a képsíkba forgatjuk, akkor $Q_g' \measuredangle Q_l' \sphericalangle$ a keresett szög valódi nagysága. Mint a szerkesztésből látjuk, a szög megszerkesztésénél az adott egyenesek nyomelemeit mellőzhetjük.

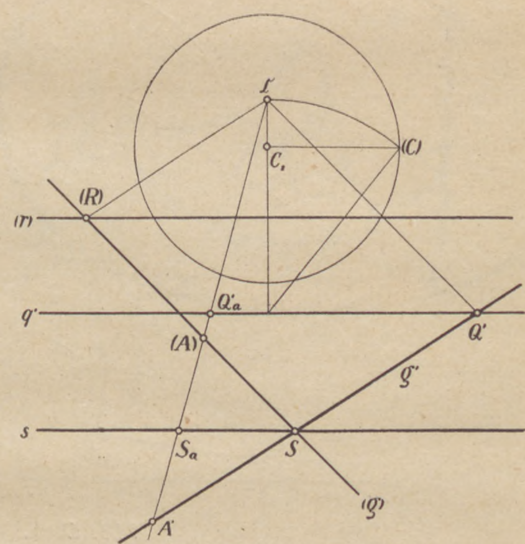


246. ábra.

Ugyanúgy, ha egyenes és sík szögét kívánjuk megszerkeszteni, az egyenes helyett vesszük az egyenessel parallel vetítősugarat és a sík helyett a síkkal parallel vetítősíkot; vagy ha két sík szögét keressük, akkor a síkokkal parallel vetítősíkok szögét szerkesztjük.

161. §. Adott síkidom képének szerkesztése, képével adott síkidom

valódi nagysága. (Sík leforgatása, felállítása.) Adott vetítési középpont mellett legyen adva az **S** (s, q') sík. A síkra illeszkedő összes elemek síkbeli rendszert alkotnak. Ha e síkbeli rendszer összes elemeit a vetítési középpontból a képsíkra projiciáljuk, továbbá e síkbeli rendszer elemeit a sík nyomvonala körül a képsíkba forgatjuk, akkor a képsík két egyesített síkbeli rendszer. Az egyesített síkbeli rendszerek egynemű elemei párokba foglalhatók azáltal, hogy az eredeti sík egy elemének képét és ugyanezen elem leforgatottját megfelelő elemeknek tekintjük. Ez egyesített síkbeli rendszerekről tudjuk, hogy centrális kollineár vonatkozásban lévő síkbeli rendszerek. (I. kötet 129. §.) A centrális kollineáció tengelye az adott sík nyomvonala, centruma a vetítési középpont képsíkba forgatottja, ha azt a sík irányvonala körül a képsíkba forgatjuk, állandó jele : ∠. Az eredeti sík végtelenben fekvő egyenesének leforgatottja a képsík végtelenben fekvő egyenese, ennek megfelel az adott sík irányvonala, q', ez a kollineáció egyik ellentengelye. A képrendszer végtelenben fekvő egyenesének eredetije az adott sík és eltűnési sík metszésvonala, r, az r egyenes leforgatottja, (r), a kollineáció másik ellentengelye. C, q', s, r térbeli helyzetéből következik, hogy (r) és s távolsága nagyságra és értelemre nézve egyezik ∠ és q' távolságával (247. ábra).



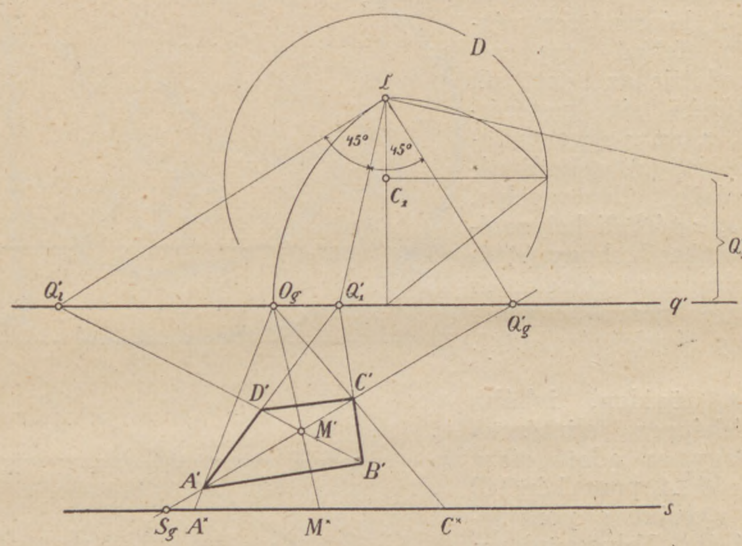
247. ábra.

Itt röviden, inkább ismétlésképpen elintézzük azt, hogy az adott síkra illeszkedő A pont képéből mikép nyerjük e pont leforgatását. Felveszünk a síkban az A pontra illeszkedő g egyenest, nyompontja S, iránypontja Q'. A Q' és C pontok összekötő egyenese a térben a g egyenessel parallel egyenes, ennek leforgatottja a ∠ és Q' pontok összekötő egyenese. Mivel pedig parallel síkokban fekvő parallel egyenesek leforgatottjai parallel egyenesek, a g egyenes leforgatottja, (g), az S nyompontra illeszkedő ∠Q' egyenessel parallel egyenes, erre az egyenesre illeszkedik mindenesetre az A pont leforgatottja. Az A pontra és adott síkra illeszthető egyenesek közül második egyenesnek választjuk azt az a egyenest, melynek képe a ∠ és A' pontok összekötő egyenesével összeesik, ez egyenes képe és leforgatottja födésben lévő egyenesek, tehát ahol ez az egyenes metszi a g egyenes leforgatottját, ott nyerjük az A pont leforgatottját, az (A) pontot. A rajzban még feltüntettük a g egyenes eltűnési pontjának leforgatottját is, hogy rámutathassunk arra, hogy egy tetszőleges g egyenessel kapcsolatban ∠, Q', S, (R) pontok mindig parallelogramma csúcspontjai.

Képével adott pont leforgatásának tárgyalásából útmutatást nyertünk arra is, hogy kell síkra illeszkedő elemek leforgatottjaiból azok képét megszerkeszteni.

162. §. Négyzet képének szerkesztése. Adva van a vetítési középpont, az **S** ($s\,q'$) sík, továbbá e síkra illeszkedő g ($S_g\,Q'_g$) egyenesen az M pont és a t távolság (248. ábra). *Szerkesztessék* meg e síkban *az a négyzet, melynek középpontja az M pont, egyik diagonálisa a g egyenes és fél átlója az adott t távolság.*

A feladat egyik megoldási módja az volna, hogy a négyzet síkját a képsíkba forgatjuk a négyzetet meghatározó elemekkel együtt, a leforgatásban a négyzetet megszerkesztjük, végül a négyzetet felállítjuk. De ezt a feladatot lényegesen egyszerűbben is oldhatjuk meg. Mindenekelőtt megszerkesztjük kép és leforgatás között fennálló centrális



248. ábra.

kollineár vonatkozás centrumát, a $\mathcal{L}$ pontot, majd felmérjük a g egyenes M pontjától számítva két értelemben az adott t távolságot. A szerkesztés eme részletét úgy intéztük el, hogy megrajzoltuk a g egyenes osztókörét, középpontja Q'_g, sugara $\overline{Q'_g\mathcal{L}}$ távolság. Osztópontul az osztókör és adott sík irányvonalának egyik közös pontját választottuk, ez O_g, e pontból az M' pontot az adott sík nyomvonalára vetítettük, az így nyert $M^×$ ponttól számítva az adott sík nyomvonalára felmértük az adott fél átlót valódi nagyságban, a kapott $A^×$, $C^×$ pontokat az osztópontból a g egyenes képére vetítettük, a vetületi pontok a négyzet képének szemközt fekvő csúcspontjai, A' és C'. Ezek után, ha a négyzet másik átlóját l betűvel jelöljük, megállapítottuk az l egyenes iránypontját. Mivel a négyzet átlói egymásra merőleges egyenesek, az iránypont az adott sík irányvonalán az a pont, melyben a $\mathcal{L}$ pontban a $\mathcal{L}\,Q'_g$ egyenesre állított merőleges egyenes metszi. Ha a nyert Q'_l pontot az M' ponttal összekötjük, akkor megrajzoltuk a négyzet képének másik átlóját. Mivel a négyzet szemközt fekvő oldalai parallel egyenesek, két-két oldalnak közös iránypontja van, Q'_1, Q'_2. Tudjuk, hogy a négyzet átlói a négyzetoldalakkal 45°-os szöget alkotnak, e szerint a Q'_1, Q'_2 pontokat úgy szerkesztjük, hogy a $\mathcal{C}Q'_g$ egyeneshez 45°-os szög alatt hajló és a $\mathcal{C}$ pontra illeszkedő egyeneseket vezetünk, ezek metszik az adott sík irányvonalát a keresett pontokban. E pontok közül a rajz síkjában csak egy, a Q'_1 pont hozzáférhető. Ha végül a Q'_1 pontot összekötjük az A', ill. C' pontokkal, akkor ezek az egyenesek metszik az l egyenes képét a D', ill. B' pontokban, e pontok a négyzet hiányzó csúcspontjainak képei.

163. §. Horizontális síkon álló és síklapokkal határolt kőpad centrális képe. Árnyékszerkesztések parallel világítás mellett. A gyakorlatban műszaki alkotásaink legtöbbször horizontális síkon állanak, melyekről főleg laikusok számára minél képiesebb képet kívánunk szerkeszteni. Az oktatéder centrális képének meghatározása arról győzhet meg, hogy alakzat képe a legképiesebb, ha azt a centrális projekció törvényei szerint ábrázoljuk.

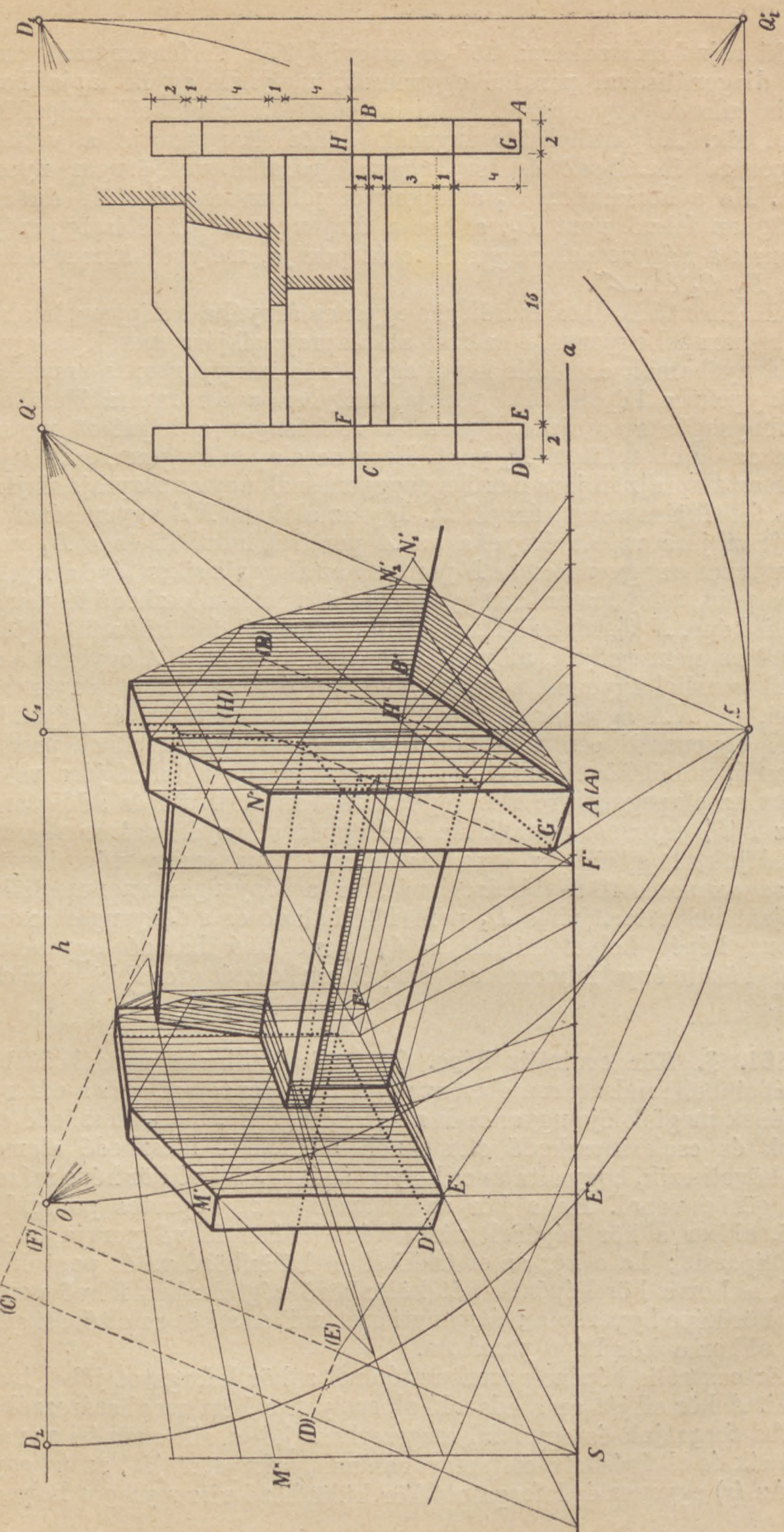
Legyen az alakzat, melynek centrális képét szerkeszteni akarjuk, az a felényire kisebbített méretekkel adott kőpad, melyet a 249. ábrában orthogonális parallel projekcióban első és második képével, továbbá keresztmetszetével felvettünk. Az alakzat centrális projekciójának szerkesztését azzal vezetjük be, hogy adott C_1 főpont és distanc mellett felvesszük a centrális projekcióban azt a síkot, melyen az alakzat áll. E sík horizontális sík, tehát nyomvonala horizontális egyenes, jelen esetben ezt az egyenest alapvonalnak mondjuk és a-val jelöljük. Az a alapvonalat a főpont alatt vesszük fel és pedig oly távolságban, hogy a rajz méretarányainak tekintetbe vételével e távolság körülbelül embermagasságot jelentsen. A horizontális alapsík irányvonala a főpontra illeszkedő és az alapegyenessel parallel egyenes, ezt itt horizontnak mondjuk és h-val jelöljük. Ezek után megállapodunk alakzat, képsík és centrum viszonylagos helyzetében és e helyzetnek megfelelően megrajzoljuk az alaprajznak képsíkba forgatottját. Ha az alaprajz fontosabb pontjai, A, B, C, D, E, F, G, H és e pontok beforgatottjai rendre (A), (B), (C), (D), (E), (F), (G), (H) pontok, akkor elsősorban e pontok által jellemzett egyenesek képeit szerkesztjük meg ama centrális kollineáció alapján, mely síkalakzat beforgatottja és képe között fennáll. A centrális kollineáció centruma, $\mathcal{C}$, mivel az alaprajz síkja horizontális sík és e síknak képsík előtti részét lefelé forgattuk, a horizont alatt a C_1 ponton átmenő és a horizontra merőleges egyenesen distanc távolságban van.

A megtett előkészületek után hozzáfoghatunk az alakzat centrális képének szerkesztéséhez. Megrajzoljuk az AB, GH, EF és DC egyenesek képeit. Az egyenesek parallel egyenesek, tehát képeik iránypontja, Q', közös és a horizontnak ama pontja, melyben azt a kollineáció centrumára illeszkedő és a leforgatott egyenesekkel parallel egyenes metszi. Egy egyenesnek nyompontja az alapegyenes ama pontja, melyben a leforgatott egyenes az alapegyenest metszi. Mivel ilyen módon a fenti egyenesek mindegyikének nyom- és közös iránypontját meghatároztuk, megrajzolhatjuk az egyenesek centrális képeit.

Az alakzat legtöbb csúcspontjának alaprajza az EF és GH egyenesen van. Itt csak ama pontok képeinek szerkesztését tárgyaljuk, melyek az EF egyenesre illeszkednek, mert a GH egyenesre illeszkedő pontoknál az eljárás ugyanaz. Mivel az EF egyenesre az E ponttól számítva adott távolságokat kell felmérni, megszerkesztjük az E pont centrális képét és az EF egyenes osztópontját a horizonton. Az E pont centrális képe az EF egyenes centrális képén az a pont, melyben azt az $(E)\angle$ egyenes metszi, míg az O osztópont a horizonton az a pont, melynek távolsága a horizont Q' pontjától $Q'\angle$ távolsággal egyenlő. Miután az E pont centrális képét, az E' pontot az O osztópontból az a alapegyenesre vetítettük, a nyert $E^{<}$ ponttól számítva az alapegyenesre rendre felmérjük valódi nagyságban azokat a távolságokat, melyek az EF egyenesen szerephez jutnak, végül az alapegyenesen fekvő pontokat az O pontból az EF egyenes képére vetítjük, e vetületi pontok az EF egyenesen szereplő pontok képei. Ugyanúgy megszerkesztve a GH egyenesen szereplő pontok centrális képeit, megrajzolhatjuk az egész alaprajz centrális képét.

Az alakzat alaprajzának centrális képe alapján az eredeti alakzat centrális képét úgy építjük fel, amint azt alakzat alaprajzából az alakzat axonometrikus ábrázolásánál tettük. Az eredeti alakzat egy-egy pontja a pont alaprajzán átmenő és az alaprajz síkjára merőleges egyenesen van. Mivel a jelen esetben az alaprajz síkja horizontális sík, e síkra merőleges egyenesek centrális képeinek közös iránypontja a horizontra merőleges egyenes végtelenben fekvő pontja, tehát az alaprajz síkjára merőleges egyenesek képei az alapegyenesre merőleges egyenesek és minden ilyen egyenes a centrális projekció képsíkjával parallel egyenes. Tehát az alakzat centrális képének felépítése abban áll, hogy e képsíkkal parallel egyenesekre az alaprajz síkjával való metszésponttól számítva ama távolságokat mérjük fel, melyeknek valódi nagyságát az alakzat második képe tüntet fel. Itt csak az M pont centrális képének, az M' pontnak szerkesztését tárgyaljuk, mert ehhez hasonlóan kell a többi pont centrális képét megállapítani. Az M pont alaprajzának centrális képe az E' pont, e szerint az M' pont ama egyenesen van, melynek képe az E' pontra illeszkedő és az a alapegyenesre merőrőleges egyenes. Ezen az egyenesen kell meghatározni annak a pontnak képét, melynek valódi távolsága az E ponttól kilenc egység. Képsíkkal parallel egyenesen lévő távolság képének szerkesztésénél felveszünk az egyenesre illeszkedő tetszőleges síkot, melynek nyomvonala, irányvonala a képsíkkal parallel egyenes képével parallel. Ilyen sík az EF egyenesre illeszkedő ama sík, melynek nyomvonala az EF egyenes S nyompontjára, irányvonala ugyanazon egyenes Q' iránypontjára illeszkedik és úgy a nyomvonal, mint az irányvonal egyébként az alapegyenesre merőleges. Ha e sík nyomvonalára az EF egyenes S nyompontjától számítva felmérjük a kilenc egységet, majd az így nyert $M^{<}$ pontot összekötjük a Q' ponttal, akkor ez az egyenes metszi az E' ponton átmenő és az alapegyenesre merőleges egyenest az M pont centrális képében. Ezzel az eljárással megszerkesztettük az alakzat minden csúcspontjának centrális képét.

A kőpad centrális képét még kiegészítettük parallel világítás feltételezése mellett az alakzatnak az alaprajz síkjára, a fal síkjára és az önmagára vetett árnyék szerkesztésével. A parallel világítás a



249. ábra.

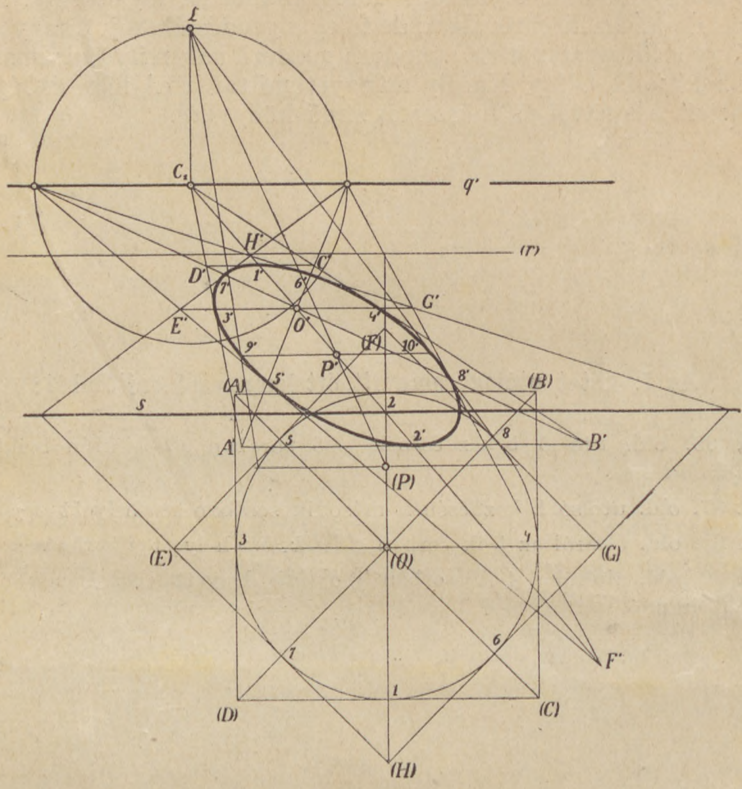
műszaki rajzokon szokásos 45°-os megvilágítás. A fénysugarak ama kocka diagonálisával parallel egyenesek, melynek egyik lapja horizontális sík és egy másik lapja a centıális pıojekciós képsíkkal parallel sík. A parallel fénysugarak közös iránypontja a vetítési középpontra illeszkedő és fénysugárral parallel vetítősugár nyompontja. Ha a horizonton C_1 a főponttól jobbra eső és tőle distanc távolságban fekvő pont D_1, akkor a fénysugarak közös iránypontja, Q'_l, annak a négyzetnek negyedik csúcspontja, melynek három csúcspontja D_1, C_1 és .

Horizontális síkra merőleges egyenes árnyéka a fénysugár alaprajzával parallel egyenes, e szerint az alaprajz síkjára merőleges egyenesek árnyékainak centrális képei egy közös irányponton mennek át. Az iránypont a képsík ama pontja, melyben a centrumra illeszkedő és a fénysugár alaprajzával parallel vetítősugár a képsíkot metszi. E pont az előbb említett D_1 pont. Ezen az alapon megszerkeszthetjük minden az alapıajz síkjára merőleges egyenesnek úgy az alaprajz síkjára, mint a fal síkjára vetett árnyékát. Így az alakzat NA egyenesének az alaprajz síkjára vetett árnyéka az A pontból indul ki és a D_1 pont felé tart, ezen az egyenesen az N pontnak az alaprajz síkon lévő árnyéka, N_1 ama pont, melyben ezt az egyenest az N pontra illeszkedő fénysugár centrális képe, $N'Q'_l$, metszi. Mint látjuk, ez árnyék feltörik a fal síkjára, de egyelőre nem tudjuk, milyen irányban. Mivel az NA egyenes a fal síkjával parallel egyenes, e síkon lévő árnyéka az eredeti egyenessel parallel, de NA egyenes a képsíkkal parallel egyenes és képsíkkal parallel egyenesek centrális képei az eredeti egyenesekkel parallel egyenesek, miből következik, hogy az egyenesnek a fal síkjára vetett árnyéka az alapegyenesre merőleges irányban törik fel és addig tart, míg az $N'Q'_l$ egyenest metszi. Az NA egyenes árnyékának szerkesztéséből látjuk, hogy itt az árnyékszerkesztést ugyanúgy végezhetjük, mint az axonometrikus ábrázolásnál, ha a fénysugár axonometrikus alaprajzát helyettesítjük a D_1 pont felé haladó és a fénysugár axonometrikus képét helyettesítjük a Q'_l pont felé haladó egyenesekkel. E körülmény felment az árnyékszerkesztés további részletezésétől.

164. §. Kör centrális képe. Centrális kollineár vonatkozásban lévő két síkbeli rendszer esetében az egyik rendszer tetszőleges n-edrendű görbéjének megfelelője ugyancsak n-edrendű görbe, mert illeszkedő elemeknek és csak illeszkedő elemeknek megfelelői illeszkedő elemek. Ebből következik, hogy általános helyzetű síkban fekvő kör képe másodrendű görbe vonal. Ha a kör az eltűnési síkot képzetes pontokban metszi, akkor a kör képének nincs végtelenben fekvő pontja, a kör képe ellipszsis ; ha a kör az eltűnési síkot különböző valós pontokban metszi, akkor a kör képének két különböző végtelenben fekvő pontja van, a kör képe hyperbola ; átmeneti eset, mikor a kör az eltűnési síkot érinti, akkor a kör képe parabola.

Kör centrális képének szerkesztésénél a kör leforgatottjából indulunk ki. A kör síkját ama adatokkal, melyek a kört meghatározzák, a képsíkba forgatjuk és egyúttal megszerkesztjük a sík eltűnési vonalának, a sík és eltűnési sík metszésvonalának, leforgatottját, az (r) egyenest. Az (r) egyenes és leforgatott kör különböző viszonylagos helyzete szerint a kör képe más és más másodrendű görbe, így ha a kör valós pontokban metszi az (r) egyenest, akkor a kör képe hyperbola stb.

A 250. ábrában horizontális síkban fekvő kör képét szerkesztettük meg. Az ábrában látható felvétel mellett a kör képe ellipszis, az ellipszis egyes pontjait és érintőit nyerjük, ha a kör egyes pontjainak és érintőinek centrális kollineár megfelelőit megrajzoljuk. A rajzban a kört két érintőnégyzetbe foglaltuk és e négyzetek képeit állapí-



250. ábra.

tottuk meg, így nyertük az ellipszis nyolc pontját és nyolc érintőjét. Megjegyezzük, ami az ábrából is kitűnik, hogy a kör középpontjának megfelelője nem lesz a képellipszis középpontja, hogy hogyan kell a képellipszis tetszőleges átmerőjét és ezzel kapcsolatban a középpontot megszerkeszteni, azt a másodrendű kúp síkmetszetének tárgyalásánál részletesen elintéztük.

165. §. A fotogrammetria. Technikus valamely alakzat centrális képének szerkesztésénél a tervezett alakzat orthogonális képeiből indul ki. A centrális projekció törvényeinek tárgyalásánál megmutattuk, hogy miképpen kell orthogonális projekcióval adott alakzat centrális képét előállítani. Alakzat centrális képét főleg akkor készítjük, ha a tervezett műszaki alkotás térhatásáról, a környezetbe való beilleszkedés leendő esztétikai benyomásáról stb. tájékozódni akarunk. Kész műszaki alkotásokról centrális képet a legegyszerűbben úgy nyerünk, hogy alkalmas helyről jó géppel lefotografáljuk, a fotográfia az alakzat szabályszerű centrális képe.

Fényképezéssel nyert centrális képekkel kapcsolatban felmerül önkénytelenül annak a problémának a megoldása, hogy hogyan kell alakzatról készített fotográfiák alapján az alakzat orthogonális parallel projekcióját megszerkeszteni. E problémával az ábrázoló geometria egy egészen különálló fejezete, a forogrammetria, foglalkozik. A fotogrammetria az architektúrában, de főleg a geodéziában jut nagy szerephez. Hogy a fotogrammetria a modern geodéziának mily hatalmas fegyvere, az kitűnik Oltay Károly műegyetemi tanár «A földi és légi fotogrammetria alapelvei és műszerei» című könyvből.

Az I. kötet utólag észrevett értelemzavaró sajtóhibái:

A 35. old. utolsó bekezdésének első sorában «*első*» után beiktatandó «*képeinek metszés*».

A 37. old. utolsó bekezdésének második sorában «*az*» helyett «*egy*» irandó.

A 68. old. alulról az 5-ik sorban «*illeszkedik*» helyett «*illeszkednek*» irandó.

A 80. old. alulról a 4-ik sorban «*pontjai*» helyett «*pontjainak összekötő egyenesei*» irandó.
